WMTC数学竞赛系列丛书

周国镇◎主编

第1~4届
世界数学团体锦标赛（WMTC）
青年组试题详解

WMTC命题委员会◎编

气象出版社
China Meteorological Press

WMTC数学竞赛系列丛书

周国镇◎主编

第1~4届
世界数学团体锦标赛（WMTC）
青年组试题详解

WMTC命题委员会◎编

气象出版社
China Meteorological Press

图书在版编目(CIP)数据

第1～4届世界数学团体锦标赛(WMTC)青年组试题详解/WMTC命题委员会编. —北京:气象出版社,2014.8

(WMTC数学竞赛系列丛书/周国镇主编)

ISBN 978-7-5029-5981-4

Ⅰ.①第… Ⅱ.①W… Ⅲ.①中学数学课-高中-题解 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第184311号

Di-1-4 Jie Shijie Shuxue Tuanti Jinbiaosai (WMTC) Qingnian Zu Shiti Xiangjie

第1～4届世界数学团体锦标赛(WMTC)青年组试题详解

WMTC命题委员会 编

出版发行:气象出版社

地　　址:北京市海淀区中关村南大街46号　　**邮政编码**:100081

总 编 室:010-68407112　　**发 行 部**:010-68409198

网　　址:http://www.cmp.cma.gov.cn　　**E-mail**: qxcbs@cma.gov.cn

责任编辑:侯娅南　　**终　　审**:章澄昌

封面设计:符　赋　　**责任技编**:吴庭芳

印　　刷:三河市鑫利来印装有限公司

开　　本:720 mm×960 mm　1/16　　**印　　张**:9

字　　数:176千字

版　　次:2014年9月第1版　　**印　　次**:2014年9月第1次印刷

印　　数:1—3000　　**定　　价**:28.00元

第1届世界数学团体锦标赛开幕词

周国镇

各位专家，各位来宾，各位领队，同学们，老师们：

大家上午好！

今天，首届世界数学团体锦标赛开幕了，我们在座的600多位青少年数学爱好者、数学工作者和来宾共同见证了这个有意义的事件。从此，国际数学竞赛大家庭中又有了一个新成员。

在这里，我想首先讲一讲我们创办这个国际数学竞赛，是源于以下的理念：

(1)数学没有国界，数学是人类共同的文化财富，数学学习将使每一个人终生受益；

(2)儿童和青少年是世界的未来，在他们形成个人素质的成长过程中，要尽可能多地鼓励他们努力学习数学。

因此，世界数学团体锦标赛有三个特点：

一是鼓励参赛者既要充分发挥自己的才智，又要学会同别人合作，培养团队精神；

二是通过竞赛活动，促进青少年之间的相互了解和沟通，以建立友谊；

三是对每一个参赛的代表队和每一位参赛者都要有一个公正的、积极的、鼓励性的评价。

这三个特点就决定了它不同于别的任何国际数学竞赛。

美国加州大学的林观焜教授和我在今年7月末数学竞赛国际联盟第六次大会(拉脱维亚，里加)上介绍我们举办世界数学团体锦标赛的计划时，很多国家表示了浓厚的兴趣，如英国、澳大利亚、俄罗斯、哥伦比亚、以色列、立陶宛等，表示很愿意参加这项活动，但是由于时间仓促和经费问题，今年不能参加，但是明年一定会参加。他们真诚、友好的表态对我们是很大的安慰，尤其是美国、保加利亚、印度尼西亚、越南、菲律宾、斯里兰卡、新加坡等国家以及中国大陆的24个城市和台湾、香港、澳门地区得到消息以后，尽管遇到同样的问题，仍然先后决定组队率先参加本届锦标赛，使得本届锦标赛成为名符其实的国际数学竞赛。我们知道，任何一个即使有强大生命力的新事物，在它诞生之初，理解和支持它的人总是很少，但他们却是可尊敬的。所以，今天，我要向参加本届锦标赛的73支代表队的组织者以及给

过你们种种支持和帮助促成你们北京之行的人们表示由衷的敬意和诚挚的感谢！

世界数学团体锦标赛刚刚诞生，肯定有很多不完善之处，我们将不断地努力使它日趋完美，首先要使本届参赛的地区和国家成为 WMTC 组委会中受到充分尊重的成员，在此基础上同更多的国家和地区建立联系。

这里，我要感谢来自美国加州大学的 Paul 教授，他是一位才智过人的数学家，今天将为大家做一个很有启发性的数学报告，使我们的首届世界数学团体锦标赛有了浓厚的学术气氛。

最后，希望所有参赛队和每位参赛者都能在本届锦标赛中充分展示自己的能力和才智，获得良好的成绩。

谢谢！

世界数学团体锦标赛组织委员会

主　席:［中国］周国镇

副主席:［美国］Quan K. Lam

委　员:［保加利亚］Borislav Yordanov Lazarov

［中国澳门］汪甄南

［印度尼西亚］Surya Wijaya

［菲律宾］Rechilda P. Villame

［韩国］Patrick Yoo

［新加坡］Ang Lai Chiang

［越南］Do Duc Thai

［中国香港］梁瑞萍

［中国台湾］蔡坤龙

［马来西亚］余剑雄

［泰国］Phumithep Klungurai

秘书长:［加拿大］周　越

世界数学团体锦标赛命题者

周国镇　Quan K. Lam　曹大方

王墨森　安振平　张海英　骆　华

玉邴图　戴志祥　李国威　李　歆

孙金兰　王　镇　刘族刚　郭奕津

张振山　李兴怀　吕二动　张　森

程新林　张　俊　陆克荣　王远征

赵光明　施　储　张乃贵　许少华

师亚军　李耀文　杨　忠　葛红艳

童其林　舒飞跃　孙振飞　黄海波

王怀祥

目　　录

第4届

第 1 届

团体赛 · 试题

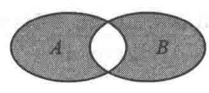

图 1

1. 已知 A,B 是两个非空集合. 在如图 1 所示的韦恩图中,定义集合 $A※B$ 为阴影部分所表示的集合. 若 $M=\{x|y=\sqrt{-x^2+3x+10}\}$,$N=\{y|y=3^x-1\}$,则 $M※N=$________.

2. 已知函数 $f(x)=x^2-3$,$g(x)=m(x-1)$,对任意的 $x_0\in[-3,3]$,总存在 $x'\in[-3,3]$ 使得 $g(x')=f(x_0)$,则实数 m 的取值范围是________.

3. 关于 x 的不等式 $mx>n$ 的解集是 $(-\infty,3)$,则关于 x 的不等式 $(m-n)x+m+n>0$ 的解集是________.

4. 用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,若实数 r 满足 $\left[r+\frac{1}{10}\right]+\left[r+\frac{2}{10}\right]+\cdots+\left[r+\frac{9}{10}\right]=122$,则 $[10r]$ 的值等于________.

5. 关于 x 的一元二次方程 $x^2-x\sin\theta+\sin\theta-5=0$ 的根的最大值是________,最小值是________.

6. 若三条直线:$2x-y+1=0$,$x+y+2=0$,$x+ay=0$ 不能围成三角形,则 $a=$________.

7. 设 $x,y,z\in\mathbf{R}$ 且 $x+2y+3z=1$,$yz+zx+xy=-1$,则 $x+y+z$ 的取值范围是________.

8. 设 a,b,c 皆为正实数,$a+b+c=1$,则 $M=\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1}$ 的整数部分是________.

9. 在数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=3$,$a_2=5$,且 $a_{n+2}a_n^2=a_{n+1}^3$,则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

$a_n=$________.

10. 以 x 为未知数的方程 $\log_m(\sqrt{x^2+1}+x)+\log_m(\sqrt{x^2+2}+x)=\frac{1}{2}\log_m 2(m>0$ 且 $m\neq 1)$ 的根是 $x=$________.

11. 已知 $\boldsymbol{a}=(m+2,n)$，$\boldsymbol{b}=(m-2,n-4)$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=8$，则 $m+n=$________.

12. 已知$\triangle ABC$的面积是2，三条中线 AD，BE，CF 交于点 G，点 H，I，J 分别在三条中线上，并且 $AH:HD=1:1$，$BI:IE=1:2$，$CJ:JF=1:3$. 则$\triangle HIJ$的面积等于________.

13. 已知 a，b，c 皆为正实数，且 $a+b+c=12$，$ab+bc+ca=45$，则 abc 的最大值是________.

14. 已知 C：$x^2+(y-1)^2=r^2$ 与 $y=\sin x$ 有唯一交点，且交点的横坐标为 α，则 $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha-4\cos^2\alpha}{\alpha\cos\alpha}=$________.

15. 已知点 $P\in\left\{(x,y)\left|\frac{(x-\cos\theta)^2}{4}+\left(y-\frac{1}{2}\sin\theta\right)^2=1,\theta\in\mathbf{R}\right.\right\}$，则满足条件的点 P 在平面上组成的图形的面积为________.

16. 设$[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^{10}=\frac{243(1-\sqrt{3})\mathrm{i}-243(1+\sqrt{3})}{64(1+\mathrm{i})}$，若 $r>0$，$0<\theta<\frac{\pi}{3}$，则 $r=$________，$\theta=$________.

17. 过椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$内一点$(\sqrt{5},\sqrt{2})$作两条弦 AB 和 CD，过点 A，B 作椭圆的两切线交于点 E，过点 C，D 作椭圆的两条切线交于点 F，则直线 EF 的方程是________.

18. 已知抛物线 $x^2=\frac{1}{8}\left(y-\frac{1}{32}\right)$和直线 $y=x+n+1$，n 依次取 $1,2,3,\cdots$时，直线截抛物线所得的弦长为$|A_nB_n|$，记 $a_n=\frac{1}{n|A_nB_n|^2}$，$S_n$ 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，则 $S_{2010}=$________.

19. 用一组垂直于平面 α 的平行光线将棱长为 a 的立方体投影到 α 上，在投影内画圆，则这个圆的直径的最大值是________.

20. $\odot A$ 的半径是2，点 P 在$\odot A$外，直线 PM 切$\odot A$于点 M，$\cos\angle MPA=\frac{\sqrt{3}}{2}$，以点 P，A 所在的直线为轴将线段 PM 及$\odot A$旋转一周，所得旋转体中球 A 外部的体积等于________.

答　案

1. 答案：$[-2,-1]\cup(5,+\infty)$.

解：$A※B$ 是指 $A\cup B$ 除去 $A\cap B$ 后剩余的元素所构成的集合. 其中

$$M=\{x\in\mathbf{R}\mid y=\sqrt{-x^2+3x+10}\}=\{x\in\mathbf{R}\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}=[-2,5],$$

$$N=\{y\mid y=3^x-1,x\in\mathbf{R}\}=\{y\mid y>-1\}=(-1,+\infty),$$

所以
$$M\cup N=[-2,+\infty),M\cap N=(-1,5],$$

故
$$M※N=[-2,-1]\cup(5,+\infty).$$

2. 答案：$\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right]\cup[3,+\infty)$.

解：当 $x_0\in[-3,3]$ 时，$f(x_0)=x_0^2-3\in[-3,6]$. 为使 $g(x')$ 在 $x'\in[-3,3]$ 时能取到 $[-3,6]$ 内的所有值，则有

$$\begin{cases}m\geqslant 0\\ m(3-1)\geqslant 6\\ m(-3-1)\leqslant -3\end{cases},\text{或}\begin{cases}m\leqslant 0\\ m(3-1)\leqslant -3.\\ m(-3-1)\geqslant 6\end{cases}$$

解得
$$m\geqslant 3 \text{ 或 } m\leqslant -\frac{3}{2}.$$

3. 答案：$(2,+\infty)$.

解：因为　　关于 x 的不等式 $mx>n$ 的解集是 $(-\infty,3)$，

所以，有
$$\begin{cases}\dfrac{n}{m}=3\\ m<0\end{cases},\text{即}\begin{cases}n=3m\\ m<0\end{cases}.$$

于是
$$m-n=m-3m=-2m>0,m+n=m+3m=4m,$$

由不等式 $(m-n)x+m+n>0$，得　$x>-\dfrac{m+n}{m-n}=-\dfrac{4m}{-2m}=2$，

故所求不等式的解集是 $\{x\mid x>2\}$，即 $(2,+\infty)$.

4. 答案：135.

解：由 $\dfrac{1}{10},\dfrac{2}{10},\cdots,\dfrac{9}{10}\in(0,1)$，知

$$\left[r+\frac{1}{10}\right],\left[r+\frac{2}{10}\right],\cdots,\left[r+\frac{9}{10}\right]\text{的值为}[r]\text{或}[r+1].$$

设 $\left[r+\dfrac{1}{10}\right],\left[r+\dfrac{2}{10}\right],\cdots,\left[r+\dfrac{9}{10}\right]$ 中前 x 个的值为 $[r]$，后 $(9-x)$ 个的值为 $[r+1]$，

又
$$9\times13<122<9\times14,$$
所以
$$[r]=13,[r+1]=14,13x+14(9-x)=122,$$
解得
$$x=4.$$
于是有
$$\left[r+\frac{4}{10}\right]=13,\left[r+\frac{5}{10}\right]=14,$$
即
$$\begin{cases}13\leqslant r+0.4<14\\14\leqslant r+0.5<15\end{cases}.$$
解得
$$13.5\leqslant r<13.6,$$
所以
$$135\leqslant 10r<136,[10r]=135.$$

5. 答案：$\frac{1+\sqrt{17}}{2}$；-3.

解：由方程 $x^2-x\sin\theta+\sin\theta-5=0$，得 $\sin\theta=\frac{x^2-5}{x-1}$，所以

$$\begin{cases}\frac{x^2-5}{x-1}\geqslant-1\\\frac{x^2-5}{x-1}\leqslant1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x^2+x-6}{x-1}\geqslant0\\\frac{x^2-x-4}{x-1}\leqslant0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-2)(x+3)(x-1)\geqslant0(x\neq1)\\\left(x-\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)(x-1)\leqslant0(x\neq1)\end{cases},$$

解得
$$-3\leqslant x\leqslant\frac{1-\sqrt{17}}{2}\text{或 }2\leqslant x\leqslant\frac{1+\sqrt{17}}{2},$$

所以　　方程的根的最大值是$\frac{1+\sqrt{17}}{2}$，最小值是-3.

6. 答案：$-\frac{1}{2}$或±1.

解：设 l_1：$2x-y+1=0$，l_2：$x+y+2=0$，l：$x+ay=0$. 若这三条直线不能围成三角形，则必然是 $l/\!/l_1$，或 $l/\!/l_2$，或 l 与 l_1，l_2 共点.

由此可求得
$$a=-\frac{1}{2}\text{或}\pm1.$$

7. 答案：$\left[\frac{3-3\sqrt{3}}{4},\frac{3+3\sqrt{3}}{4}\right]$.

解：设 $x+y+z=t$，则由 $x+2y+3z=1$，得
$$x=1-2y-3z=1-2(y+z)-z=1-2(t-x)-z=1-2t+2x-z,$$
所以
$$x=z+2t-1.\qquad①$$
同法可得
$$y=-2z-t+1.\qquad②$$
将①、②都代入 $yz+zx+xy=-1$ 中，并整理得
$$3z^2+(4t-3)z+(2t^2-3t)=0.$$

由 $\Delta_z \geqslant 0$，即 $\quad (4t-3)^2-12(2t^2-3t)\geqslant 0, 8t^2-12t-9\leqslant 0,$

解得
$$\frac{3-3\sqrt{3}}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3+3\sqrt{3}}{4}.$$

8. 答案：4.

解：一方面，由题设条件知 $0<a<1$，所以 $a>a^2$，于是
$$\sqrt{3a+1}>\sqrt{a^2+2a+1}=a+1,$$
即
$$\sqrt{3a+1}>a+1.$$
同理
$$\sqrt{3b+1}>b+1, \sqrt{3c+1}>c+1.$$
将这 3 个不等式叠加，并注意到条件 $a+b+c=1$，得
$$M=\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1}>4.$$

另一方面，由柯西不等式

$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$，得
$$\begin{aligned}M&=1\cdot\sqrt{3a+1}+1\cdot\sqrt{3b+1}+1\cdot\sqrt{3c+1}\\&\leqslant\sqrt{(1^2+1^2+1^2)[(\sqrt{3a+1})^2+(\sqrt{3b+1})^2+(\sqrt{3c+1})^2]}\\&=\sqrt{3(3a+1+3b+1+3c+1)}\\&=\sqrt{3[3(a+b+c)+3]}=3\sqrt{2},\end{aligned}$$
所以
$$4<M\leqslant 3\sqrt{2}<5, M \text{ 的整数部分是 } 4.$$

9. 答案：$3\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{2^{n-1}-1}$.

解：由 $a_1=3, a_2=5, a_{n+2}a_n^2=a_{n+1}^3$，得 $\quad \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2, a_n>0,$

两边取以 10 为底的对数，得 $\quad \lg\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=2\lg\frac{a_{n+1}}{a_n},$

这说明数列$\left\{\lg\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$是首项为 $\lg\frac{5}{3}$，公比为 2 的等比数列，所以
$$\lg\frac{a_{n+1}}{a_n}=2^{n-1}\lg\frac{5}{3},$$
即
$$\lg a_{n+1}-\lg a_n=2^{n-1}\lg\frac{5}{3},$$
在上式中令 $n=1,2,3,\cdots,n-1$，得
$$\lg a_2-\lg a_1=2^0\lg\frac{5}{3},$$

$$\lg a_3-\lg a_2=2^1\lg\frac{5}{3},$$

$$\cdots$$

$$\lg a_n-\lg a_{n-1}=2^{n-2}\lg\frac{5}{3},$$

将上面 $n-1$ 个等式相加，得

$$\lg a_n-\lg a_1=(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-2})\lg\frac{5}{3}=(2^{n-1}-1)\lg\frac{5}{3},$$

所以
$$a_n=3\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{2^{n-1}-1}.$$

10. 答案：0.

解：原方程可变形为 $\log_m(\sqrt{x^2+1}+x)+\log_m(\sqrt{x^2+2}+x)=\log_m\sqrt{2}$，

即
$$(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+2}+x)=\sqrt{2},$$

亦即
$$(\sqrt{x^2+1}+x)\left[\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}+\frac{x}{\sqrt{2}}\right]=1,$$

两边同乘以 $(\sqrt{x^2+1}-x)$，得

$$\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}+\frac{x}{\sqrt{2}}=\sqrt{x^2+1}-x, \qquad ①$$

构造函数 $f(t)=\sqrt{t^2+1}+t$，对 t 求导，得 $f'(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}+1=\frac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}}>0$，

所以 $f(t)=\sqrt{t^2+1}+t$ 在 $\mathbf{R}$ 上是单调增函数，

又因为方程①也即 $f\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)=f(-x)$，所以 $\frac{x}{\sqrt{2}}=-x$，即 $x=0$.

11. 答案：2.

解法 1：因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即 $(m+2,n)\cdot(m-2,n-4)=0$，于是

$$(m+2)(m-2)+n(n-4)=0,$$

即
$$m^2+(n-2)^2=8. \qquad ①$$

因为
$$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=8,$$

所以
$$\sqrt{(m+2)^2+n^2}+\sqrt{(m-2)^2+(n-4)^2}=8. \qquad ②$$

方程①表示圆心在 $(0,2)$，半径为 $2\sqrt{2}$ 的圆；方程②表示焦点是 $(-2,0)$ 和 $(2,4)$，长轴长为 8，短轴长为 $4\sqrt{2}$ 的椭圆.

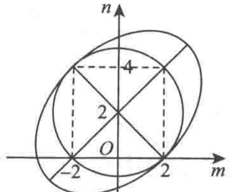

图 2

由①、②在平面直角坐标系 mOn 内的图像（图 2），易知方

程①、②的公共解是 $m=2,n=0$，或 $m=-2,n=4$.(经验证，两组解都适合方程①和②). 所以 $m+n=2$.

解法 2：因为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(m+2,n)-(m-2,n-4)=(4,4)$，

所以
$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=4\sqrt{2}.$$
因为
$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b},$$
所以
$$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(4\sqrt{2})^2=32, \tag{①}$$
又
$$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=8, \tag{②}$$
解①、②联立的方程组，得
$$\begin{cases}|\boldsymbol{a}|=4\\|\boldsymbol{b}|=4\end{cases},$$
即
$$\begin{cases}\sqrt{(m+2)^2+n^2}=4\\\sqrt{(m-2)^2+(n-4)^2}=4\end{cases}.$$
解得
$$\begin{cases}m=2\\n=0\end{cases},\text{或}\begin{cases}m=-2\\n=4\end{cases}.$$
所以
$$m+n=2.$$

12. 答案：$\frac{19}{48}$.

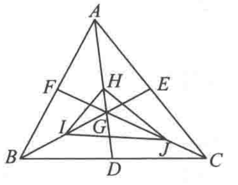
图 3

解：如图 3，根据中线的性质及题设条件，可知

$$\frac{GI}{GB}=\frac{GB-IB}{GB}=1-\frac{IB}{GB}=1-\frac{\frac{1}{3}BE}{\frac{2}{3}BE}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{GH}{GA}=\frac{GA-HA}{GA}=1-\frac{HA}{GA}=1-\frac{\frac{1}{2}AD}{\frac{2}{3}AD}=\frac{1}{4},$$

$$\frac{GJ}{GC}=\frac{GC-JC}{GC}=1-\frac{JC}{GC}=1-\frac{\frac{1}{4}CF}{\frac{2}{3}CF}=\frac{5}{8}.$$

由 $S_{\triangle}=\frac{1}{2}ab\sin 2C$，得

$$\frac{S_{\triangle HGI}}{S_{\triangle AGB}}=\frac{\frac{1}{2}GH\cdot GI\cdot\sin\angle HGI}{\frac{1}{2}AG\cdot BG\cdot\sin\angle AGB}=\frac{GH\cdot GI}{AG\cdot BG}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8},$$

$$\frac{S_{\triangle HGJ}}{S_{\triangle AGC}}=\frac{\frac{1}{2}GH\cdot GJ\cdot\sin\angle HGJ}{\frac{1}{2}AG\cdot CG\cdot\sin\angle AGC}=\frac{GH\cdot GJ}{AG\cdot CG}=\frac{1}{4}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{32},$$

$$\frac{S_{\triangle IGJ}}{S_{\triangle GBC}}=\frac{\frac{1}{2}GI\cdot GJ\cdot\sin\angle IGJ}{\frac{1}{2}GB\cdot GC\cdot\sin\angle BGC}=\frac{GI\cdot GJ}{GB\cdot GC}=\frac{1}{2}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{16}.$$

因为 $$S_{\triangle AGB}=S_{\triangle BGC}=S_{\triangle CGA}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}=\frac{2}{3},$$

所以 $$S_{\triangle HIJ}=S_{\triangle HGI}+S_{\triangle HGJ}+S_{\triangle IGJ}=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{8}+\frac{5}{32}+\frac{5}{16}\right)=\frac{19}{48}.$$

13. 答案：54.

解：由 $a+b+c=12$，得 $$a+c=12-b,$$

代入 $$ab+bc+ca=45 \text{ 的变形式 } b(a+c)+ca=45,$$

得 $$b(12-b)+ca=45, ca=b^2-12b+45.$$

又 $$ca\leqslant\left(\frac{c+a}{2}\right)^2=\left(\frac{12-b}{2}\right)^2,$$

所以 $$b^2-12b+45\leqslant\left(\frac{12-b}{2}\right)^2,$$

即 $$b^2-8b+12\leqslant 0, \text{解得 } 2\leqslant b\leqslant 6,$$

于是 $$abc=(b^2-12b+45)b=(b-3)^2(b-6)+54\leqslant 54.$$

所以，当 $a=3,b=6,c=3$，或 $a=6,b=3,c=3$，或 $a=3,b=3,c=6$ 时，abc 取得最大值 54.

14. 答案：-4.

解：因为 $C: x^2+(y-1)^2=r^2$ 与 $y=\sin x$ 的图像有唯一交点，所以交点是它们的切点 $A(\alpha,\sin\alpha)$，且在切点处它们有相同的切线.

因为 $y=\sin x$ 在 $x=\alpha$ 处的切线的斜率 $k=(\sin x)'|_{x=\alpha}=\cos\alpha$，

又 过点 A 和点 $C(0,1)$ 的直线的斜率 $k_{AC}=\frac{\sin\alpha-1}{\alpha}$，

因为 圆 C 在点 A 处的切线和直线 AC 垂直，

所以 圆 C 在 $x=\alpha$ 处切线的斜率为 $-\frac{1}{k_{AC}}=-\frac{\alpha}{\sin\alpha-1}$，

故 $$-\frac{\alpha}{\sin\alpha-1}=\cos\alpha, \text{即 } \sin 2\alpha-2\cos\alpha=-2\alpha.$$

于是 $$\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha-4\cos^2\alpha}{\alpha\cos\alpha}=\frac{2\sin 2\alpha\cos\alpha-4\cos^2\alpha}{\alpha\cos\alpha}=\frac{2(\sin 2\alpha-2\cos\alpha)}{\alpha}=-4.$$