普通高等教育“十二五”规划教材（高职高专教育）

高等数学

GAODENG SHUXUE

陈翔英　霍小江　主编

熊霄　翟美玲　史成堂　吴翰青　鄢青云　副主编

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材（高职高专教育）

高等数学

GAODENG SHUXUE

主　编　陈翔英　霍小江
副主编　熊　霄　翟美玲　史成堂　吴翰青
　　　　鄢青云
编　写　任　晔　李玉凯　万育红　高晨静
　　　　应六英　涂继平　秦建国
主　审　张宏伟

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

内 容 提 要

本书为普通高等教育“十二五”规划教材（高职高专教育）。全书共十章，包括函数 极限 连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程、拉普拉斯变换、无穷级数、线性代数及其应用和概率初步等内容。每章配有习题和复习题，习题答案直接附于习题之后仅供参考。附录配有初等数学常用公式、不定积分表、标准正态分布表等。本书以“注重实际应用”为编写原则，在内容选取上以“必需、够用”为度，循序渐进，符合学生心理特征和认知、技能养成规律。

本书可作为高职高专、成人教育及同类学校各专业的高等数学教材，也可作为其他各类院校学生的自学用书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/陈翔英，霍小江主编．—北京：中国电力出版社，2014.8

普通高等教育“十二五”规划教材．高职高专教育

ISBN 978-7-5123-6306-9

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①陈…②霍…　Ⅲ．①高等数学—高等职业教育—教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 181571 号

中国电力出版社出版、发行

（北京市东城区北京站西街 19 号　100005　http://www.cepp.sgcc.com.cn）

北京市同江印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

2014 年 8 月第一版　　2014 年 8 月北京第一次印刷

787 毫米×1092 毫米　16 开本　16 印张　388 千字

定价 **32.00** 元

前　言

在多年教学研究与实践的基础上，借鉴加拿大职业技术教育理念，由郑州电力高等专科学校王家德教授任主编、数学教研室教师共同参编的《技术数学》，于2001年首次公开出版。其后，经过一年多的教学实践，对该教材进行了扩编，将其划分为上、下两册再版发行。

随着高校的扩招，各校学生专业跨度大、文化程度参差不齐、基础理论薄弱、工学与文理兼收带来的矛盾日益突出，而数学作为高等职业技术教育的一门必修基础课，其内容涉及工学、经济学、管理学及社会学等诸多学科。为了适应新形势的教学需求，以及不同程度学生的自我提升意愿，以《技术数学》为蓝本，由郑州电力高等专科学校为主，联合江西电力职业技术学院，郑州轻工业学院共同编写了《高等数学》一书。

该书在遵循"以应用为目的，以必需、够用为度"原则的基础上，同时借鉴澳大利亚TAFE教育模式，延续《技术数学》的"广、浅、新"特色，以"联系实际，注重应用，淡化理论，提高能力"为主旨，在满足教学基本要求的基础上，注意拓宽范围以适应多专业（包括中澳合作办学各专业）的需求。在内容选择上，除保证必要的系统性外，最大限度地保持课程内容的应用性与针对性；在基本概念上，注重从实际问题引入，抽象出概念后，再回到实际应用中；在理论证明与推导中，不过分追求内容的严密性；在教学实施中，教师可根据实际情况有选择地组合与取舍内容，适时加强与实际应用联系较多的基础知识的渗透，使学生能够灵活运用本课程的知识与方法解决实际（工程、经济和社会等）问题，从而提高学生分析问题、解决问题的能力。

本书由郑州电力高等专科学校陈翔英、霍小江任主编，郑州电力高等专科学校熊霄、翟美玲、史成堂，江西电力职业技术学院吴翰青、鄢青云任副主编，郑州电力高等专科学校任晔、李玉凯、万育红、高晨静，江西电力职业技术学院应六英、涂继平，郑州轻工业学院秦建国编写。全书由陈翔英、霍小江统稿，河南工业大学张宏伟教授主审。

本教材在组织编写和出版过程中，得到了中国电力出版社及郑州电力高等专科学校领导的大力支持与帮助，郑州电力高等专科学校国际教育部主任郭卫同志对本教材的编写给予了高度关注，并提供了大量具有建设性的意见。张宏伟教授提出了许多宝贵的修改意见。他们为本教材的顺利出版付出了辛勤的劳动，我们在此表示由衷的感谢！同样，在编写过程中编者们参考了本领域诸多教材和著作，引用了国内外部分文献和相关资料，我们在此一并对作者表示诚挚的谢意和致敬。

限于时间及编者水平，书中疏漏之处在所难免，敬请专家、同行和广大读者批评指正。

编　者

2014年6月

目 录

第一章　函数　极限　连续

教学目的

理解函数、分段函数、复合函数和初等函数的概念；
理解数列极限、函数极限的概念，熟练掌握求极限的方法；
掌握极限的运算法则；
熟练掌握两个重要极限；
理解无穷小与无穷大的概念；
理解函数的连续性概念，会求间断点并知道其类型；
了解闭区间上连续函数的性质．

数学大致分为初等数学与高等数学两部分，初等数学基本上是常量的数学，高等数学则是变量的数学．中学数学研究的主要是初等数学，今后我们将要学习的是高等数学．

本书的内容主要包括高等数学中的一元函数微积分、常微分方程、级数、线性代数与概率统计，以及积分变换中的 Laplace 变换．下面首先简要回顾函数的相关知识，然后重点介绍极限与连续的基本理论．

第一节　函　　数

学习目标

理解函数的概念、性质与常用的表示方法，并会求函数的定义域；
熟练掌握基本初等函数的图像、性质和定义域；
理解复合函数的概念及其复合过程；
了解初等函数的概念；能够建立简单实际问题的函数关系．

一、函数的概念

在观察自然现象或工程实际问题时，我们经常发现有几个变量在变化，这些变量之间并不是彼此孤立的，而是相互制约的．这些变量是怎么变化的？它们之间有何联系？存在什么规律？怎样找到这些规律，从而达到人们了解、掌握规律的目的，这些正是高等数学所要研究和解决的问题．本章只讨论两个变量的情况，请看下面几个实例．

例 1-1（风能密度问题）　我国风能资源丰富，具有良好的开发前景．据最新风能资源普查成果显示，我国陆上离地 10m 高度风能资源总储量约 43.5 亿 kW，其中技术可开发量为 2.97 亿 kW. 在风电场选址时，某地点的风能资源潜力大小，通常由该地常年平均风能密度（风机叶轮一定时间内扫过单位面积的风能）的大小决定，即选择风能密度较高的地方建场. 对风力发电机来说，风能密度 W（其单位为 W/m^3）与风速 V 的关系为 $W=\frac{1}{2}\rho V^3$，其中 ρ

为空气密度（其单位为 kg/m^3）. 在标准情况下，$\rho = 1.225$.

例 1-2 由实验测得某金属轴在不同温度 t（℃）下的长度 l(m) 数据如表 1-1 所示 .

表 1-1

t（℃）	10	20	30	40	50
l（m）	1.000 12	1.000 24	1.000 35	1.000 48	1.000 61

此表显示了温度 t 与长度 l 之间的相互依赖关系 .

例 1-3 某个变量 x 与 y 有如图 1-1 所示的依赖关系 .

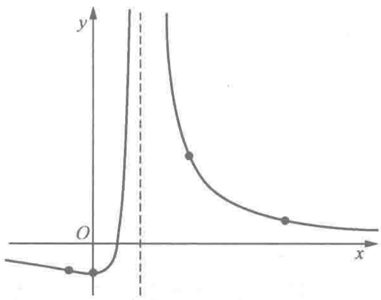


图 1-1

上面三个实例的实际意义虽然不同，但它们有共同之处：每个实例都出现了两个变量，当其中一个变量在一定范围内取定一个数值后，按照一定的规则，另一个变量有唯一确定的数值与之相对应 . 两个变量的这种对应关系，在数学上就是函数的概念 .

1. 函数的定义

定义 1.1 设有两个变量 x 和 y ，D 为一非空实数集，如果对于数集 D 中的每一个确定的 x ，按照某种对应法则 f ，都有唯一确定的 y 与之对应，则称 y 是定义在集合 D 上的关于 x 的**函数**，记作 $y = f(x)$. 其中，集合 D 称为函数的**定义域**，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，f 称为**对应法则** .

如果对于自变量 x 的某个确定值 x_0 ，因变量 y 对应的值，就称为函数在 x_0 处的函数值，也称该函数在 x_0 处有定义，记作

$$y\big|_{x=x_0} ，f(x_0) \text{ 或 } f(x)\big|_{x=x_0}.$$

当 x 取遍定义域 D 中的每个数值时，对应的函数值的全体组成的数集

$$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数的**值域** .

例 1-4 设函数 $f(x) = x^3 - 2x + 3$ ，求 $f(1)$ ，$f(t^2)$.

解 $f(1) = 1^3 - 2 \times 1 + 3 = 2$；$f(t^2) = (t^2)^3 - 2(t^2) + 3 = t^6 - 2t^2 + 3$.

由例 1-4 可以看出：函数定义中的对应规则 f ，就像一个系统，给定定义域中的任何一个 x 值作为输入，通过系统转换成为值域内的一个函数值 y 作为输出，如图 1-2 所示 .

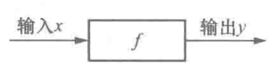


图 1-2

2. 函数的两个要素

定义域 D 和对应法则 f 唯一确定函数 $y = f(x)$，故定义域与对应法则称为函数的两个要素，函数的两个要素是区分不同函数的唯一依据 . 因此，对于两个函数来说，当且仅当它们的定义域和对应法则分别相同时，才表示同一函数 . 而与自变量及因变量用什么字母表示无关 . 例如函数 $y = x^2$ 和函数 $v = t^2$ 其实是同一个函数 .

正因为如此，我们在给出一个函数时，一般都应标明其定义域，它就是自变量取值的允许范围，例如 $y = x^2$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$. 在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的 . 若不考虑函数的实际意义，而抽象的研究用解析式表达的函数，则规定函数的定义域是使解析式有意义的一切实数值 .

通常求函数的定义域应注意：分式函数的分母不能为零、偶次根式的被开方式必须大于等于零、对数函数的真数必须大于零等．

满足不等式 $|x-x_0|<\delta$（δ 为大于 0 的常数）的一切 x 称为点 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$．在几何上表示以 x_0 为中心，δ 为半径的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$，即 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$，如图 1-3（a）所示，不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 称为点 x_0 的 δ 去心邻域（或空心邻域），记作 $U(\hat{x}_0,\delta)$，如图 1-3（b）所示．

图 1-3

函数 $y=f(x)$ 的对应法则 f 也可以用 φ，h，F 等表示，相应的函数就记作 $\varphi(x)$，$h(x)$，$F(x)$．

例 1-5　判断下列函数是否是相同的函数．

(1) $y=1$ 与 $y=\dfrac{x}{x}$；　　(2) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$．

解　(1) 因为函数 $y=1$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，而函数 $y=\dfrac{x}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，所以不是同一个函数．

(2) 因为函数 $y=\ln x^2$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而函数 $y=2\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，所以不是同一个函数．

例 1-6　确定函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$ 的定义域．

解　显然，其定义域是满足不等式 $x^2-2x-3>0$ 的 x 值的全体，解此不等式，得定义域 $x<-1$ 或 $x>3$．

例 1-7　确定函数 $f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}+\ln(x-2)$ 的定义域．

解　该函数的定义域需满足 $\begin{cases}3+2x-x^2\geqslant 0\\ x-2>0\end{cases}$，解该不等式组，得定义域 $2<x\leqslant 3$．

有时会遇到给定一个 x 值，对应多个 y 值的情形，这种函数我们称为**多值函数**，而定义 1.1 中所述的函数称为**单值函数**．本书主要讨论单值函数．

3. 函数的表示方法

函数的表示法通常有三种：公式法（解析法）、图示法和表格法．

(1) 以解析式表示函数的方法叫做函数的公式法（见例 1-1）．在高等数学中，函数主要用公式法表示．

(2) 用图形表示函数的方法叫做函数的图示法（见例 1-3）．这种方法在工程技术上应用较普遍，图示法的优点是直观形象，易看出函数的变化趋势．

(3) 以表格形式表示函数的方法叫做函数的表格法（见例 1-2）．它是将自变量的值与对应的函数值列为表格，如三角函数表、对数表、企业历年产值表等．

实际中，有时会遇到一个函数在定义域的不同范围内用不同的解析式来表示的情形，将这样表示的函数称为分段函数．

应该注意的是：分段函数是一个函数，而不是几个函数．它的定义域是各段定义区间的

并集．求分段函数的函数值，应将自变量的值代入其所属区间的对应表达式，进行计算．

例如 $f(x)=\begin{cases}-1,x<0\\ 0,x=0\\ 1,x>0\end{cases}$ 称为符号函数，记作 sgn$x$．函数图像如图 1-4 所示；又如 $y=|x|=\begin{cases}x,x\geqslant 0\\ -x,x<0\end{cases}$ 称为绝对值函数，函数图像如图 1-5 所示．

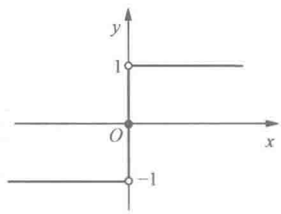


图 1-4

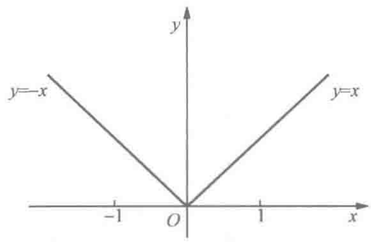


图 1-5

例 1-8 电子技术中的一种脉冲波如图 1-6 所示，试用公式法表示图中电压 u 和时间 t 的函数关系．

解 由图 1-6 可知，这是一个分段函数，电压 u 和时间 t 的关系为

$$u=\begin{cases}0,\ t<-\dfrac{\tau}{2}\\ u_0,\ -\dfrac{\tau}{2}\leqslant t\leqslant\dfrac{\tau}{2}.\\ 0,\ t>\dfrac{\tau}{2}\end{cases}$$

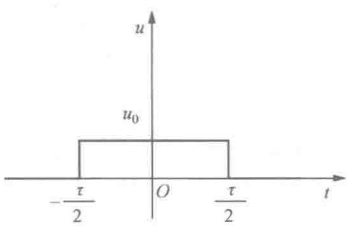


图 1-6

例 1-9（个人所得税问题） 现行个人所得税纳税标准是以月收入 3500 元为起征额，超额部分纳税标准如表 1-2 所示．试建立应缴税款 y 和月收入 x 之间的关系．

表 1-2 **个人所得税纳税标准**

级　别	全月应纳税所得额	税　率　(%)
1	不超过 1500 元的部分	3
2	超过 1500 元至 4500 元的部分	10
3	超过 4500 元至 9000 元的部分	20
4	超过 9000 元至 35 000 元的部分	25
5	超过 35 000 元至 55 000 元的部分	30
6	超过 55 000 元至 80 000 元的部分	35
7	超过 80 000 的部分	45

解 由表 1-2 容易得到应缴税款 y 和月收入 x 之间的关系为

$$y=\begin{cases}0,\ 0\leqslant x\leqslant 3500\\(x-3500)\times 3\%,\ 3500<x\leqslant 5000\\(x-5000)\times 10\%+45,\ 5000<x\leqslant 8000\\(x-8000)\times 20\%+345,\ 8000<x\leqslant 12\,500\\(x-12\,500)\times 25\%+1245,\ 12\,500<x\leqslant 38\,500\\(x-38\,500)\times 30\%+7745,\ 38\,500<x\leqslant 58\,500\\(x-58\,500)\times 35\%+13\,745,\ 58\,500<x\leqslant 83\,500\\(x-83\,500)\times 45\%+22\,495,\ x>83\,500\end{cases}.$$

设某人月收入为 8600 元，则其应缴税款为 $(8600-8000)\times 20\%+345=465$ 元．

假设 x 为应纳税所得额（月收入－3500），那么应缴税款 y 与 x 之间的关系又如何？

通常还会遇到一类函数，自变量 x 与函数 y 的对应关系是用方程 $F(x,y)=0$ 确定的，这种函数称为**隐函数**．如方程 $xy-e^{x+y}=0$ 确定了一个隐函数 $y=f(x)$．

相对于隐函数，我们前面研究的形如 $y=f(x)$ 的函数就称为**显函数**．

二、反函数

定义 1.2　设 $y=f(x)$ 是定义在 D 上的函数，其值域为 W．若对于数集 W 中的每个数 y，数集 D 中都有唯一的一个数 x 使 $f(x)=y$，这就是说变量 x 是变量 y 的函数，这个函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$．其定义域为 W，值域为 D.

函数 $y=f(x)$ 与函数 $x=f^{-1}(y)$ 二者的图形是相同的．

由于人们习惯于用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，为了照顾习惯，我们将函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$. 用 $y=f^{-1}(x)$ 表示．注意，这时人为作了 $(x,y)\leftrightarrow(y,x)$ 的对换，这时二者的图形关于直线 $y=x$ 对称，如图 1-7 所示．

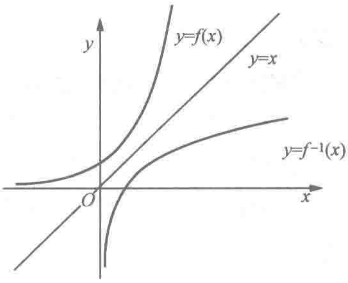


图 1-7

由函数 $y=f(x)$ 求它的反函数的步骤是：由方程 $y=f(x)$ 解出 x，得到 $x=f^{-1}(y)$，将函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 和 y 分别替换为 y 和 x，这样，得到反函数 $y=f^{-1}(x)$．

例 1-10　求函数 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数．

解　由 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 可解得 $x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$，交换 x 和 y 的位置，即得所求反函数 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$，其定义域为 $(0,1)$．

三、函数的基本性质

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，如果对于定义域中的任何 x，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；如果有 $f(x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**．注意奇（偶）函数必须是在关于原点对称的区间上讨论．不是偶函数也不是奇函数的函数，称为**非奇非偶函数**．例如 $y=\sin x, x\in[0,2\pi]$ 为非奇非偶函数．

例 1-11　判断函数 $f(x)=\sin x^3$ 的奇偶性．

解　因为 $f(x)=\sin x^3$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且有

$$f(-x)=\sin(-x)^3=-\sin x^3=-f(x).$$

所以该函数为奇函数.

2. 周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，若存在正数 T，使得对于一切实数 x，都有：$f(x+T)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为**周期函数**. T 称为 $f(x)$ 的**周期**.

对于每个周期函数来说，定义中的 T 有无穷多个，这是因为如果 $f(x+T)=f(x)$，那么就有

$$f(x+2T)=f[(x+T)+T]=f(x+T)=f(x);$$

$$f(x+3T)=f[(x+2T)+T]=f(x+T)=f(x),$$

等等. 因此我们规定：若其中存在一个最小正数 a，则规定 a 为周期函数 $f(x)$ 的最小正周期，简称周期.

如果函数 $y=f(x)$ 是以 ω 为周期的周期函数，那么函数 $y=f(ax)(a>0)$ 是以 $\frac{\omega}{a}$ 为周期的周期函数. 例如 $y=\sin x, y=\cos x$ 均以 2π 为周期，所以 $y=\sin 2x, y=\cos\frac{x}{2}$ 的周期分别为 π 和 4π.

3. 单调性

设 x_1 和 x_2 为区间 (a,b) 内的任意两个数. 若当 $x_1<x_2$ 时，函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x_1)<f(x_2)$，则称该函数在区间 (a,b) 内**单调递增**；若当 $x_1<x_2$ 时有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称该函数在区间 (a,b) 内**单调递减**. 例如，$y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内递增，$y=\cot x$ 在 $(0,\pi)$ 内递减.

单调递增和单调递减的函数统称为**单调函数**.

4. 有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在一个正数 M，当 $x\in I$ 时，恒有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 I 上**有界**；如果这样的正数 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**无界**.

例如，当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$，故函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界. 又如 $y=\sin\frac{1}{x}$，$y=\arctan x$ 在它们的定义域内有界，而 $y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内无界.

四、初等函数

1. 基本初等函数

常数函数　$y=C$

幂函数　$y=x^{\mu}$（μ 为常数）

指数函数　$y=a^x(a>0, a\neq 1, a$ 为常数$)$

对数函数　$y=\log_a x(a>0, a\neq 1, a$ 为常数$)$

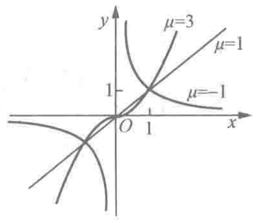
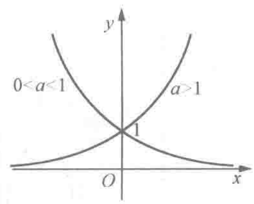
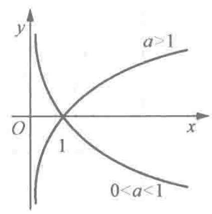
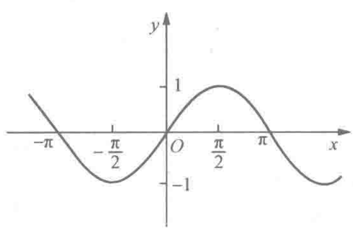
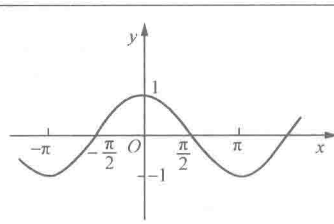
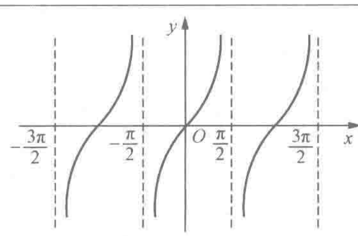
三角函数　$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$

反三角函数　$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

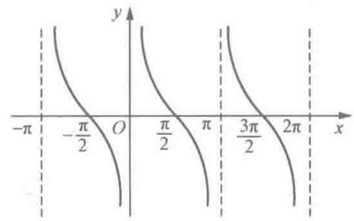
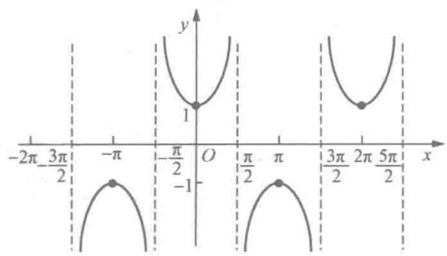
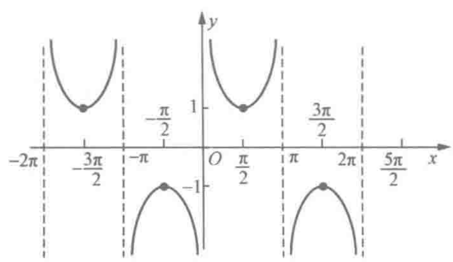
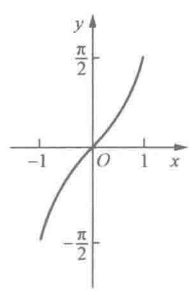
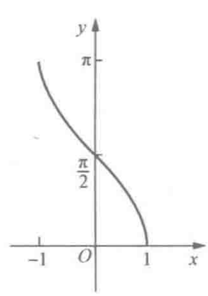
以上六类函数统称为**基本初等函数**，常用的基本初等函数的定义域、值域、图像和性质

如表 1-3 所示．

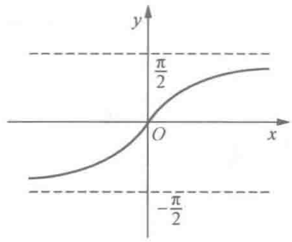
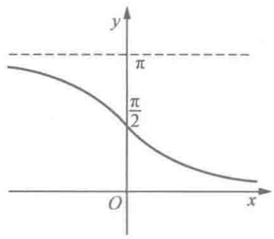
表 1-3

函数	定义域和值域	图像	性质
幂函数 $y=x^{\mu}$	定义域 D 随 μ 值不同而不同，但无论 μ 取何值，总有 $D\supset(0,+\infty)$，且图形总过 $(1,1)$ 点		当 $\mu>0$ 时，函数在第一象限单调递增； 当 $\mu<0$ 时，函数在第一象限单调递减
指数函数 $y=a^{x}$ $(a>0,a\neq1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		过点 $(0,1)$ 当 $a>1$ 时，单调递增； 当 $0<a<1$ 时，单调递减
对数函数 $y=\log_{a}x$ $(a>0,a\neq1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		过点 $(1,0)$ 当 $a>1$ 时，单调递增； 当 $0<a<1$ 时，单调递减
三角函数　正弦函数 $y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期为 2π，有界
三角函数　余弦函数 $y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期为 2π，有界
三角函数　正切函数 $y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为 π，单调递增

续表

函数		定义域和值域	图像	性质
三角函数	余切函数 $y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为 π，单调递减
	正割函数 $y=\sec x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ $\|y\|\geqslant 1$		偶函数，周期为 2π
	余割函数 $y=\csc x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $\|y\|\geqslant 1$		奇函数，周期为 2π
反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数，有界，单调递增
	反余弦函数 $y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		有界，单调递减

续表

函数		定义域和值域	图像	性质
反三角函数	反正切函数 $y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数，有界，单调递增
	反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		有界，单调递减

2. 复合函数

引例 商店的销售利润 y 是销售收入 u 的函数 $y=f(u)$，而销售收入 u 又是销售量 x 的函数 $u=g(x)$，从而，对每一个 x 通过 u 总有确定的 y 与之相对应，即 $y=f[g(x)]$.

定义 1.3 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_1，值域 $W_1=\{u\,|\,u=\varphi(x),x\in D_1\}$. 若 $D\cap W_1\neq\Phi$，则称由 x 经过 u 到 y 的函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为由 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，u 称为**中间变量**.

例 1-12 试求函数 $y=u^2$ 与 $u=\cos x$ 构成的复合函数.

解 将 $u=\cos x$ 代入 $y=u^2$ 中，得复合函数 $y=\cos^2 x$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

例 1-13 写出下列复合函数的复合过程.

(1) $y=\sqrt{\sin\frac{x}{2}}$； (2) $y=e^{\sin\sqrt{x^2+1}}$.

解 (1) 该函数由 $y=\sqrt{u}$，$u=\sin v$ 和 $v=\frac{x}{2}$ 复合而成；

(2) 该函数由 $y=e^u$，$u=\sin v$，$v=\sqrt{w}$ 和 $w=x^2+1$ 复合而成.

3. 初等函数

定义 1.4 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合构成，并且可以用一个解析式表示的函数，叫做**初等函数**.

例如 $y=\sqrt{\ln 5x-3^x+\sin^2 x}$，$y=\dfrac{\sqrt[3]{2x}+\tan 3x}{x^2\sin x-2^{-x}}$ 都是初等函数，不能用一个解析式表示的函数都不是初等函数，如分段函数.

五、经济函数

在经济学中经常用到以下一些函数.

1. 成本函数

在微观经济学中，成本也叫生产费用，是指生产活动所使用的生产要素的价格．我们要讨论总成本和平均成本两个概念．

设 C 为总成本，C_1 为固定成本，C_2 为可变成本，$\overline{C}$ 为平均成本，Q 为产量，则总成本函数为

$$C=C(Q)=C_1+C_2(Q).$$

固定成本主要包括生产设备折旧、工人工资及一些不变的因素．可变成本主要包括原材料费、水电费、工人的工资奖金、库存费用及贷款利息等因产量变化而变化的因素．

平均成本函数为

$$\overline{C}=\overline{C}(Q)=\frac{C_1}{Q}+\frac{C_2}{Q}.$$

平均成本函数即为生产每个单位产品所需要的费用．平均成本会因为生产地点、批量大小及人员工资水平等因素的变化而变化．例如发达国家把工厂迁移到其他国家，即可赚取廉价劳动力所剩余的资金，从而使生产成本降低，利润增加；另外，大批量连续生产也可以降低成本．

2. 价格函数

商品的价格与市场的供求情况有非常密切的关系．一般来说，价格是销售量的函数．设 P 为价格，Q 为销售量，则价格函数为

$$P=P(Q).$$

3. 需求函数

在市场上，商品的需求情况也影响着价格的定位，同时商品的价格又直接影响着市场的需求情况．有时，我们也把需求量看做是价格的函数．一般的，需求量是随着价格的提高而减少的．需求函数为

$$Q=Q(P).$$

需求函数与价格函数互为反函数．

例 1-14 设某批发站批发 10 000 只某种牌号的手表给零售商时，该种手表的定价为 70 元，若批发站每次多批发 3000 只该种手表，市场上该种手表的价格就相应地降低 3 元．现批发站最多只能批发 20 000 只手表给零售商，最小销量为 10 000 只．试求销售量对价格的影响（即价格函数）．

解 设 Q 代表手表总销售量，则 $Q\in[10\ 000,20\ 000]$．多销售 $(Q-10\ 000)$ 只，按每多销售 3000 只，价格相应减少 3 元的比例，价格相应减少 $3\times\dfrac{Q-10\ 000}{3000}$ 元．故价格函数为

$$P=70-3\times\frac{Q-10\ 000}{3000},$$

即 $P=70-\dfrac{Q-10\ 000}{1000}=80-\dfrac{Q}{1000}$, $Q\in[10\ 000,20\ 000]$.

4. 收益函数

收益是指生产者出售商品的收益．设 R 为总收益，$\overline{R}$ 为平均收益，则有

总收益函数 $$R=R(Q)=QP(Q),$$

平均收益函数 $\overline{R}=\overline{R}(Q)=\dfrac{R(Q)}{Q}=P(Q)$.

5. 利润函数

收益与成本之差就是利润，设 L 表示利润，则利润函数为

$$L=L(Q)=R(Q)-C(Q).$$

例 1-15 某商店销售某种季节性商品，以 P_1 元的价格购进，在当季可以 P_2 元的价格售出；若过季节，则需以 P_3 元的价格降价售完．求经销该商品的利润函数．

解 经销该商品的利润，在进货量一定的情况下，主要取决于以 P_2 元的价格售出的数量．设以 P_2 元的价格销售的数量为 x 件，利润为 L，下面就两种情况进行讨论．

(1) 在该季节，若供大于求（即 $Q>x$），相应于 P_2 和 P_3 的销售量分别为 x 和 $Q-x$，则

$$L=P_2x+P_3(Q-x)-P_1Q=(P_2-P_3)x+(P_3-P_1)Q.$$

(2) 若供不应求（即 $Q\leqslant x$），则

$$L=P_2Q-P_1Q=(P_2-P_1)Q.$$

所以利润函数为

$$L=\begin{cases}(P_2-P_3)x+(P_3-P_1)Q, & 0\leqslant x<Q\\(P_2-P_1)Q, & Q\leqslant x\end{cases}.$$

6. 单利与复利

利息是使用资金应付出的代价，利率是利息所占本金的百分比，我们熟悉的计息方式主要有单利与复利两种．

(1) 单利：仅按本金计算利息，利息本身不再支付利息的计息方式．

假设本金为 P，年利率为 r，n 年后的本利和为

$$A=P(1+nr)\text{（单利公式）}.$$

例 1-16 若一笔存款本金为 1000 元，年利率为 10%，期限为 3 年，求 3 年后的本利和为多少．

解 由单利公式得 $A=1000\times(1+3\times10\%)=1300$（元），即 3 年后的本利和为 1300 元.

(2) 复利：即本金要逐年计息，利息也要逐年生息，俗称“利滚利”．

假设本金为 P，年利率为 r，n 年后的本利和为

$$F=P(1+r)^n\text{（复利公式）}.$$

例 1-17 某企业进行技术改造向银行借款 10 万元，年利率 5%. 第二年年末还清．按复利计算第二年年末需向银行偿还本利共多少万元？

解 由复利公式得 $F=10\times(1+5\%)^2=11.025$（万元），即第二年年末需向银行偿还本利和共 11.025 万元．

六、建立函数关系举例

在解决实际问题时，通常要先建立问题中的函数关系，然后进行分析和计算．下面举一些简单的实例，说明建立函数关系的过程．

例 1-18 设有一块边长为 a 的正方形薄板，将它的四角各截去一个边长相等的小正方形，四边折起后制作一只无盖盒子，试将盒子的体积表示成小正方形边长的函数，如图 1-8 所示．