“十三五”应用型人才培养工程规划教材

工程力学 I

ENGINEERING MECHANICS I

王晓军　石怀荣　主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

"十三五"应用型人才培养工程规划教材

工程力学 I

主　编　王晓军　石怀荣
副主编　丁建波　楼力律　刘志军
参　编　余　辉　杨　超　曹　霞　吕　明
　　　　谢占山　赵　静　何　华

机械工业出版社

本书分为《工程力学Ⅰ》《工程力学Ⅱ》两册。《工程力学Ⅰ》讲述静力学基础和构件的静力学设计两部分内容。其中，静力学基础共3章，主要包括刚体静力学的基本概念和物体的受力分析，力系的简化，力系的平衡；构件的静力学设计共8章，包括材料力学概述与材料的力学性能，杆件的内力分析，杆件横截面上的应力分析，应力状态分析，构件的强度设计，杆件的变形分析及刚度设计，压杆稳定及提高构件强度、刚度和稳定性的措施，简单超静定问题。《工程力学Ⅱ》讲述工程动力学内容，共6章，包括点的运动学和刚体的基本运动，点的合成运动，刚体的平面运动，刚体动力学，动静法，动载荷与交变应力。平面图形的几何性质、常用材料的力学性能和型钢表作为附录列于书后，并在书的最后给出了习题参考答案。

本书针对应用型本科院校机械类、土木类专业的学生编写，也可作为高职高专、自学考试和成人教育的教材，并可供有关科研和工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

工程力学Ⅰ/王晓军，石怀荣主编. —北京：机械工业出版社，2015.8
“十三五”应用型人才培养工程规划教材
ISBN 978-7-111-50659-1

Ⅰ.①工… Ⅱ.①王… ②石… Ⅲ.①工程力学－高等学校－教材
Ⅳ.①TB12

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第189309号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑：姜 凤 责任编辑：姜 凤
责任校对：闫玥红 封面设计：张 静
责任印制：李 洋
北京华正印刷有限公司印刷
2015年9月第1版第1次印刷
184mm×260mm · 15.75印张 · 388千字
标准书号：ISBN 978-7-111-50659-1
定价：29.00元

前　言

工程力学是一门理论性较强、与工程技术联系极为密切的技术基础学科，其定理、定律和结论广泛应用于各行各业的工程技术中。由于新型技术和新兴高技术企业的发展，其生产一线需要大量的本科层次、复合型技术技能型人才。为适应这样的社会需求，教育部也在引导地方院校转型为应用技术型院校，这些院校教学科研工作将全面转轨。本书是为该层次院校编写的工程力学教材。

在对国内地方本科院校基础力学（理论力学、材料力学、工程力学）教学现状的调研和分析的过程中，编者体会到目前各院校面临的人才培养模式改革、学时重新分配的问题，既是必须面对的严峻现实，也是教学内容和教学方法改革极好的机遇。为发挥基础力学在工科教学中的作用，结合多个同类院校的教学改革和实践的经验，本着实用、够用的原则，编者对原理论力学、材料力学的基本内容做了体系上的调整，并对内容进行了适当的取舍，简化理论推导的同时加强分析方法的陈述。本书分为两册：《工程力学Ⅰ》和《工程力学Ⅱ》，分为静力学基础、构件的静力学设计和工程动力学三篇，覆盖了理论力学和材料力学的基本部分。

本书强调受力分析在工程构件设计中的重要作用，在阐述刚体模型的受力分析计算方法后，即开展工程构件的强度、刚度和稳定性的分析，目的是使读者能够将静力分析方法合理地应用于工程构件的分析中。

在静力学基础中，改变传统的公理体系，将静力学公理、原理按需要放在相关内容中陈述。在构件静力学设计中，突出内力分析、应力分析、变形、强度和刚度以及稳定性的分析，避免同一分析方法在不同问题中多次重复，能利于读者确定问题的所属范畴，明确解决问题的方法和途径。在工程动力学中，简要介绍了对质点和刚体的基本运动进行分析的常用方法，重点介绍点的合成运动以及刚体的平面运动。然后按照受力分析、运动分析以及力与运动的关系介绍了动力学普遍定理的原理及应用，并介绍了动静法以及动载荷与交变应力的基本内容。特别注意与物理课程力学部分形成区别，突出普遍原理在刚体动力学中的应用，减少重复，提高起点。

本书在基本理论、基本概念的阐述上力求简洁易懂，所选例题多有相应的工程背景。插图尽量形象生动，贴近工程实际，便于读者理解。

参加本书编写的人员有常州工学院的王晓军、刘志军、余辉、曹霞，河海大学的楼力律，江苏理工学院的杨超，蚌埠学院的石怀荣、吕明、赵静、何华，南通航运职业技术学院的丁建波，安徽科技学院的谢占山，他们均在应用型高校长期从事力学教学工作，具有十分丰富的教学经验。其中，王晓军、石怀荣任主编，丁建波、楼力律、刘志军任副主编，王海东、卓娜两位同学精心绘制了本书的插图。本书在编写过程中，得到了相关学院教师的大力支持，他们提出了许多有益的意见。在此向所有贡献者一并致谢。

本书承蒙北京航空航天大学蒋持平教授悉心审阅，谨在此表示衷心的感谢。

编者希望本书能满足应用技术型层面师生的需求，但限于编者的水平和能力，书中难免存在疏漏和欠妥之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

目　　录

绪　论

力学既是一门基础科学，又是一门应用科学。力学所阐明的规律带有普遍性，是工程技术的理论基础，同时也在广泛的应用中得到发展。较之侧重于研究自然现象和规律的基础力学，工程力学更加侧重于将力学成果应用于工程实际。

有许多古老的建筑历经各种自然灾害保留至今，人们对其进行分析和研究，发现这些建筑在设计、制造和施工中都合理地利用了力学的原理。例如建于1056年的山西应县木塔（见图0-1a），以及迄今800余年倾而不倒的比萨斜塔。古代的设计师在设计建筑时采用了能够有效抵抗自身载荷和地震载荷的筒体结构，筒体结构在现代的高大建筑中也是必然采用的设计方案，如吉隆坡的双子大厦等。有“世界桥梁鼻祖”美誉的赵州桥采用石料制造，它利用首创的“敞肩拱”，使得桥拱的轴线与恒载压力线甚为接近，石料是一种不抗拉而抗压性能好的材料，这样的设计大大提高了赵州桥的承载能力和稳定性（见图0-1b）。位于山西省浑源县的悬空寺（见图0-1c），迄今已有1500年的历史，它利用类似于今天的膨胀螺栓的结构，使得寺庙凌空凸起在万丈悬崖上，成为誉贯中华、名扬海外的奇观。这里只谈到这些建筑物中符合力学原理的一小部分知识，但从中不难看出，力学对工程技术的指导作用。

a)　　b)　　c)

图　0-1

社会在不断地发展与进步，人们也对生活提出了越来越高的要求。建筑物不断增高，桥梁的跨度不断增大，交通需要更加快捷，生活需要更加舒适。新的要求会产生很多新的问题，这些都需要通过科学技术的不断发展与创新来解决。实际上，近代出现的汽车、铁路、船舶、自动化生产线、武器等，都是在力学知识不断积累和完善的基础之上逐渐发展起来的。在这个过程中，不乏惨痛的经历。建于1940年的美国华盛顿州塔科马悬索桥，建造设计风速是60m/s，但却在时速19m/s的风中毁于一旦。对这场事故中桥梁产生振动的原因的

研究，人们总结出新的理论，可以对后续工程进行更科学的设计指导。20 世纪出现的诸多高新技术，如高大建筑、高速公路、大型水利工程、精密仪器、机器人以及高速列车等都是在不断发展的工程力学的指导下得以实现并不断发展完善的。因此，我国著名力学家钱学森先生说："力学走过了从工程设计的辅助手段到中心手段，不是唱配角而是唱主角了。"

1. 工程力学的研究内容

工程力学是人类在认识自然、改造自然的过程中，对客观自然规律的认识不断积累，通过应用完善而逐渐发展起来的一门学科，主要研究物体的机械运动以及构件的承载能力。**机械运动**是指物体在空间的位置、形状随时间而发生的变化，这些变化包括移动、转动、流动和变形。工程结构、设备和机械都是由构件组成的，构件在工作中要能够承受载荷并安全生产，就需要构件具有一定的强度（不发生损坏）、刚度（不发生过度的变形）和稳定性（保持原有的平衡状态）。工程力学通过研究物体的受力，分析物体在力作用下的变形和破坏规律，为工程构件的合理设计提供必要的理论基础和科学的计算方法，以确保工程构件安全和经济。

工程力学是力学与现代科学技术交叉的一门力学分支，涉及众多的力学学科分支，且更强调力学的综合应用和工程应用。本书所讨论的是工程力学的基本部分，主要包括静力学基础、构件的静力学设计、工程动力学三篇。

静力学基础研究物体在外力作用下的平衡问题，包括对工程物体进行受力分析，通过简化找出平衡物体上作用力的规律。

构件的静力学设计主要研究材料的力学性能以及构件在力作用下强度、刚度和稳定性的计算理论，为构件的设计、制造、安装等提供理论依据和计算方法。

工程动力学主要研究物体的运动规律，建立物体运动与受力的关系，并为研究动载荷作用下构件的承载能力提供分析和计算方法。

2. 工程力学的力学模型

工程力学研究的对象，是根据所研究问题的本质和研究对象的本质，舍弃非本质的次要因素，将实际物体抽象而得到的理想模型。通常采用的基本模型为**质点、刚体**以及**理想弹性体**。若所研究的问题与物体的形状、姿态无关，则可以把物体视为具有质量但形状大小可以忽略不计的**质点**。由若干质点组成的系统称为**质点系**。若所研究的问题与物体的形状和姿态有关，但其变形与所研究的问题无关，则可以把物体视为**刚体**。刚体是其上任意两点间的距离保持不变的质点系。在物体的平衡问题的分析中，常用的理想模型为质点和刚体；在物体的内力分析中，也常利用刚体模型，通过平衡方程进行求解，而在研究其变形和失效时，则将变形固体抽象为理想弹性体。以刚体和刚体系统为研究对象的力学分支称为理论力学或一般力学，以变形体为研究对象的力学分支称为固体力学，固体力学包括材料力学、结构力学、弹性力学、塑性力学等。本书涵盖了理论力学和材料力学的基本部分。

3. 工程力学的研究方法

工程力学的研究方法可以分为理论分析、实验研究、数值计算。理论分析首先建立力学模型，依据已有的前提条件，利用合适的计算方法推出新的结论，提供新的方法；实验研究是探索自然规律、发现新的理论的重要途径，同时能验证理论和方法的正确性和可靠性；数值计算为解决工程问题提供了强大的工具，计算机技术的发展，大大拓展了力学在工程中的应用。本书介绍的力学原理，是成熟的、经典性的结果，本书着眼于这些原理的合理应用。

第Ⅰ篇　静力学基础

静力学研究物体在外力作用下的平衡问题，包括对工程物体进行受力分析，通过简化找出作用在平衡物体上力的本质。

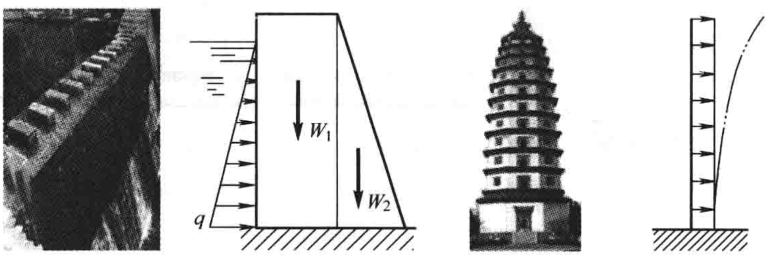
静力学中的**平衡是指物体在惯性参考系中处于静止或匀速直线平移状态**。对工程中大多数问题，可以把固连在地球表面的参考系作为惯性系来研究物体相对于地球的平衡问题。

力是物体之间相互的机械作用，力能使物体的机械运动状态发生变化，这种作用效应称为力的**外效应**（运动效应），力也能使物体产生变形，这种作用效应称为**内效应**（变形效应）。在静力学中，常用的理想模型为质点和刚体，因此只研究力的运动效应即力的外效应。

力对物体的作用效应，决定于力的大小、方位和作用点的位置，即**力的三要素**。三个要素中任何一个要素发生变化，力对物体的作用效应就发生变化，可以用定位矢量 $\boldsymbol{F}$ 表示力的三要素：矢量的模表示力的大小，矢量的方向表示力的方向，矢量的矢端表示力的作用点。力的国际制单位是 N（牛［顿］）或 kN（千牛［顿］）。对于刚体，力可以沿着作用线滑移而不改变力的作用效果，此为**力的可传性原理**。因而，对于刚体而言，力的三要素为力的大小、方位和作用线的位置。

按作用位置，力可分为**分布力**和**集中力**。

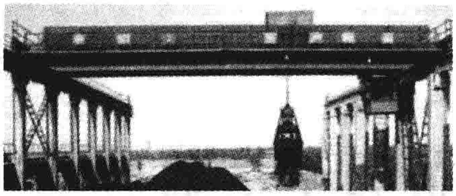
1）分布力：连续分布在构件上的力。常用载荷集度来量度其大小，单位是 $\mathrm{N/m^2}$，若分布力分布于杆件的轴线，则其单位为 N/m。例如坝体（见图Ⅰ-1a）受到的水的压力可以简化为线性分布载荷（见图Ⅰ-1b）、建筑物（见图Ⅰ-1c）受到的风的作用力可简化为均布载荷（见图Ⅰ-1d）。



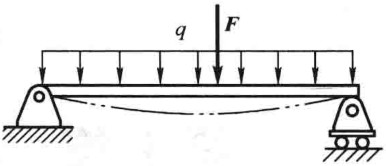
a)　　b)　　c)　　d)

图　Ⅰ-1

2）集中力：作用面积远小于构件的尺寸的力，可视为该力作用在一个几何点上，单位是 N，例如桥式起重机的大梁（见图Ⅰ-2a），起吊重量可简化为集中力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{p}}$，而大梁的自重，可以简化为均布载荷（见图Ⅰ-2b）。



a)



b)

图 Ⅰ-2

静力学基础着重研究三个方面的内容：

1）物体的受力分析，即将所研究的构件从周围物体中分离出来，作为隔离体，分析其上所受到的所有的力，包括载荷以及由于载荷作用而产生的约束力；

2）力系的简化，即在不改变力的作用效果的情况下，用简单的力系代替复杂的力系，以便于后期分析和研究工作的开展；

3）物体在力系作用下的平衡条件，即研究物体处于平衡状态时其上的力系应满足的条件，根据平衡条件可以求解作用于物体上的未知力，如由于载荷作用引起的约束力。

第 1 章
刚体静力学的基本概念和物体的受力分析

本章介绍刚体静力学等效力系的概念和力系等效的基本方法；介绍工程中常见的约束形式，以及对物体进行受力分析的方法。

1.1 刚体静力学的基本概念

1.1.1 刚体静力学的力学模型

在工程分析中，要根据所研究的问题对实际物体进行简化，建立力学模型。刚体静力学的力学模型包括质点和刚体。例如，图 1-1a 所示系统中绳索的拉力，与物体的尺寸无关，因而物体可以抽象为质点。若此物体受图 1-1b 的平行力系的作用时，绳索的拉力与物体的尺寸有关，因而物体要抽象为刚体。又如乒乓球，若将它放置在地面上研究它的受力，则它可抽象为质点，而若研究它在空间转动的运动特性时，则应抽象为刚体，图 1-1c 所示的是乒乓球的几种运动形式。

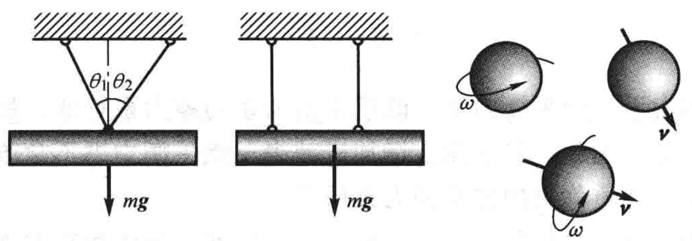


图 1-1

1.1.2 合力、分力以及等效力系的概念

作用在物体上的一组力，称为**力系**，可以用记号（$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，…，$\boldsymbol{F}_n$）表示。若物体上不作用任何力，称为**零力系**。在同一刚体上作用效果相同的力系称为**等效力系**。例如对图 1-2所示的同一物体，当其处于平衡状态时，图 1-2a 中桌面的支撑力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 与图 1-2b 中绳索的拉力 $\boldsymbol{F}_3$、$\boldsymbol{F}_4$ 以及图 1-2c 中绳索的拉力 $\boldsymbol{F}$ 作用效果相同，都能使物块处于静止状态，

它们是等效力系。

如果一个力系与一个力等效，则这个力称为该力系的**合力**，构成这个力系的各力称为合力的**分力**。如图 1-2c 中绳索的拉力 $\boldsymbol{F}$，与图 1-2b 中两个绳索拉力 $\boldsymbol{F}_3$ 和 $\boldsymbol{F}_4$ 等效，是其合力，两个绳索的力 $\boldsymbol{F}_3$ 和 $\boldsymbol{F}_4$ 是合力 $\boldsymbol{F}$ 的分力。用力系的合力代替该力系的过程称为**力的合成**，用分力代替合力的过程称为**力的分解**。

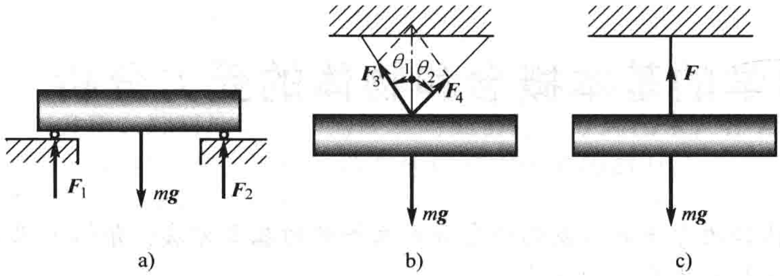


图 1-2

1.1.3 力系等效的基本原理 平衡力系

力的平行四边形法则给出了最基本力系的简化（合成）规则：**作用于物体上同一点的两个力，可以合成为一个合力。合力与原来两个力共作用点，其大小和方向由这两个力构成的平行四边形的对角线确定**（见图 1-3a）。如果同一点上作用多个力，可以通过多次运用力的平行四边形法则来简化这个力系，得到该力系的合力（见图 1-3b）。**力可以按照平行四边形法则合成，亦可按照平行四边形法则分解**，力的分解是力的合成的逆运算。

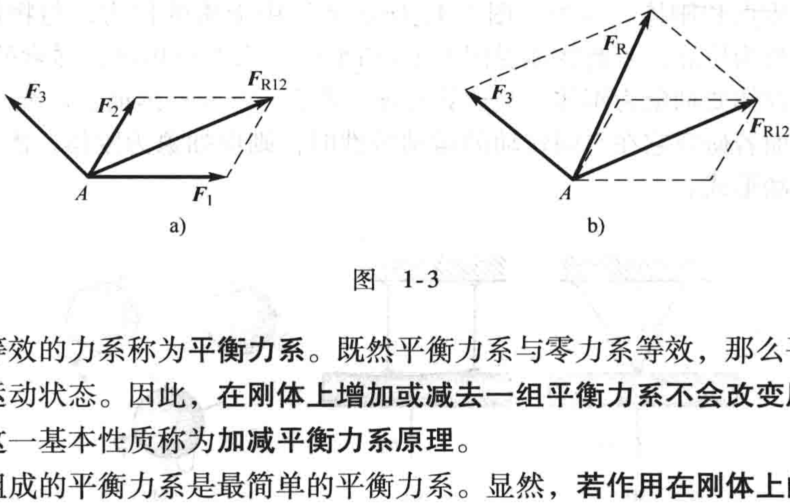


图 1-3

与零力系等效的力系称为**平衡力系**。既然平衡力系与零力系等效，那么平衡力系不会改变刚体原有的运动状态。因此，**在刚体上增加或减去一组平衡力系不会改变原力系对刚体的作用**。力系的这一基本性质称为**加减平衡力系原理**。

由两个力组成的平衡力系是最简单的平衡力系。显然，**若作用在刚体上的两个力组成平衡力系，这两个力必然等值、反向、共线，反之亦然。这就是二力平衡原理**。

刚体上作用着三个相互平衡的力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 和 $\boldsymbol{F}_3$，若

1）其中力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 的作用线有交点，如图 1-4a 所示，则根据平行四边形法则，力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 与其合力 $\boldsymbol{F}_R$ 等效，这样 $\boldsymbol{F}_3$ 就与 $\boldsymbol{F}_R$ 相互平衡。根据二力平衡原理容易知道，$\boldsymbol{F}_3$ 与 $\boldsymbol{F}_R$ 等值、反向、共线（见图 1-4b）。

2）若三个力的作用线相互平行，则三个力必然共面（见图 1-4c）。

由此可以得到**三力平衡定理：作用于刚体上的三个力若为平衡力系，则这三个力的作用**

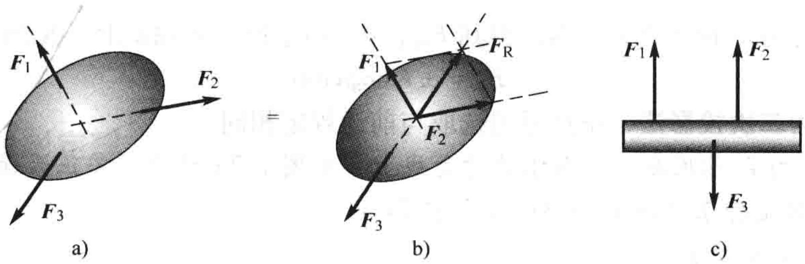


图　1-4

线共面，或汇交于一点，或彼此互相平行。

刚体静力学关于力的合成与分解以及力系简化的方法和结果可以直接应用解决工程实际问题。引入惯性力概念后，动力学的问题在形式上可以化为静力学问题求解。工程实际中，若构件的加速度不大，可以用静力分析处理非匀速运动的构件。在加速度比较大而动力分析又十分复杂的情况下，可以在简单的静力分析基础上乘以动荷因数来近似代替动力分析。

1.2　力的投影与分解　合力投影定理

1.2.1　力在平面上的投影

设有力 $\boldsymbol{F}$ 和平面 I，由力 $\boldsymbol{F}$ 的始端 A 和末端 B 分别向平面 I 作垂线，得到垂足 A'和 B'，$A'B'$称为**力 $\boldsymbol{F}$ 在平面 I 上的投影**，其大小记为 F_{xy}，如图 1-5 所示。

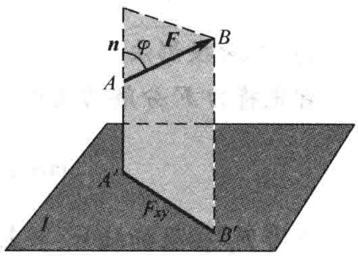


图　1-5

若力 $\boldsymbol{F}$ 与平面法线的夹角为 φ，则投影的大小 F_{xy} 为

$$F_{xy} = F\sin\varphi \tag{1-1}$$

1.2.2　力在轴上的投影

如图 1-6a 所示，设有力 $\boldsymbol{F}$ 和平面 I，轴 x 位于平面 I 上。由力 $\boldsymbol{F}$ 的始端和末端分别向轴 x 作垂线，得到垂足 a 和 b，线段 ab 冠以正负号表示为**力 $\boldsymbol{F}$ 在轴 x 上的投影**，记为 F_x。过力 $\boldsymbol{F}$ 的始端 A 作轴 x 的平行线 AD，直线 AD 与力 $\boldsymbol{F}$ 的夹角为 α，则力 $\boldsymbol{F}$ 在轴 x 上的投影为

$$F_x = \pm F\cos\alpha \tag{1-2}$$

式中，当由 a 至 b 的指向与轴的正方向一致，取正号，反之取负号。这种方法称为**直接投影法**。

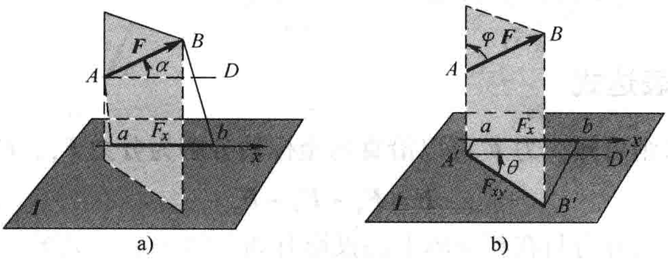


图　1-6

也可以先将力 $\boldsymbol{F}$ 向平面 I 投影，得到 F_{xy}，再将 F_{xy} 投影到轴 x 上（见图 1-6b），得到

$$F_x = \pm F\sin\varphi\cos\theta \tag{1-3}$$

这种方法又称为**二次投影法**，正负号的选取与前述规定相同。

例题 1-1 力 $\boldsymbol{F}$ 作用在正六面体的对角线上，如图 1-7a 所示，若正六面体的边长为 a，写出力 $\boldsymbol{F}$ 在直角坐标系中轴 x、y 和 z 上的投影。

解：1）直接投影法

根据力在坐标轴上投影的概念，可以先求解力 $\boldsymbol{F}$ 与 x、y、z 轴的正向夹角 α、β、γ，再利用直接投影法求解 $\boldsymbol{F}$ 在 x、y 和 z 轴上的投影。设正六面体的边长为 a，有

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \cos\beta = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \cos\gamma = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

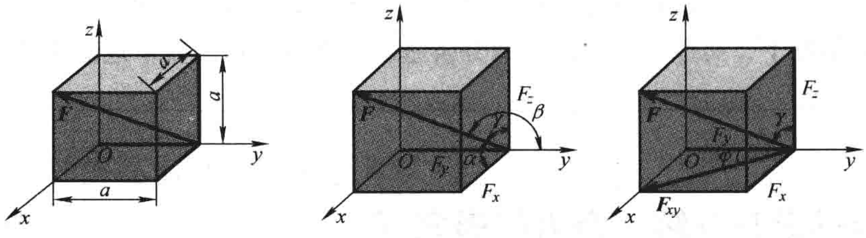


图 1-7

则力 $\boldsymbol{F}$ 在三个坐标轴 x、y、z 上的投影可分别表示为

$$F_x = F\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}F}{3}, \quad F_y = F\cos\beta = -\frac{\sqrt{3}F}{3}, \quad F_z = F\cos\gamma = \frac{\sqrt{3}F}{3}$$

2）二次投影法

首先将力 $\boldsymbol{F}$ 分解为两个分力 $\boldsymbol{F}_z$ 和 $\boldsymbol{F}_{xy}$，如图 1-7c 所示。根据几何关系有

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\gamma = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \sin\gamma = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

分力 $\boldsymbol{F}_z$ 在坐标轴 x、y 上的投影为 0，在 z 轴上的投影为 $F_z = F\cos\gamma$。最后分力 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 的大小 $F_{xy} = F\sin\gamma$，其在轴 z 上的投影为 0。进一步将分力 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 向轴 x、y 进行投影，可得到

$$F_x = F_{xy}\sin\varphi = F\sin\gamma\sin\varphi = F\times\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}F$$

$$F_y = -F_{xy}\cos\varphi = -F\sin\gamma\cos\varphi = -F\times\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}F$$

$$F_z = F\cos\gamma = F\times\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}F$$

1.2.3 力的解析表达式

由平行四边形法则可知，力 $\boldsymbol{F}$ 可以沿直角坐标轴分解为分力 $\boldsymbol{F}_x$、$\boldsymbol{F}_y$ 和 $\boldsymbol{F}_z$，因此有

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_x + \boldsymbol{F}_y + \boldsymbol{F}_z$$

该力在直角坐标轴上的分力与在相应轴上的投影有如下的关系（见图 1-7）：

$$\boldsymbol{F}_x = F_x\boldsymbol{i}, \ \boldsymbol{F}_y = F_y\boldsymbol{j}, \ \boldsymbol{F}_z = F_z\boldsymbol{k} \tag{1-4}$$

式中，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别为坐标轴 x、y、z 的单位矢量。则力可以表示成为解析表达式：

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k} \tag{1-5}$$

1.2.4 合力投影定理

设作用于同一个点 O 的力系（作用于同一点的力系称为**汇交力系**）的合力为 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$（见图 1-8）。过汇交点 O 建立直角坐标系 $Oxyz$，力系中的每一个力 $\boldsymbol{F}_i$ 以及合力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 都可以表达为其解析表达式，即

$$\boldsymbol{F}_i = F_{ix}\boldsymbol{i} + F_{iy}\boldsymbol{j} + F_{iz}\boldsymbol{k} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{a}$$

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} = F_{\mathrm{R}x}\boldsymbol{i} + F_{\mathrm{R}y}\boldsymbol{j} + F_{\mathrm{R}z}\boldsymbol{k} \tag{b}$$

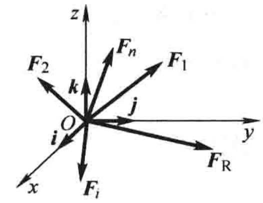


图 1-8

将式（a）的 n 个方程相加，并与式（b）比较，可以得到

$$F_{\mathrm{R}x} = \sum F_x, \quad F_{\mathrm{R}y} = \sum F_y, \quad F_{\mathrm{R}z} = \sum F_z \tag{1-6}$$

上式表明：**合力在某轴上的投影，等于各分力在同一轴上投影的代数和**，这就是**合力投影定理**。若已知各分力在相应轴上的投影，合力的大小与方向可以由式（1-7）、式（1-8）确定：

合力的大小为

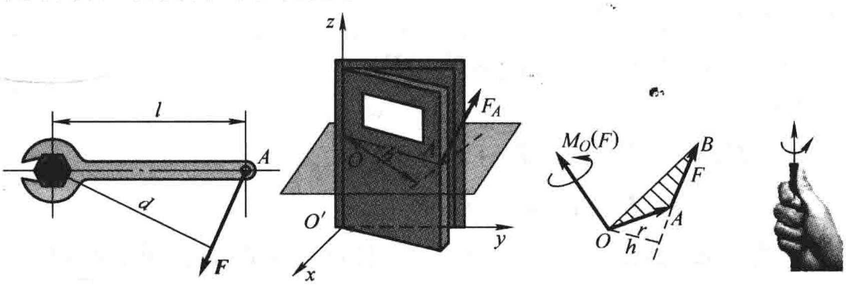
$$F_{\mathrm{R}} = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2 + (\sum F_z)^2} \tag{1-7}$$

方向余弦为

$$\cos(\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}},\boldsymbol{i}) = \frac{\sum F_x}{F_{\mathrm{R}}}, \quad \cos(\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}},\boldsymbol{j}) = \frac{\sum F_y}{F_R}, \quad \cos(\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}},\boldsymbol{k}) = \frac{\sum F_z}{F_{\mathrm{R}}} \tag{1-8}$$

1.3 力矩

力能够使物体移动，也能使物体转动。**力矩**用以量度力的转动效应。力使物体绕某点转动的作用，称为**力对点之矩**（例如图 1-9a 扳手拧紧螺钉），力使物体绕某轴转动的作用，（如图 1-9b 门的转动）称为**力对轴之矩**。



a) b) c) d)

图 1-9

1.3.1 力对点之矩

如图 1-9c 所示，力 $\boldsymbol{F}$ 作用在刚体上的 A 点，点 O 到 A 点的径矢为 $\boldsymbol{r}$。可以证明，力使

刚体绕点 O（称之为**矩心**）转动的效应取决于三个要素：

1）转动的强度（它取决于力的大小及力到点的距离）；

2）力使物体转动的方位（力 $\boldsymbol{F}$ 的作用线和矩心 O 组成的平面在空间的方位，可以用这个平面的法线表示该平面的方位）；

3）转向。

可以将这三个要素用一个矢量表达，利用数学中矢量的矩的概念，定义这个矢量为力对点的矩：

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{1-9}$$

矢量的模表示了力矩的作用强度，矢量的方位标示转轴的方位，矢量的方向由右手螺旋法则确定（见图 1-9c、d）。力矩的单位为 N · m（牛［顿］米）。

将力 $\boldsymbol{F}$ 和径矢 $\boldsymbol{r}$ 表示成解析表达式，有

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}$$

利用矢量积的计算方法，可以得到

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\boldsymbol{i} + (zF_x - xF_z)\boldsymbol{j} + (xF_y - yF_x)\boldsymbol{k} \tag{1-10}$$

容易知道，上式中 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 前面的系数，分别为 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$ 在坐标轴 x、y、z 上的投影，即

$$\begin{aligned} M_{Ox}(\boldsymbol{F}) &= yF_z - zF_y \\ M_{Oy}(\boldsymbol{F}) &= zF_x - xF_z \\ M_{Oz}(\boldsymbol{F}) &= xF_y - yF_x \end{aligned} \tag{1-11}$$

当力 $\boldsymbol{F}$ 的作用线与矩心 O 组成的平面在空间的方位明确易见，如图 1-10 所示时，可以用代数量表达力对点的矩：

$$M_O(\boldsymbol{F}) = \pm Fh = \pm 2A_{\triangle OAB} \tag{1-12}$$

这是平面力对点的矩，约定力使物体绕矩心逆时针转向为正，顺时针转向为负。

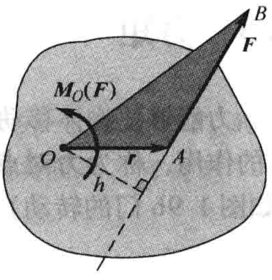


图 1-10

由式（1-5）可知

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k} = \boldsymbol{F}_x + \boldsymbol{F}_y + \boldsymbol{F}_z$$

将上式代入式（1-9），有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) &= \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{F}_x + \boldsymbol{F}_y + \boldsymbol{F}_z) \\ &= \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_x + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_y + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_z \end{aligned} \tag{1-13}$$

式中，按照力对点的矩的定义，$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_x$ 为分力 $\boldsymbol{F}_x$ 对矩心 O 的矩，同理 $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_y$，$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_z$ 分别为分力 $\boldsymbol{F}_y$、$\boldsymbol{F}_z$ 对矩心 O 的矩，令

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_x) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_x, \quad \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_y) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_y, \quad \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_z) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_z$$

式（1-13）可表示为

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_x) + \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_y) + \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_z)$$

将上式推广到由 n 个力构成的力系，若 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} = \sum \boldsymbol{F}_i$，则可得到

$$M_O(F_R) = \sum M_O(F_i) \tag{1-14}$$

即：**力系的合力对某点的矩等于诸分力对同一点的矩之和**。这个关系式被称为**合力矩定理**，它是由 17 世纪法国数学家、力学家伐里农首先提出的。

1.3.2　力对轴之矩

考察力 $\boldsymbol{F}$ 对刚体所产生的绕轴 z 转动的效应，即力 $\boldsymbol{F}$ 对轴 z 的矩，并用 $M_z(\boldsymbol{F})$ 来表达。如图 1-11 所示，作圆盘平面垂直于 z 轴，交 z 轴于点 O，将 $\boldsymbol{F}$ 正交分解为平行于轴 z 的分力 $\boldsymbol{F}_1$ 以及垂直于轴 z 的分力 $\boldsymbol{F}_2$，由合力矩定理可得

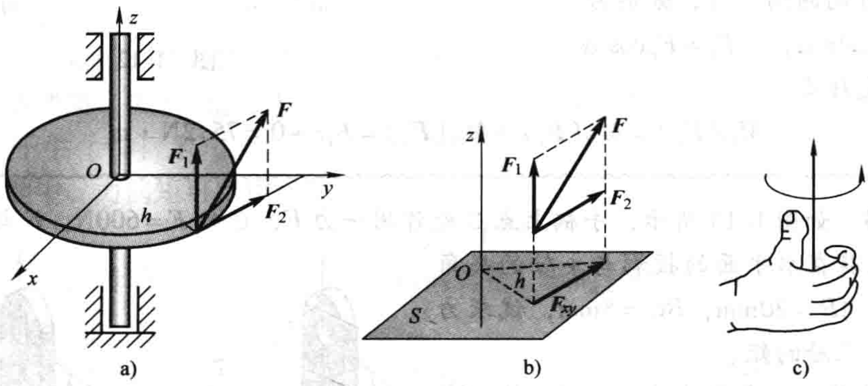


图　1-11

$$M_z(\boldsymbol{F}) = M_z(\boldsymbol{F}_1) + M_z(\boldsymbol{F}_2)$$

显然平行于轴 z 的分力 $\boldsymbol{F}_1$ 不能使圆盘产生绕 z 轴的转动，即 $M_z(\boldsymbol{F}_1)=0$，故

$$M_z(\boldsymbol{F}) = M_z(\boldsymbol{F}_2) = M_O(\boldsymbol{F}_{xy}) = \pm F_{xy}h \tag{1-15}$$

式中，F_{xy}是 $\boldsymbol{F}$ 在平面 S 内的投影的大小；h 是原点 O 到矢量 $\boldsymbol{F}_{xy}$的垂直距离。

由此定义：**力对轴之矩等于此力在垂直于该轴的平面上的投影对该轴与平面交点之矩**。力对轴的矩是代数量，按右手螺旋法则，拇指的指向与轴的正向一致为正，反之为负。

不难得出，当力与轴相交或力平行于轴时，力对轴的矩为零，即在这两种情况下，该力不能使刚体绕此轴转动。

在直角坐标系中，按照力对轴之矩的定义，并根据式（1-11），有

$$M_z(\boldsymbol{F}) = M_O(\boldsymbol{F}_{xy}) = M_O(\boldsymbol{F}_x) + M_O(\boldsymbol{F}_y) = -yF_x + xF_y$$

同理也可以得到 $M_x(F)$和 $M_y(F)$，可以得到

$$\begin{cases} M_x(\boldsymbol{F}) = yF_z - zF_y \\ M_y(\boldsymbol{F}) = zF_x - xF_z \\ M_z(\boldsymbol{F}) = xF_y - yF_x \end{cases} \tag{1-16}$$

比较式（1-11）和式（1-16），可以得出结论：**力对点之矩在通过该点的坐标轴上的投影等于力对该轴的矩**，称之为**力矩关系定理**。

例题 1-2　如图 1-12 所示，作用于齿轮上的啮合力 $F_n=1\text{kN}$，齿轮的分度圆直径 $D=160\text{mm}$，压力角 $\alpha=20°$，求啮合力 $\boldsymbol{F}_n$ 对于轮心 O 的矩。

分析：齿轮是机械中常用的传动构件，计算力 $\boldsymbol{F}_n$ 对 O 的矩可以采用力矩的定义直接计算，也可以采用合力矩定理进行计算。