工业和信息化普通高等教育
"十三五"规划教材立项项目

21世纪高等院校信息与通信工程规划教材

21st Century University Planned Textbooks of Information and Communication Engineering

信号与系统

孙爱晶 吉利萍 党薇 编著

Signals and Systems

中国工信出版集团 人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

高校系列

工业和信息化普通高等教育
“十三五”规划教材立项项目

信号与系统

Signals and Systems

孙爱晶 吉利萍 党薇 编著

纪高等院校信息与通信工程规划教材
ry University Planned Textbooks of Information and Communication Engineering

人民邮电出版社
北京

高校系列

图书在版编目（CIP）数据

信号与系统 / 孙爱晶，吉利萍，党薇编著. -- 北京：人民邮电出版社，2015.9
21世纪高等院校信息与通信工程规划教材
ISBN 978-7-115-39750-8

Ⅰ. ①信… Ⅱ. ①孙… ②吉… ③党… Ⅲ. ①信号系统－高等学校－教材 Ⅳ. ①TN911.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第165489号

内容提要

本书全面系统地论述了信号与系统的基本理论和分析方法，主要内容包括信号与系统的基本概念，连续时间信号与系统的时域、频域和 S 域分析，离散时间信号与系统的时域、频域和 Z 域分析，系统的状态变量分析。本书采用连续与离散并行、先时域后变换域的结构体系，对课程内容做了适当的调整。内容取材上突出基本理论、基本概念和基本方法，注重工程应用和实例分析，引入MATLAB软件进行信号与系统分析的仿真实现。

本书可作为高等学校电子信息工程、通信工程、测控技术与仪器、光信息科学与技术、计算机科学与技术、电气工程及自动化等专业的本科生教材，也可供相关专业科技工作人员参考。

◆ 编　　著　孙爱晶　吉利萍　党　薇
　责任编辑　张孟玮
　执行编辑　李　召
　责任印制　沈　蓉　彭志环
◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路 11 号
　邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
　网址　http://www.ptpress.com.cn
　北京艺辉印刷有限公司印刷
◆ 开本：787×1092　1/16
　印张：21　　　　　　2015 年 9 月第 1 版
　字数：500 千字　　　2015 年 9 月北京第 1 次印刷

定价：49.80 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315

前 言

“信号与系统”课程主要研究信号通过线性时不变系统进行传输、处理的基本理论和基本分析方法，着力提高学生应用系统思想、观点和方法去分析、研究和解决客观世界实际问题的能力。

目前，本科“信号与系统”课程的要求、任务和基本内容相对稳定，编者仔细分析了国内外同类教材的特点和使用情况，结合多年的教学改革与实践成果，重新组织和编撰了此教材。

关于本书的编写思想和风格特点，有以下几点说明。

（1）本教材充分借鉴现有同类教材的优点，在章节安排上采用连续与离散并行、先时域后变换域的结构体系。第 2、4、5 章分别讨论连续系统的时域、频域和 S 域分析，第 3、6 章分别讨论离散系统的时域和 Z 域分析，内容阐述尽可能详略得当。在时域分析中，突出基本信号的定义、性质和信号分解的理论，以及系统的描述与时域特性，强调各种响应的重要概念；在变换域分析中，突出 Fourier 变换、Laplace 变换和 Z 变换的数学概念、物理概念和工程概念，淡化其数学运算和技巧，建立信号频谱、频域响应和系统函数的物理概念，突出系统函数对系统特性分析的重要作用。

（2）本教材系统性强，内容编排连贯，在强调信号与系统理论分析的基础上，引入 MATLAB 软件加强工程应用理念，在各章的理论讲解之后利用 MATLAB 程序进行仿真实现，简明易懂易操作。从根本上将学生只注重计算习题转移到注重对基本概念、基本原理和基本方法的理解和应用，提高学习效率和效果，培养训练学生的工程应用能力。

（3）本教材注重与后续专业课程的衔接，适当引入通信系统方面的实例，有助于学生对知识的深入理解应用，增强学生灵活运用知识的能力。

本教材由孙爱晶任主编并编写第 1、3、7 章，吉利萍编写第 2、4 章，党薇编写第 5、6 章。孙爱晶负责全书统稿。与作者多年共同从事本课程教学的各位老师对本书的出版给予了很大支持，在此深表感谢。同时，对所有参考文献的作者表示崇高的敬意和真诚的感谢！

限于编者水平，书中错误与不足在所难免，恳请读者批评指正。

作者联系方式为：sunaijing@xupt. edu. cn。

编　者

2015 年 6 月于西安

目录

第1章 信号与系统

从古至今,信号与系统的概念一直体现在我们生活和社会的方方面面。我国古代利用烽火传送边疆战报,古希腊人以火炬的位置表示字母符号;现在人们使用手机、电视、互联网等工具和设备相互问询、发布新闻。其目的都是将想传递的消息借助相应形式的信号通过一定的工具和设备传送出去。信号是消息的表现形式,工具和设备都可以看成是系统。

围绕信号与系统的许多方面有很多问题可以研究,信号理论涉及信号分析、信号传输、信号处理和信号综合,系统理论包括系统分析和系统综合。信号分析主要讨论信号的表示、信号的性质等;系统分析主要研究对于给定的系统,在输入信号作用下产生的输出信号。信号分析与系统分析之间关系紧密又各有侧重,前者侧重信号的解析表示、性质、特征等,后者侧重系统的特性、功能等。信号分析和系统分析是信号传输、信号处理、信号综合及系统综合的共同理论基础。本书主要介绍信号分析和系统分析的基本概念和基本分析方法,为读者进一步学习网络理论、通信理论、信号处理和信号检测理论等奠定基础。

本章主要介绍信号的基本描述方法、分类及其基本运算,系统的基本概念和描述方法,线性时不变系统的概念,冲激信号和阶跃信号的物理意义及其性质。

1.1 信号与系统基本概念

虽然在各个不同领域中出现的信号与系统其物理性质各不相同,但都具备基本的共同属性,信号与系统分析就是从引入信号与系统的数学描述及表示入手,利用这些数学表示阐述隐含在信号与系统分析之中的基本概念,以便对信号与系统有一个深入而直观的理解。

1.1.1 信号的基本概念

人类社会的发展中,人们始终在寻求各种信息的传输方式。古代利用击鼓鸣金、信鸽、旗语、驿站等方式传送消息,19 世纪初,人们研究利用电信号传送消息,1837 年莫尔斯(F. B. Morse)发明了用点、划、空组合的莫尔斯电码,1876 年贝尔(A. G. Bell)发明了电话,直接将声音信号转变为电信号沿导线传输,1901 年马可尼(G. Marconi)成功实现了横渡大西洋的无线电通信。如今,以卫星通信技术为基础构成的“全球定位系统”(GPS),可以利用无线电信号的传输,测定地球表面和周围空间任意目标的位置,其精度可达数十米之内。未来,人们利用手持通信机,可以实现任何人在任何时候和任何地方都能够与世界上其他人进行通信。

可见,信号是信息的载体,通过信号来传递信息。为了有效地传播和利用信息,常常需要将信息转换成便于传输和处理的信号。例如,人的声道系统所产生的语音信号就是一种

声压的起伏变化，电子线路系统中随时间变化的电压或电流信号，光学成像系统（如照相机）中分布于空间各点的灰度信号。抽去各类具体物理系统中运动和变化的各种量（如声压、电压、电流、光强等）的物理含义，在数学上，信号总是可以表示为一个或多个变量的函数。例如，一个语音信号可以表示为声压随时间变化的函数，随时间变化的电压或电流信号可以表示为独立变量 t 的函数 $f(t)$，光学成像系统（如照相机）中，系统由透镜组成，灰度信号可以表示为二维空间坐标 x，y 的函数，如果图像是运动的，则可表示为空间坐标 x，y 和时间 t 的函数 $f(x,y,t)$。信号是一个独立变量的函数时，称为一维信号，如果信号是 n 个独立变量的函数，就称为 n 维信号。本书的讨论范围仅限于一维变量的函数，在以后的讨论中一般总是用时间来表示自变量；主要讨论电信号，即随时间变化的电压或电流。

描述信号可以写出它的数学表达式，并且表达式是时间的函数，也可以绘出函数的图形称为信号的波形。为了便于讨论，在本书中常常把信号与函数两个名词通用。除了表达式和波形两种直观的基本描述方法外，随着问题的深入，需要用频谱分析、各种正交变换以及其他方式来描绘和研究信号。

1.1.2 系统的基本概念

“系统”是由若干相互作用和相互依赖的事物按照一定规律组成的具有特定功能的整体。人们在自然科学及工程、经济、社会等领域中，广泛地引用“系统”的概念、理论和方法，并结合各学科自身的规律，建立相应的数学模型，研究各自的问题，因此，不同领域的系统具有不同的属性和规律。

通信系统的作用是完成信号的传输与交换，将发送方的信号传送给接收方，同时，通信系统也可以看作由许多简单系统组成，例如，通信系统中的滤波器可以看成一个简单的系统，而由同步卫星和地面接收站等构成的通信系统则是一个庞大的复合系统。

由发电、输电、变电、配电和用电等环节组成的电能生产与消费系统。它的功能是将自然界的一次能源通过发电动力装置转化成电能，再经输电、变电和配电将电能供应到各用户。为实现这一功能，电力系统在各个环节和不同层次还具有相应的信息与控制系统，对电能的生产过程进行测量、调节、控制、保护、通信和调度，以保证用户获得安全、经济、优质的电能。

机械系统通常由动力系统、传动系统、执行系统、支承系统和操纵控制系统组成。动力系统指动力机（或原动机）及其配套装置，是给机械系统提供动力、实现能量转换的部分。传动系统是将动力机动力和运动传递给执行系统的中间装置。执行系统或工作机是利用机械能来改变作业对象性质、状态、形状或位置，或对作业对象进行检测、度量等以进行生产或达到其他预订要求的装置。支承系统包括基础件支承构件，用于安装和支承动力系统、传动系统、执行系统和操纵控制系统等，是机械系统中不可缺少的部分。操纵控制系统是为了使动力系统、传动系统、执行系统彼此协调运行，并准确可靠的完成整机功能的装置。

通信系统、电力系统、机械系统等可称为物理系统；除此之外，政治结构、经济组织、生产管理等则属于非物理系统。而自然系统中，小至原子核，大如太阳系，可以是有生命的，也可以是无生命的。计算机网、交通运输网、水利灌溉网以及交响乐队等是人工系统，以此为背景，出现了一门边缘技术学科，就是系统工程学。

本书的讨论着重围绕系统分析，不涉及系统工程学方面的问题，主要以通信系统和控制系统的基本问题为背景，研究信号经系统传输或处理的一般规律，着重基本概念和基本分析方法。可见，信号的概念与系统的概念是紧密相连的，信号在系统中按照一定规律运动、变化，系统在输入信号的驱动下对它进行“加工”“处理”，并发送输出信号。通常，我们将系统的输入信号称为激励，将系统的输出信号称为响应，如图 1.1 所示。

图 1.1　信号与系统

1.2　信号的分类

可以从多种角度来观察、分析研究信号的特征，提出对信号进行分类的方法。常用的有确知信号与随机信号分类；连续时间信号与离散时间信号分类；周期信号与非周期信号分类；能量信号与功率信号分类；因果信号与反因果信号分类等。

1.2.1　确知信号与随机信号

若信号被表示为一确定的时间函数，对于指定的某一时刻，可确定一相应的函数值，这种信号称为确知信号。例如，我们熟知的正弦信号。但是，实际传输的信号往往具有不可预知的不确定性，这种信号称为随机信号。如果通信系统中传输的信号都是确定的时间函数，接收者就不可能由它得知任何新消息，这样就失去了通信的意义。此外，在信号传输过程中不可避免的要受到各种噪声和干扰的影响，这些噪声和干扰都具有随机性。对于随机信号，不能给出确切的时间函数，只可能知道它的统计特性，如在某时刻取某一数值的概率。

确知信号与随机信号有着密切的联系，在一定条件下，随机信号也会表现出某种确定性。例如，声音表现为某种周期性变化的波形，电码可描述为具有某种规律的脉冲波形等等。虽然在实际中经常遇到的信号一般都是随机信号，但作为理论上的抽象，应该首先研究确定性信号，因为它是一种理想化的模型，在此基础上才能根据随机信号的统计特性规律进一步研究随机信号的特性。本书只讨论确知信号。

1.2.2　连续时间信号与离散时间信号

根据信号定义域取值的连续性与离散性可将信号分为连续时间信号和离散时间信号。

1. 连续时间信号

在连续时间范围内有定义的信号称为连续时间信号，简称连续信号。连续信号可用函数式或波形表示。这里“连续”是指函数在定义域上的取值是连续的，至于信号的值域取值可以是连续也可以不是。例如，连续时间信号 $f_1(t)$ 的函数表达式为

$$f_1(t)=\sin(\pi t),\ -\infty<t<\infty \tag{1-2-1}$$

它在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 和值域 $[-1,1]$ 上的取值都是连续的，其波形如图 1.2(a)所示。连续时间信号 $f_2(t)$ 的函数表达式为

$$f_2(t)=\begin{cases}0,t<0\\1,0<t<1\\-1,1<t<2\\0,t>2\end{cases} \tag{1-2-2}$$

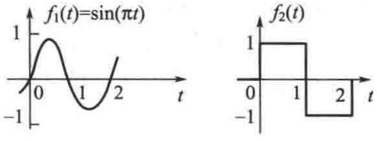


图 1.2　连续时间信号

它在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上的取值都是连续的，但在值域上只取 -1、0、1 三个离散值。其波形如图 1.2(b)所示。信号 $f_2(t)$ 在 $t=0$、$t=1$ 和 $t=2$ 处有间断点，为了使函数定义更加完整，规定若函数 $f(t)$ 在 $t=t_0$ 处有间断点，则函数在该点的值等于其左极限 $f(t_{0_-})$ 与右极限 $f(t_{0_+})$ 之和的 $\dfrac{1}{2}$，即

$$f(t_0)=\frac{1}{2}[f(t_{0_-})+f(t_{0_+})] \tag{1-2-3}$$

式中 $f(t_{0_-})\overset{\text{def}}{=}\lim\limits_{\varepsilon\to 0}f(t_0-\varepsilon)$，$f(t_{0_+})\overset{\text{def}}{=}\lim\limits_{\varepsilon\to 0}f(t_0+\varepsilon)$。这样信号在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 均有确定的函数值。

2. 离散时间信号

离散时间信号在时间取值上离散的，只在某些不连续的规定瞬时给出函数值，在其他时间没有定义，简称离散信号。设离散信号取值的时刻为 $t_k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，则时刻 t_k 与时刻 t_{k+1} 之间的间隔 $T_k=t_{k+1}-t_k$ 可以是常数，也可以随 k 变化。本书只讨论 T_k 为常数的情况。若令相继时刻 t_{k+1} 与 t_k 之间的间隔为常数 T，则离散信号只在均匀离散时刻 $t=\cdots,-2T,-T,0,T,2T,\cdots$ 时有定义，它可以表示为 $f(kT)$，因为 T 为常数，为了方便起见，将 $f(kT)$ 简记为 $f(k)$。这样的等间隔离散信号也常称为序列，k 称为序号。

序列 $f(k)$ 的数学表达式可以写成闭合形式，如式(1-2-4)表示 $f_1(k)$ 为单边指数序列。也可以逐个列出序列 $f(k)$ 的值，通常把对应某序号 m 的序列值称为第 m 个样点的“样值”，如式(1-2-5)列出了序列 $f_2(k)$ 的每个样值。为了简化表达方式，序列 $f_2(k)$ 也可以表示如式(1-2-6)，式子中数字 2 下面的箭头 ↑ 表示与 $k=0$ 相对应，左右两边依次是 k 取负整数和 k 取正整数相对应的 $f_2(k)$ 的值。$f_3(k)$ 为正弦序列。同样，离散信号也可以用波形表示，如图 1.3 所示为 $f_1(k)$、$f_2(k)$ 和 $f_3(k)$ 的波形。

$$f_1(k)=\begin{cases}e^{-ak}, & k\geqslant 0, a>0\\ 0, & k<0\end{cases} \tag{1-2-4}$$

$$f_2(k)=\begin{cases}1, & k=-1\\ 2, & k=0\\ -1.5, & k=1\\ 2, & k=2\\ 0, & k=3\\ 1, & k=4\\ 0, & \text{其他 } k\end{cases} \tag{1-2-5}$$

$$f_2(k)=\{\cdots,0,1,\underset{\substack{\uparrow\\ k=0}}{2},-1.5,2,0,1,0,\cdots\} \tag{1-2-6}$$

$$f_3(k)=A\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right) \tag{1-2-7}$$

下面介绍几个典型的连续信号和离散信号。

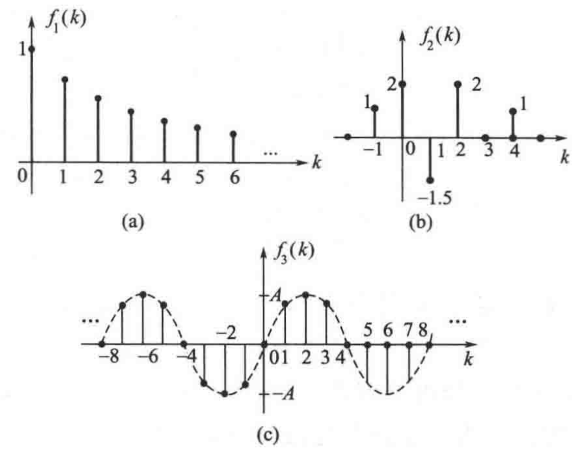


图 1.3 离散时间信号

(1) 单位阶跃函数和单位阶跃序列

单位阶跃函数 $\varepsilon(t)$ 的波形如图 1.4(a)所示,函数在 $t=0$ 处有间断点,参照式(1-2-3)的规定可将单位阶跃函数 $\varepsilon(t)$ 定义为

$$\varepsilon(t) \xlongequal{\text{def}} \begin{cases} 0, t<0 \\ \dfrac{1}{2}, t=0 \\ 1, t>0 \end{cases} \tag{1-2-8}$$

单位阶跃函数 $\varepsilon(t)$ 的物理背景是在 $t=0$ 时刻对某一电路接入单位电源(可以是直流电压源或直流电流源),并且无限持续下去,图 1.4(b)所示为接入 1V 直流电压源的情况,在接入端口处电压为单位阶跃信号 $\varepsilon(t)$ 。

$\varepsilon(t)$ 是可积函数,它的积分称为斜升函数,用 $r(t)$ 表示,即

$$r(t)=\int_{-\infty}^{t}\varepsilon(x)\mathrm{d}x=t\varepsilon(t) \tag{1-2-9}$$

与连续时间信号 $\varepsilon(t)$ 相对应的离散时间信号

$$\varepsilon(k) \xlongequal{\text{def}} \begin{cases} 0, k<0 \\ 1, k\geqslant 0 \end{cases} \tag{1-2-10}$$

称为单位阶跃序列,波形如图 1.4(c)所示,其值域只有 0、1 两个数值。

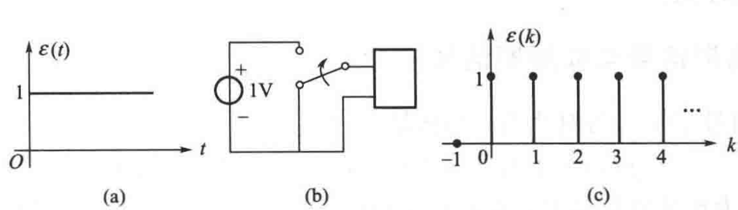


图 1.4 单位阶跃函数和单位阶跃序列

(2) 单位序列

单位序列 $\delta(k)$ 的定义为

$$\delta(k) \xlongequal{\text{def}} \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k\neq 0 \end{cases} \tag{1-2-11}$$

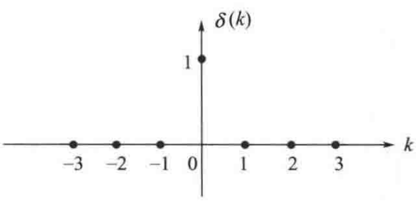


图 1.5　单位序列

单位序列也称为单位样值(或取样)序列或单位脉冲序列。它只在 $k=0$ 处取值为 1,而在其余各点均为零,波形如图 1.5 所示。

(3) 复指数信号和复指数序列

如果指数信号的指数因子为一复数,则称为复指数信号,其表示式为

$$f(t)=K\mathrm{e}^{st} \qquad (1-2-12)$$

其中 $s=\sigma+\mathrm{j}\omega$,$\sigma$ 为复数 s 实部,ω 是其虚部。借助欧拉公式将式(1-2-12)展开,可得

$$K\mathrm{e}^{st}=K\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}=K\mathrm{e}^{\sigma t}\cos(\omega t)+\mathrm{j}K\mathrm{e}^{\sigma t}\sin(\omega t) \qquad (1-2-13)$$

此结果表明,一个复指数信号可分解为实、虚两部分。其中,实部包括余弦信号,虚部包括正弦信号。指数因子实部 σ 表征了正弦与余弦函数振幅随时间变化的情况。若 $\sigma>0$,正弦、余弦信号是增幅振荡,若 $\sigma<0$,正弦、余弦信号是衰减振荡。指数因子的虚部 ω 则表示正弦与余弦信号的角频率。两个特殊情况是:当 $\sigma=0$,即 s 为纯虚数,则正弦、余弦信号是等幅振荡;而当 $\omega=0$,即 s 为实数,则复指数信号成为一般的指数信号;最后,若 $\sigma=0$,$\omega=0$,即 $s=0$,则复指数信号的实部和虚部都与时间无关,成为直流信号。

虽然实际中不可能产生复指数信号,但是它概括了多种情况,可以利用复指数信号来描述各种基本信号,如直流信号、指数信号、正弦或余弦信号以及增长或衰减的正弦与余弦信号。由于正弦与余弦信号二者相位相差 $\frac{\pi}{2}$,后续讨论将统称为正弦信号。利用复指数信号可使许多运算和分析得以简化。在信号分析理论中,复指数信号是非常重要的基本信号之一。

离散时间的复指数序列可表示为

$$f(k)=\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{j}\beta)k}=\mathrm{e}^{\alpha k}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta k} \qquad (1-2-14)$$

令 $a=\mathrm{e}^{\alpha}$,上式可展开为

$$f(k)=a^k\cos(\beta k)+\mathrm{j}a^k\sin(\beta k) \qquad (1-2-15)$$

可见,复指数序列的实部和虚部均为幅值随 k 变化的正(余)弦序列。式(1-2-15)中 a 反映了信号振幅随 k 变化的状况,而 β 是振荡角频率。若 $a>1$(即 $\alpha>0$),它们是幅度增长的正(余)弦序列;若 $a=1$(即 $\alpha=0$),是等幅的正(余)弦序列;若 $a<1$(即 $\alpha<0$),则是幅度衰减的正(余)弦序列。

1.2.3　周期信号与非周期信号

一个连续信号 $f(t)$,若对所有 t 均满足

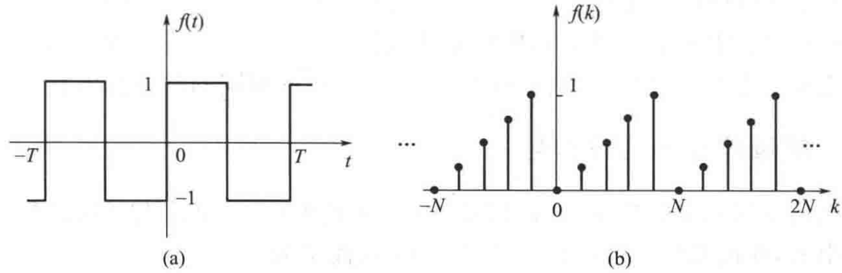
$$f(t)=f(t+mT),\quad m=0,\pm1,\pm2,\cdots \qquad (1-2-16)$$

则称 $f(t)$ 为连续周期信号,满足上式的最小的 T 值称为 $f(t)$ 的周期,如图 1.6(a)所示。

一个离散序列 $f(k)$,若对所有 k 均满足

$$f(k)=f(k+mN),\quad m=0,\pm1,\pm2,\cdots \qquad (1-2-17)$$

则称 $f(k)$ 为周期序列,满足上式的最小的整数 N 值称为 $f(k)$ 的周期,如图 1.6(b)所示。不具有周期性的信号称为非周期信号。



(a)　　　(b)

图 1.6　周期信号

【例 1-1】 试判断下列信号是否是周期信号，若是周期信号，确定其周期。

(1) $f_1(t)=\sin(2t)+\cos(3t)$；(2) $f_2(t)=\cos(2t)+\sin(\pi t)$。

解： 若两个周期信号 $x(t)$、$y(t)$ 的周期分别为 T_1 和 T_2，当周期之比 T_1/T_2 为有理数时，其和信号 $x(t)+y(t)$ 仍然是周期信号，周期为 T_1 和 T_2 的最小公倍数。

(1) $\sin(2t)$ 是周期信号，其角频率和周期分别为 $\omega_1=2\text{rad/s}$，$T_1=2\pi/\omega_1=\pi\text{s}$。$\cos(3t)$ 是周期信号，其角频率和周期分别为 $\omega_2=3\text{rad/s}$，$T_2=2\pi/\omega_2=(2\pi/3)\text{s}$。由于 $T_1/T_2=3/2$ 为有理数，故 $f_1(t)$ 为周期信号，其周期为 T_1 和 T_2 的最小公倍数 $2\pi\text{s}$。

(2) $\cos(2t)$ 和 $\sin(\pi t)$ 的周期分别为 $T_1=\pi\text{s}$，$T_2=2\text{s}$，由于 $T_1/T_2=\pi/2$ 为无理数，故 $f_2(t)$ 为非周期信号。

【例 1-2】 试判断正弦序列 $f(k)=\sin(\beta k)$ 是否为周期序列，若是周期序列，确定其周期。

解：

$$\begin{aligned} f(k)&=\sin(\beta k)=\sin(\beta k+2m\pi)\\ &=\sin\left[\beta\left(k+m\,\frac{2\pi}{\beta}\right)\right]\\ &=\sin[\beta(k+mN)],m=0,\pm1,\pm2,\cdots \end{aligned}$$

当 $2\pi/\beta$ 为整数时，正弦序列具有周期 $N=2\pi/\beta$；当 $2\pi/\beta$ 为有理数时，正弦序列仍具有周期性，但其周期为 $N=M(2\pi/\beta)$，M 取使 N 为整数的最小整数；当 $2\pi/\beta$ 为无理数时，正弦序列为非周期序列。本例题中 β 称为正弦序列的数字角频率，单位为 rad。

【例 1-3】 试判断下列序列是否是周期序列，若是周期序列，确定其周期。

(1) $f_1(k)=\sin(3\pi k/4)+\cos(0.5\pi k)$；　(2) $f_2(k)=\sin(2k)$。

解： (1) $\sin(3\pi k/4)$ 和 $\cos(0.5\pi k)$ 的数字角频率分别为 $\beta_1=3\pi/4\text{rad}$，$\beta_2=0.5\pi\text{rad}$。由于 $2\pi/\beta_1=8/3$，$2\pi/\beta_2=4$ 均为有理数，故它们的周期分别为 $N_1=8$，$N_2=4$，因此，$f_1(k)$ 为周期序列，其周期为 N_1和 N_2的最小公倍数 8。

(2) $\sin(2k)$ 的数字角频率为 $\beta_1=2\text{rad}$，由于 $2\pi/\beta_1=\pi$ 为无理数，故 $f_2(k)$ 为非周期序列。

通过上述例题，可以得出值得注意的两点：

(1) 连续时间的正弦函数一定是周期信号，其周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$。而对离散的正弦(或余弦)序列，只有当 $\dfrac{2\pi}{\beta}$ 为有理数时才是周期序列，其周期 $N=M\,\dfrac{2\pi}{\beta}$，M 取使 N 为整数的最小整数。

(2) 两个连续周期信号之和不一定是周期信号。只有当这两个连续信号的周期 T_1 与 T_2 之比为有理数时，其和信号才是周期信号，周期 T 等于 T_1 与 T_2 的最小公倍数。两个离散周期序列之和一定是周期序列，其周期 N 等于两个序列周期的最小公倍数。

1.2.4 能量信号与功率信号

为了研究信号的能量和功率，假设信号(电压或电流)通过单位电阻所消耗的能量和功率可以计算出来，在此基础上推广得到信号 $f(t)$ 的能量为

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\mathrm{d}t \tag{1-2-18}$$

$f(t)$ 的功率为

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(t)|^2\mathrm{d}t \tag{1-2-19}$$

相应地，离散时间信号 $f(k)$ 的能量定义为

$$E=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|f(k)|^2 \tag{1-2-20}$$

功率定义为

$$P=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=-N/2}^{N/2}|f(k)|^2 \tag{1-2-21}$$

如果信号的能量 E 满足：$0<E<\infty$ (此时信号功率 $P=0$)，则称该信号为能量有限信号，简称能量信号。任何时限有界信号都属于能量信号。如果信号的功率 P 满足：$0<P<\infty$ (此时信号能量 $E=\infty$)，则称该信号为功率有限信号，简称功率信号。直流信号、阶跃信号、有界的周期信号均属于功率信号。一个信号不可能既是能量信号也是功率信号，但有些信号既不属于能量信号也不属于功率信号，如 $f(t)=\mathrm{e}^t$ 。

除此之外，信号还可分为因果信号与反因果信号。常将 $t<0$ 时接入系统的信号 $f(t)$，即在 $t<0$ 时 $f(t)=0$ 的信号称为因果信号或有始信号。单位阶跃信号就是一个典型的因果信号。而将 $t\geqslant 0$ 时 $f(t)=0$ 的信号称为反因果信号。

1.3 信号的基本运算

在信号的传输与处理过程中往往需要对信号进行运算，包括对信号的时域变换(自变量变换)及信号的时域运算。信号的时域变换是指信号在时间域里进行移位、反转、尺度变换以及三者的结合变换。连续信号的常用时域运算有加、减、乘、微分、积分等；离散信号的常用时域运算有加、减、乘、差分、求和等。

1.3.1 信号的加、减、乘

信号 $f_1(\cdot)$* 与 $f_2(\cdot)$ 相加或相减(瞬时和或差)是指同一瞬时两信号之值对应相加或相减所得到的“和信号”或“差信号”，即相加运算为

$$f(\cdot)=f_1(\cdot)+f_2(\cdot) \tag{1-3-1}$$

---

* $f(\cdot)$表示对 $f(t)$和 $f(k)$均适用。

相减运算为

$$f(\cdot)=f_1(\cdot)-f_2(\cdot) \tag{1-3-2}$$

信号 $f_1(\cdot)$ 与 $f_2(\cdot)$ 之积是指同一瞬时两信号之值对应相乘所得到的"积信号",即相乘运算为

$$f(\cdot)=f_1(\cdot)f_2(\cdot) \tag{1-3-3}$$

【例 1-4】 已知信号 $f_1(t)=\sin(\Omega t)$，$f_2(t)=\sin(4\Omega t)$，求 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 之和 $f_3(t)$，$f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 之积 $f_4(t)$。

解：

$$f_3(t)=f_1(t)+f_2(t)=\sin(\Omega t)+\sin(4\Omega t)$$

$$f_4(t)=f_1(t)f_2(t)=\sin(\Omega t)\sin(4\Omega t)$$

波形如图 1.7(a)和(b)所示。

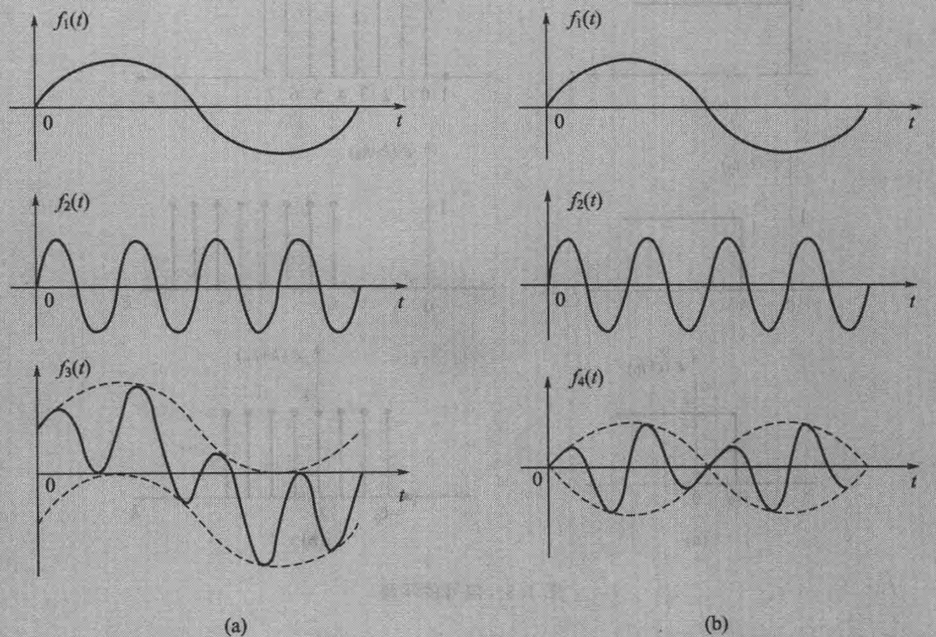


图 1.7 例 1-4 图

【例 1-5】 已知信号

$$f_1(k)=\begin{cases}2, & k=-1\\ 3, & k=0\\ 6, & k=1\\ 0, & k\text{ 为其他}\end{cases}, \quad f_2(k)=\begin{cases}3, & k=0\\ 2, & k=1\\ 4, & k=2\\ 0, & k\text{ 为其他}\end{cases}$$

求 $f_1(k)$ 与 $f_2(k)$ 之差 $f(k)$。

解：

$$f(k)=f_1(k)-f_2(k)=\begin{cases}2, & k=-1\\ 0, & k=0\\ 4, & k=1\\ -4, & k=2\\ 0, & k\text{ 为其他}\end{cases}$$