

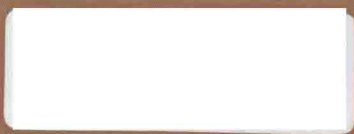


广东省高等学校名牌专业教材  
管理科学与工程类专业应用型本科系列规划教材

# 管理运筹学简明教程

GUANLI YUNCHOUXUE JIANMING JIAOCHENG

◎ 李 军 / 编 著



华南理工大学出版社  
SOUTH CHINA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS



广东省高等学校名牌专业教材  
管理科学与工程类专业应用型本科系列规划教材

# 管理运筹学简明教程

GUANLI YUNCHOUXUE JIANMING JIAOCHENG

◎ 李 军 / 编著



华南理工大学出版社  
SOUTH CHINA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

· 广州 ·

## 内 容 简 介

本书紧紧围绕运筹学的基本理论与方法,用大量的示例介绍各种经济管理运筹模型的构建、求解及应用。以问题为导向,着眼于培养学生运用运筹学原理与方法解决经济管理实际问题的能力,进而实现理论与实践的有机结合。侧重实际应用,对知识的论述强调其经济内涵与管理逻辑,弱化纯数学的论证与推演,将数学的应用保持在中等水平上,让读者将主要的时间和精力集中在分析建模与科学决策上来。在例题和思考题中加大案例的比重,使理论与实践紧密结合,为读者提供清晰的模拟实操环境。

全书共分10章,即绪论、线性规划、运输问题、整数规划、非线性规划\*、动态规划、图论、存贮论\*、排队论\*和博弈论\*。为强化学生对知识的理解与掌握,各章均附有思考题及参考答案;同时,为方便教师选用,课程学习网站(网址: <http://dept.wyu.cn/glycx>) 配套提供PPT及其他教学资源。

本书可作为普通高校经济管理类专业本科生、研究生(含工程硕士或专业硕士)学习“管理运筹学”的教材或参考书,亦可作为企业管理人员、工程技术人员和国家公务员培训的教材或自学参考书。

### 图书在版编目(CIP)数据

管理运筹学简明教程/李军编著. —广州:华南理工大学出版社,2015.8  
管理科学与工程类专业应用型本科系列规划教材  
ISBN 978-7-5623-4715-6

I. ①管… II. ①李… III. ①管理学-运筹学-高等学校-教材 IV. ①C931.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第176397号

### 管理运筹学简明教程

李 军 编 著

---

出 版 人: 韩中伟

出版发行: 华南理工大学出版社

(广州五山华南理工大学17号楼, 邮编510640)

<http://www.scutpress.com.cn> E-mail: [scutc13@scut.edu.cn](mailto:scutc13@scut.edu.cn)

营销部电话: 020-87113487 87111048 (传真)

策划编辑: 潘宜玲 胡 元

责任编辑: 胡 元

印 刷 者: 广州市穗彩印务有限公司

开 本: 787mm×1092mm 1/16 印张: 18.5 字数: 505千

版 次: 2015年8月第1版 2015年8月第1次印刷

定 价: 36.00元

---

版权所有 盗版必究 印装差错 负责调换

# 前言

随着全球经济一体化，企业的市场环境变化越来越快、越来越复杂，竞争也越来越激烈，企业要想在充满无穷变数与风险的市场上求得生存与发展，就必须能够及时地对所面临的机遇与挑战做出科学的决策。这就要求企业管理者和工程技术人员能够驾驭科学决策技术，有效地解决生产经营中所出现的各种实际问题。

目前，管理运筹学在经济管理活动中应用的广度和深度令人吃惊，其地位越来越重要，对科学决策的关键作用越来越显著。它所提供的决策方法和技术，不仅可以帮助企业解决战术层面上的问题，以降低成本或提高利润；而且可以帮助企业解决战略层面上的问题，使企业建立并保持长久的竞争优势。管理运筹学的基本理论和方法已成为广大管理人员和工程技术人员必须掌握的基础知识之一。

高等教育从精英教育转向大众教育，尤其是普通地方高校明确的应用型人才培养定位，使作为专业基础课程的管理运筹学教学面临巨大的挑战。如何从实际应用出发构建“管理运筹学”教学新体系，以适应应用型人才培养的需要，是摆在管理运筹学教育工作者面前一个新的课题。作者在吸收众家之长的基础上，结合自身积累的教学经验、教研成果和教学素材，构建了管理运筹学教学新体系，针对教学中学生普遍存在的难点问题，进行全新的论述并充实一定量的思考题，充分体现应用型人才培养的定位。

本书作为管理运筹学教学的基础性教材，没有过多追求内容体系的完整性，而是以知识点的精确论述，实现应用能力的培养，目的是空出版面以增加案例的数量和案例分析、求解的详细程度，以更好地满足读者的需要。管理运筹学需要以微积分、线性代数、概率论与数理统计等高等数学的知识为基础，本书始终把数学的应用保持在中等水平，对知识的论述强调经济内涵与管理逻辑，避免为追求所谓的精密而陷入复杂的纯数学的论证，解决学生长期以来“管理运筹学”课程难学、教材难读的问题。

全书共分10章，其中带有“\*”号的第5章（非线性规划）、第8章（存贮论）、第9章（排队论）和第10章（博弈论）属“管理运筹学”的高级内容，主要面向研究生，本科生可根据具体的课时安排选用。本书在编著过程中参考了大量国内、外的图书文献，吸收了参考文献中大量的营养成分，丰富的营养成分是本书健康诞生所不可缺少的。此外，多方的关心和支持也是圆满完成本书编著工作的重要保证。在此，向提供意见和建议的专家、学者，以及所有参考文献的作者表示衷心的感谢。

由于受作者知识水平和学术视野的局限，书中难免存在一些这样或那样的缺点和不足，热诚欢迎广大读者批评指正。

作者

2015年6月

# 目 录

1 绪 论 .....	1
1.1 运筹学的内涵 .....	1
1.1.1 英国运筹学会给出的定义 .....	1
1.1.2 美国运筹学会给出的定义 .....	1
1.1.3 《中国企业管理百科全书》给出的定义 .....	1
1.1.4 本书给出的综合性定义 .....	2
1.2 运筹学的产生与发展 .....	2
1.2.1 运筹学的产生 .....	2
1.2.2 运筹学的发展 .....	3
1.3 运筹学的应用特点和研究方法 .....	4
1.3.1 运筹学的应用特点 .....	4
1.3.2 运筹学的研究方法 .....	5
1.4 运筹学模型 .....	5
思考题 1 .....	6
2 线性规划 .....	7
2.1 线性规划的数学模型 .....	7
2.2 线性规划的求解 .....	10
2.2.1 线性规划的图解法 .....	11
2.2.2 线性规划的单纯形法 .....	15
*2.3 线性规划的对偶理论 .....	29
2.3.1 对偶问题的提出 .....	29
2.3.2 对偶单纯形法 .....	31
2.3.3 灵敏度分析 .....	33
思考题 2 .....	41
3 运输问题 .....	47
3.1 运输问题的数学模型 .....	47
3.2 运输问题的求解 .....	48
3.2.1 确定初始基可行解 .....	48
3.2.2 基可行解的最优性检验 .....	55
3.2.3 运输方案的优化 .....	58
3.3 运输问题的拓展 .....	58
3.3.1 产大于销的运输问题 .....	58
3.3.2 销大于产的运输问题 .....	59
思考题 3 .....	60

4	整数规划 .....	66
4.1	分枝定界法 .....	66
4.2	0-1 型整数规划 .....	70
4.3	指派问题 .....	73
4.3.1	指派问题的数学模型 .....	73
4.3.2	指派问题的求解 .....	74
4.3.3	指派问题的拓展 .....	77
	思考题 4 .....	78
*5	非线性规划 .....	82
5.1	非线性规划的数学模型 .....	82
5.1.1	非线性规划问题 .....	82
5.1.2	非线性规划的数学模型 .....	83
5.1.3	非线性规划问题解的图示 .....	83
5.2	极值问题 .....	84
5.2.1	局部极值与全局极值 .....	84
5.2.2	凸函数与凹函数 .....	85
5.3	凸规划 .....	87
5.3.1	凸规划的定义 .....	87
5.3.2	下降迭代算法 .....	88
5.4	一维搜索 .....	89
5.4.1	斐波那契法 .....	89
5.4.2	黄金分割法 .....	92
5.5	无约束极值问题 .....	93
5.5.1	梯度法 (最速下降法) .....	94
5.5.2	牛顿法 .....	96
5.5.3	变尺度法 .....	98
5.6	约束极值问题 .....	100
5.6.1	最优性条件 .....	101
5.6.2	二次规划 .....	105
5.6.3	可行方向法 .....	108
5.6.4	制约函数法 .....	110
	思考题 5 .....	114
6	动态规划 .....	117
6.1	动态规划的基本理论 .....	117

6.1.1	多阶段决策过程的基本概念 .....	117
6.1.2	动态规划的数学模型 .....	119
6.2	确定性动态规划 .....	120
6.2.1	最短路问题 .....	121
6.2.2	资源分配问题 .....	122
6.2.3	存贮控制问题 .....	128
6.2.4	用动态规划求解非线性规划问题 .....	130
6.3	随机性动态规划 .....	131
6.3.1	新产品开发问题 .....	131
6.3.2	原材料采购问题 .....	133
	思考题 6 .....	134
7	图论 .....	139
7.1	引论 .....	139
7.1.1	欧拉 (Euler) 回路问题 .....	139
7.1.2	雷姆塞 (Ramsey) 问题 .....	140
7.1.3	哈密尔顿 (Hamilton) 回路问题 .....	140
7.2	图论的基本概念 .....	141
7.2.1	图的概念 .....	141
7.2.2	点边的关联 .....	141
7.2.3	简单图、完全图与二分图 .....	142
7.2.4	连通与回路 .....	143
7.2.5	部分图与子图 .....	143
7.3	树图 .....	143
7.3.1	树 (tree) .....	144
7.3.2	部分树 (spanning tree) .....	145
7.3.3	最小部分树 (minimal spanning tree) .....	145
7.4	最短路问题 .....	147
7.4.1	Dijkstra 算法 .....	147
7.4.2	Floyd 算法 .....	148
7.5	最大流问题 .....	149
7.5.1	基本概念与基本定理 .....	149
7.5.2	寻求最大流的标号法 .....	151
*7.6	Euler 回路问题 .....	152
*7.7	网络计划技术 .....	154
7.7.1	网络图的绘制 .....	154

7.7.2	网络时间的计算 .....	156
7.7.3	网络的优化与控制 .....	158
	思考题 7 .....	165
*8	存贮论 .....	169
8.1	存贮系统 .....	169
8.2	古典经济采购批量模型 .....	170
8.3	允许缺货的经济批量模型 .....	173
8.4	生产批量模型 .....	174
8.5	允许缺货的生产批量模型 .....	175
8.6	价格有折扣的存贮模型 .....	177
8.7	随机性存贮模型 .....	179
	思考题 8 .....	188
*9	排队论 .....	190
9.1	排队系统 .....	190
9.1.1	排队系统的基本构成 .....	191
9.1.2	排队系统的分类描述 .....	193
9.1.3	排队系统的数量指标 .....	193
9.2	排队系统的数学模型 .....	194
9.2.1	最简单流 .....	194
9.2.2	负指数分布的服务时间 .....	195
9.2.3	生死过程 .....	195
9.2.4	基本模型 .....	197
9.3	马尔科夫排队模型 .....	197
9.4	非马尔科夫排队模型 .....	206
9.4.1	$M/G/1$ 模型 .....	206
9.4.2	$M/D/1$ 模型 .....	207
9.4.3	$M/E_k/1$ 模型 .....	208
9.5	具有优先级的排队模型 .....	209
9.6	排队系统的最优化 .....	211
9.6.1	$M/M/1$ 模型中最优服务率 $\mu^*$ 的确定 .....	211
9.6.2	$M/M/S$ 模型中最优服务台数 $S^*$ 的确定 .....	213
	思考题 9 .....	213



*10 博弈论 .....	217
10.1 引论 .....	217
10.1.1 博弈的基本要素 .....	217
10.1.2 博弈的分类 .....	218
10.2 矩阵博弈 .....	219
10.2.1 纳什均衡 .....	220
10.2.2 绝对均衡 .....	221
10.2.3 多重纳什均衡 .....	224
10.3 零和矩阵博弈 .....	225
10.3.1 零和矩阵博弈的数学模型 .....	225
10.3.2 零和矩阵博弈的纯策略解 .....	225
10.3.3 零和矩阵博弈的混合策略解 .....	227
10.3.4 零和矩阵博弈解的性质 .....	231
10.3.5 零和矩阵博弈的求解方法 .....	232
10.4 动态博弈 .....	239
10.4.1 完美信息动态博弈 .....	239
10.4.2 不完美信息动态博弈 .....	243
思考题 10 .....	245
思考题参考答案 .....	249
参考文献 .....	285

---

# 1 绪 论

---

## 1.1 运筹学的内涵

运筹学是二十世纪三四十年代发展起来的一门具有多学科交叉特点的边缘学科，它主要研究人类对各种资源的运用及筹划活动，以期发挥有限资源的最大效用，从而实现系统最优化目标。对运筹学的认识通常存在两个视角，即以经济管理决策支持为目标的应用型学科管理运筹学和以纯数学系统最优化方法为目标的理论型学科数学运筹学。本书所介绍的运筹学是指前者，即管理运筹学。

运筹学至今还没有一个统一确切的定义，下面列出几种有代表性的定义，以说明运筹学的性质和特点。

### 1.1.1 英国运筹学会给出的定义

Operational Research is the application of the methods of science to complex problems arising in the direction and management of large systems of men, machines, materials and money in industry, business, government, and defense. The distinctive approach is to develop a scientific model of the system, incorporating measurements of factors such as chance and risk, with which to predict and compare the outcomes of alternative decisions, strategies or controls. The purpose is to help management determine its policy and actions scientifically.

中文可翻译为：“运筹学是指应用科学方法，处理工业、商业、政府、国防中因指挥和管理人、机器、原料和资本大系统而产生的复杂问题。这种独特的方法要构建这些系统的科学模式、衡量概率和风险等因素，用它们来预测和比较各种不同的决策、策略或控制的结果。其目的是帮助管理阶层科学地选择他们的策略和行动。”

### 1.1.2 美国运筹学会给出的定义

Operations Research is concerned with scientifically deciding how to best design and operate man-machine systems, usually under conditions requiring the allocation of scarce resources.

中文可翻译为：“运筹学是关于如何实现人机系统最佳设计与最佳运行的科学决策方法，这种决策通常是在要求对短缺资源进行分配的条件下进行的。”

### 1.1.3 《中国企业管理百科全书》给出的定义

运筹学是应用分析、试验、量化的方法，对经济管理系统中人、财、物等有限资源统筹安排，为决策者提供有依据的最优方案，以实现最有效的管理。

### 1.1.4 本书给出的综合性定义

综合以上种种定义,本书从直观、明了的角度,将运筹学定义为:“运筹学是通过构建、求解数学模型,规划、优化有限资源的合理利用,为科学决策提供量化依据的系统知识体系。”

运筹学把有关的运行系统首先归结成数学模型,然后用数学方法进行定量分析和比较,求得合理运用人力、财力和物力的系统运行最优方案。因为资源合理利用问题是普遍存在的问题,所以运筹学有广阔的应用领域,是系统工程学、现代管理科学中的一种基础理论与不可缺少的方法、手段和工具。

## 1.2 运筹学的产生与发展

任何一门学科都是为解决一些实际问题而出现并得以发展的,为了更好地理解和掌握今天的运筹学,有必要首先来了解一下运筹学产生与发展的历史。

### 1.2.1 运筹学的产生

运筹学思想的出现可以追溯到远古,中国古代的《孙子兵法》就是一个典型的例证。在西方,1914年英国工程师兰彻斯特提出兰彻斯特战斗方程;1917年丹麦工程师爱尔朗提出一些等候理论的公式;1920年美国工程师列温逊研究了商业广告和顾客心理问题。虽然运筹学的思想和方法在很久以前已留下应用的痕迹,历代先驱所做的一些工作在今天看来也具有一定的运筹学性质,但这些零散的活动还不足以标志作为系统知识体系的一门新学科的诞生。

可以说,运筹学的产生很难有一个明确的时间界定,目前国际上比较公认的观点是运筹学产生于第二次世界大战前后。“运筹学”这个名词最早出现于1938年,当时波德塞(Bawdsey)雷达站的负责人洛维(Rowe)提出优化防空作战系统运行的问题,以便有效地防备德国飞机入侵,成立了由各领域的科学家组成的研究小组,并用“Operational Research”命名这种研究活动,这就是直至今日仍然将运筹学称为“OR”的历史由来。1939年,从事此方面问题研究的科学家被召集到英国皇家空军指挥总部,成立了一个由物理学家布莱凯特(Blackett)博士领导的11人军事科技攻关小组;因其成员学科性质的多样性,这一最早成立的军事科技攻关小组被戏称为“布莱凯特马戏团”。又由于“布莱凯特马戏团”的活动是第一次有组织的系统的运筹学活动,所以后人将该小组的成立作为运筹学产生的标志。

此后,军事科技攻关小组的活动范围不断扩大,从最初的仅限于空军,逐步扩展到海军和陆军;研究内容也从对军事战术性问题的研究,逐步扩展到对军事战略性问题的研究。由于科学家的天赋、战争的需要以及不同学科的交互作用,这一军事科技攻关小组在提高军事运筹水平方面取得惊人的成功,使得运筹学在整个军事领域迅速传播。至1941年,英国皇家陆海空三军都成立了这样的科学小组。比较典型的论题包括雷达布置策略、反空袭系统控制、海军舰队的编制和对敌潜艇的探测等。军事科技攻关小组巨大成就所显示出的神奇力量,促使其他盟军纷纷效仿,建立自己的研究小组。

## 1.2.2 运筹学的发展

### 1. 运筹学在西方的发展

第二次世界大战期间,运筹学成功地解决了许多重要作战问题,显示了科学的巨大威力,为运筹学后来的发展铺平了道路。战后,美国只用短短5年时间就度过了战争的恢复期,社会经济进入了繁荣发展期。由于社会需求的变化,引导许多从事运筹小组活动的科学家将其精力转向对战时仓促建立起来的运筹优化技术进行加工整理,并探索运用它们解决社会经济问题的可能性。由于经济问题与军事问题在优化方面的相似性,使运筹学很快走向经济领域,在1950年代以后得到广泛的应用和发展,形成了规划论、存贮论、决策论、博弈论、排队论等一整套比较完备的理论体系。

1950年代运筹学理论、方法及其活动发展达到一个新的水平,运筹学开始成为一门独立的学科,其标志是大量运筹学会的创建和相应期刊的问世。美国于1952年成立了运筹学会,并出版期刊《运筹学》,世界其他国家也先后创办了运筹学会与期刊。在1956—1959年短短的3年里,先后就有法国、印度、日本等十几个国家成立了运筹学会,并有6种运筹学期刊问世。1957年在英国牛津大学召开了第一届运筹学国际会议,1959年成立了国际运筹学会联合会(International Federation of Operations Research Societies, IFORS)。此外,还有一些地区性组织,如1976年欧洲运筹研究会(EURO)成立,1985年亚太运筹研究会(APORS)成立。

计算机的普及与发展是推动运筹学迅速发展的巨大动力。没有现代计算机技术,求解复杂的运筹学模型是不可想象的。运筹学实践反过来又促进了计算机技术的发展,它不断地对计算机提出内存更大、运行速度更快的要求。可以说运筹学在过去的半个多世纪里,既得益于计算机技术的应用与发展,同时也极大地促进了计算机技术的发展。1960年代以来,运筹学得到迅速的普及和发展。运筹学可以细分为许多分支,许多高等院校把运筹学的规划理论引入本科教学课程,把规划理论以外的内容引入硕士、博士研究生的教学课程。运筹学的学科划分没有统一的标准,在理、工、商科中均可发现它的存在。

### 2. 运筹学在我国的发展

1950年代中期,运筹学被引入我国。最初曾根据英文OR直译为“运用学”,1957年从“运筹帷幄之中,决胜千里之外”这句古语中摘取“运筹”二字,将OR正式命名为“运筹学”,比较恰当地反映了这门学科的性质和内涵。中国第一个运筹学小组在钱学森、许国志的推动下,在1956年于中国科学院力学研究所(以下简称力学所)成立,1958年又在工作小组的基础上成立了运筹学研究室。可见,运筹学一开始就被理解为同工程有密切联系的学科。1959年,第二个运筹学组织运筹学小组在中国科学院数学研究所(以下简称数学所)成立,这是“大跃进”运动中数学家们投身于国家建设的一个产物。力学所的研究室与数学所的研究小组于1960年合并成为数学所的一个研究室,当时的主要研究方向有线性规划、运输理论、动态规划、投入产出分析、排队论、非线性规划和图论等。1960年在山东济南召开了全国应用运筹学的经验交流和推广会议,1962年又在北京召开了全国运筹学学术会议。

1963年是中国运筹学教育史上值得一提的一年,数学所的运筹学研究室为中国科技大学应用数学系的第一届毕业生(1958届)开设了较为系统的运筹学课程,这是第一次在

中国的大学里开设运筹学课程。当今，运筹学课程已成为所有高校商学院、工学院乃至数理学院和计算机学院的基础课程。

1950年代后期，运筹学在中国的应用集中在运输问题上，其中一个广为流传、通俗易懂的例子就是“打麦场的选址问题”；此外，“中国邮路问题”模型也是在那个时期由山东师范大学管梅谷教授提出的。从某种意义上讲，当时我国已在目前热门的“物流学”领域有了一些雏形性的研究。

中国运筹学早期应用的“火焰”是由华罗庚点燃的。“文革”期间，身为中国数学会理事长和中科院院士的他，亲自率领一个被大家称为“华罗庚小分队”的小组，到农村、工厂传授基本的优化技术和统筹方法，并指导将它们应用于日常的生产和生活中。自1965年起的10年中，为宣传普及运筹学知识，华罗庚的足迹遍布全国约20个省（市），受到各界人士的欢迎，他的工作得到了毛泽东主席的肯定和表扬。华罗庚在这一时期的推广工作，播下了运筹学哲学思想的种子，极大地推动了运筹学在中国的普及和发展。直到今天，经历过那个时代的许多民众还记得“优选法”“黄金分割法”等词汇，但却不一定知道“运筹学”。

中国运筹学会于“文革”后的1980年成立，当时作为中国数学学会的一个分会。第一届运筹学会全国代表大会在山东济南召开，华罗庚被选为第一届理事长，副理事长是许国志、越民义。中国运筹学会在1982年成为国际运筹学会联合会（IFORS）的成员。1992年运筹学会第四次全国代表大会在四川成都召开；在本次大会上，中国运筹学会从中国数学学会独立出来，成为国家一级学会。这是运筹学发展史上的一个重要事件，喻示人们对运筹学认识的加深。运筹学虽以数学为基础，但却同数学有着本质的不同。

运筹学的理论固然重要，但应用才是它的灵魂。运筹学在国际上除了设理论奖外，还设有应用奖。中国的运筹学，无论是在理论研究还是在实际应用上，同国际先进水平相比都存在较大的差距。综观近二三十年的诺贝尔经济学奖，获奖内容几乎都集中在计量经济学和博弈论上，而在这些运筹学的前沿领域还未出现我国运筹学工作者的身影。

尽管与国际先进水平相比存在较大的差距，近20年来，我国运筹学工作者在生物工程、计算机科学、管理科学以及金融工程等方面也取得了一些可喜的成绩，甚至有一些已达到国际先进水平。如在生物工程方面，将最优化、图论、神经网络等运筹学的理论和方法应用于分子生物信息学中的DNA与蛋白质序列比较、生物进化分析、蛋白质结构预测等问题的研究；在计算机科学方面，运用动态规划、图论、神经网络、随机过程等进行芯片测试与排队网络的数量指标分析；在金融工程方面，将最优化及决策分析方法应用于金融风险控制，进行管理、资产评估与定价分析等；在供应链管理方面，利用随机动态规划模型，研究多重决策的最优策略；等等。

## 1.3 运筹学的应用特点和研究方法

### 1.3.1 运筹学的应用特点

运筹学主要研究人类对各种资源的运用及筹划活动，以期通过了解和发展这种运用及筹划活动的基本规律，发挥有限资源的最大效益，达到总体最优的目标。最优化目标的实

现,既需要经济管理学科的知识,也需要数学、物理学、化学、计算机、工程技术,甚至是组织文化、政治、宗教、法律等学科的知识,因此,运筹学是一门新兴的交叉学科。

运筹学研究有限资源的合理利用问题,其研究对象的客观普遍性,决定了运筹学应用的广泛性,它的应用范围遍及工农业生产、经济管理、工程技术、国防安全、自然科学等各个方面和领域;此外,运筹学工作以决策支持为目标,从创建时期就表现出其理论与实践结合的鲜明特点。因此,运筹学是一门应用十分广泛的应用性学科。

### 1.3.2 运筹学的研究方法

运筹学的定义已经告诉我们,它与其他学科的本质区别就在于其独特的研究方法,即数学模型的方法。运筹学经过近一个世纪的发展,已逐步形成一套系统的解决和研究实际问题的方法,可概括为五个阶段:①构建问题的数学模型,将一个实际问题表示为一个运筹学问题;②分析问题最优(满意)解的性质和求解问题的难易程度,寻求合适的求解方法;③设计求解算法,并对算法的性能进行理论分析;④编程实现算法并分析模拟数值结果;⑤判断模型和解法的有效性,提出解决实际问题的方案。

这五个阶段并不是相互独立的,也绝非依次进行的。正如邦德(美国工程院院士,曾任美国军事运筹学会主席和美国运筹学会主席)在谈到他几十年建模和分析的体会时指出的那样:“对于模型的开发应该是一种连续的研究、开发、分析、改进的循环过程,是一个原型化和呈螺旋状发展的过程,而不是一个单个事件。”邦德在回顾运筹学在美国军事力量的改造中所起的重要作用时还指出:“对一个过程、一个系统或者一个企业的建模是一种艺术。这项艺术在于确定哪些因素与活动需要包含在模型之中,哪些是变量、常数、随机的、约束等等;在建立变量之间关系时,应做些什么假设;以及在逐步运作中,如何排除在建立初始模型时所引入的某些不切实际的假设。并且,这是一种可以学习的艺术。”

## 1.4 运筹学模型

运筹学的实质在于建立和使用模型。尽管模型的具体结构和形式总是与其要解决的问题相联系,但这里我们抛弃模型在外表上的差别,从更广泛的角度抽象出它们的共性。

模型在某种意义上说是客观事物的简化与抽象,是研究者经过思维抽象后用文字、图表、符号、关系式以及实体模样对客观事物的描述。不加任何假设和抽象的系统称为现实系统,作为研究对象的系统,总是要求我们求解一定的未知量并给出相应的结论,其求解过程如图1-1所示。图中左侧的虚线表示人们直接的目标,右侧的实线表示这一目标的具体实现路径。

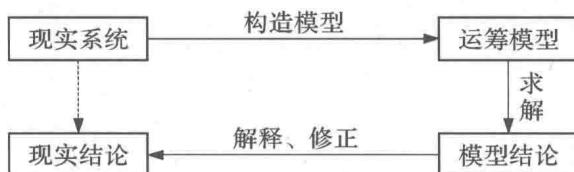


图 1-1 运筹学的工作过程

模型有三种基本类型,即形象模型、模拟模型和数学模型。运筹学模型主要是指数学模型。构造模型是一种创造性劳动,成功的模型是科学和艺术的综合体,其过程是一系列简化、假设和抽象。在模型中现实系统的哪些方面可以忽略,哪些方面应该合并,可以做哪些假设以及模型应构成什么形式等,都是该阶段需要回答的问题。在构造模型中常用的假设包括两方面的内容,一方面是离散变量的连续性假设,另一方面是非线性函数的线性假设。显然,构造模型阶段具有一定的主观性,在某种意义上说,面对同样的现实系统,不同的人会构造出完全不同的模型,而它们之间可能并无优劣之别。当然,这并非意味着根本不存在区分好坏模型的客观标准,也并非说明模型的效用与模型的建立过程无关。虽然对具体的模型可能会有许多特殊的标准,但是总的来说模型的好坏决定于其对实现系统目标的实用性。

既然运筹学模型主要是指数学模型,那么什么是数学模型呢?数学模型可以简单地描述为用字母、数字和运算符来精确反映变量之间相互关系的式子或式子组。数学模型由决策变量、约束条件和目标函数三个要素构成。决策变量即问题中所求的未知的量,约束条件是决策所面临的限制条件,目标函数则是衡量决策效益好坏的数量指标。数学模型的一般形式可表示为:

$$\{\min z = P(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n); f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = b; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \geq 0\}$$

其中  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  代表  $n$  个决策变量,  $\{\min z = P(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)\}$  代表目标函数,  $\{f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = b\}$  代表约束条件(它既可以是只有一个函数的式子,也可以是有  $m$  个函数的式子组),而  $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \geq 0\}$  则代表决策变量的非负约束。

### 思考题 1

1. 运筹学的产生与发展。
2. 运筹学的内涵。
3. 运筹学的研究方法和工作过程。
4. 数学模型及其三要素。

## 2 线性规划

线性规划 (linear programming, LP) 是运筹学的一个重要分支。自 1947 年美国数学家丹捷格 (G. B. Dantzig) 提出线性规划问题求解的一般方法 (单纯形法) 之后, 线性规划在理论上日益趋向成熟, 在实践上应用日益广泛和深入。特别是在电子计算机能处理成千上万个约束条件和决策变量的线性规划问题之后, 线性规划的应用领域更是迅速扩大。线性规划在工业、农业、商业、交通运输、军事、经济计划和管理决策等领域都可发挥重要的作用, 它已成为现代科学管理的重要手段之一。

### 2.1 线性规划的数学模型

线性规划总是与有限资源的合理利用问题结合在一起, 这里的有限资源是一个广义的概念, 它可以是劳动力、原材料、设备、资本等有形的事物, 也可以是时空、技术等无形的事物; 这里的合理利用通常是指以费用为代表的负向指标的最小化或以利润指标为代表的正向指标的最大化。下面通过示例说明线性规划数学模型。

**例 2-1** 某企业在某一计划期内规划生产甲、乙两种产品, 生产需要消耗 A、B、C 三种资源。生产每件甲、乙产品对 A、B、C 三种资源的消耗量, 企业 A、B、C 三种资源的拥有量, 以及每件甲、乙产品所能为企业创造的利润如表 2-1 所示。试建立该问题的数学模型, 以使计划期内的生产获利最大。

表 2-1 企业生产数据表

资源	单位产品资源消耗量 (kg)		资源拥有量 (kg)
	甲	乙	
A	10	20	160
B	30	15	300
C	60	240	1200
单位产品利润 (万元)	2	3	

建立模型:

第一, 明确问题的决策变量。设  $x_1$  和  $x_2$  分别代表计划期内甲、乙两种产品的产量。

第二, 构建问题的约束条件。此问题的约束条件为三种资源对生产的限制, 即在确定甲、乙两种产品产量时, 要考虑对三种资源的消耗量不能超过其拥有量。

资源 A 的拥有量是 160kg, 生产一件甲、乙产品需要资源 A 分别为 10kg 和 20kg, 那么生产  $x_1$  件甲产品和  $x_2$  件乙产品消耗资源 A 的总数为  $10x_1 + 20x_2$ , 因此资源 A 的约束可用下述不等式加以表示:



$$10x_1 + 20x_2 \leq 160$$

同理，资源 B 和资源 C 的约束可分别用下述两个不等式加以表示：

$$30x_1 + 15x_2 \leq 300$$

$$60x_1 + 240x_2 \leq 1200$$

第三，构建问题的目标函数。该企业的目标是获得最大的利润，因此，此问题的目标函数可表示为  $\max z = 2x_1 + 3x_2$ 。

综合数学模型的三要素，该问题的数学模型可表示为：

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} &\begin{cases} 10x_1 + 20x_2 \leq 160 \\ 30x_1 + 15x_2 \leq 300 \\ 60x_1 + 240x_2 \leq 1200 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2-1)$$

**例 2-2** 某公司每天（按 8 小时计）至少有 3200 个工件需要进行质量检验，应聘质量检验岗位的人员总共有 30 人，其中具有一级质检资格的有 10 人，二级资格的有 20 人。一级检验人员每小时可检验工件 25 个，检验的准确率为 98%，每小时的工资为 30 元；二级检验人员每小时可检验工件 15 个，检验的准确率为 95%，每小时的工资为 20 元。检验人员每出现一次错检会给公司造成 10 元的经济损失。试问公司应选拔多少名一级、二级检验人员从事质检工作，才能使花费在质量控制方面的成本最小。

建立模型：

第一，明确问题的决策变量。设  $x_1$  和  $x_2$  分别代表应选拔的一级、二级检验人员数量。

第二，构建问题的约束条件。此问题的约束条件为一级、二级检验人员总数的限制和每日需要检验的工件总量的限制。于是约束条件可用下述三个不等式加以表示：

$$x_1 \leq 10$$

$$x_2 \leq 20$$

$$5x_1 + 3x_2 \geq 80$$

第三，构建问题的目标函数。该公司的目标是使质量控制方面的花费最小，而质量控制方面的费用包括检验人员的工资和错检所造成的损失两部分。

一级检验人员每小时的工资为 30 元，每小时错检造成的损失为 5 元，即公司每小时在每名一级检验人员身上所花费的质检成本为 35 元；同理，每名二级检验人员为 27.5 元。因此，问题的目标函数可表示为  $\min z = 280x_1 + 220x_2$ 。

综合数学模型的三要素，该问题的数学模型可表示为：

$$\begin{aligned} \min z &= 280x_1 + 220x_2 \\ \text{s. t.} &\begin{cases} x_1 \leq 10 \\ x_2 \leq 20 \\ 5x_1 + 3x_2 \geq 80 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2-2)$$

**例 2-3** 某餐厅 24 小时全天候营业，为简化问题将每天 24 小时等分为六个时间段，每段 4 小时。由于各时间段顾客数量不同，所以需要的服务员数也就不同。经测算 2:00 ~ 6:00 需