



经典数学系列



# 测来测去

## 长度、面积、体积

齐浩然 编著



金盾出版社

经典数学系列

# 测来测去

## 长度、面积、体积

齐浩然 编著

 金盾出版社

## 内 容 提 要

书中测量长度、面积、体积的内容犹如一个百变的魔术秀，将从各种有趣的起点出发，带你欢乐当中学习到那些你平时认为非常枯燥的有关长度、面积、体积方面的数学知识。读完本书，你可能会发现，原来这一切并没有你想象的如此复杂、枯燥，学习数学也可以如此的有趣。

### 图书在版编目(CIP)数据

测来测去：长度、面积、体积 / 齐浩然编著. —北京：金盾出版社，2015.5  
(经典数学系列)

ISBN 978-7-5186-0016-8

I. ①测… II. ①齐… III. ①初等几何—青少年读物 IV. ①0123.3-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第021829号

### 金盾出版社出版、总发行

北京市太平路5号(地铁万寿路站往南)

邮政编码：100036 电话：68214039 83219215

传真：68276683 网址：www.jdcbs.cn

北京市业和印务有限公司印刷、装订

各地新华书店经销

开本：700×1000 1/16 印张：10.75 字数：198千字

2015年5月第1版第1次印刷

印数：1~10 000册 定价：26.80元

---

(凡购买金盾出版社的图书，如有缺页、  
倒页、脱页者，本社发行部负责调换)

目  
录  
contents

不要轻率地对待测量·····	1
一段线有多长·····	13
那把又直又长的尺子·····	29
这些图形·····	31
重量的概念是什么·····	79
角·····	84
面积问题·····	87
你的密度是多少·····	96
时间为什么不受控制·····	107
你的体积是多少·····	114
如何测量海拔高度·····	120
长度的测量·····	126
生活中实用长度计算·····	130
自行车的链条·····	136
解开面积习题·····	139

利用面积学来买房·····	146
体积和容积的意义·····	151
体积奥秘小故事·····	156
谈体积、质量和重力的起源·····	160
长度、面积与体积等概念的共同本质结构··	167



## 不要轻率地对待测量

测量是按照某种规律，用数据来描述观察到的现象，即对事物作出量化描述。测量是对非量化实物的量化过程。

### 测量的定义

1. 早期的定义：研究地球的形状和大小，确定地面点的坐标的学科。
2. 当前的定义：研究三维空间中各种物体的形状、大小、位置、方向和其分布的学科。
3. 更为一般的定义：测量是利用合适的工具，确定某个给定对象在某个给定属性上的量的程序或过程。作为测量结果的量通常用数值表示。该数值是在一个给定的量纲或尺度系统下，由属性的量和测量单位的比值决定的。

测量学的内容包括测定和测设两个部分。测定是指使用测量仪器和工具，通过测量和计算，得到一系列测量数据，或把地球表面的地形缩绘成地形图。测设是指把图纸上规划设计好的建筑物、构筑物的



位置在地面上标定出来，作为施工的依据。

## 四个要素

1. 测量对象：主要指几何量，包括长度、角度、表面粗糙度以及形位误差等。由于几何量的特点是种类繁多，形状又各式各样，因此对于它们的特性，被测参数的定义，以及标准等都必须加以研究和熟悉，以便进行测量。

2. 计量单位：我国国务院于1977年5月27日颁发的《中华人民共和国计量管理条例（试行）》第三条规定中重申：“我国的基本计量制度是米制（即公制），逐步采用国际单位制。”1984年2月27日正式公布中华人民共和国法定计量单位，确定米制为我国的基本计量制度。在长度计量中单位为米，其他常用单位有毫米和微米。在角度测量中以度、分、秒为单位。

3. 测量方法：指在进行测量时所用的按类叙述的一组操作逻辑次序。对几何量的测量而言，是根据被测参数的特点，如公差值、大小、轻重、材质、数量等，分析研究该参数与其他参数的关系，最后确定对该参数如何进行测量的操作方法。



4. 测量的准确度：指测量结果与真值的一致程度。由于任何测量过程不可避免地会出现测量误差，误差大说明测量结果离真值远，准确度低。因此，准确度和误差是两个相对的概念。由于存在测量误差，任何测量结果都是以

一近似值来表示。

## 测量仪器的分类

在几何量测量中，按用途和特点可将它分为以下几种。

### 1. 实物量具

它是指在使用时以固定形态复现或提供给定量的一个或多个已知值的量具。如量块、直角尺、各种曲线样板及标准量规等。

### 2. 极限量规

它是指一种没有刻度的专用检验工具，用这种工具不能得出被检验工件的具体尺寸，但能确定被检验工件是否合格，如光滑极限量规、螺纹极限量规等。

### 3. 显示测量仪器

它是指显示值的测量仪器。这个显示可以是模拟的（连续或非连续）或数字的，可以是多个量值同时显示，也可提供记录。如模拟电压表、数字频率计、千分尺等。

### 4. 测量系统

它是指组装起来进行特定测量的全套测量仪器和其他设备，测量系统可以包含实物量具。固定安装着的测量系统称为测量装备。

几何量测量仪器根据构造上的特点还可以分为以下几种。

#### 1. 游标式测量仪器

如游标卡尺。游标高度尺及游标量角器等。





## 2. 微动螺旋副式测量仪器

如外径千分尺、内径千分尺及公法线千分尺等。

## 3. 机械式测量仪器

如百分表、千分表、杠杆比较仪、扭簧比较仪及三坐标测量机等。

## 4. 光学机械式测量仪器

如光学计、测长仪、投影仪、接触干涉仪、干涉显微镜、光切显微镜、工具显微镜及测长机等。

## 5. 气动式测量仪器

如流量计式、气压计式等。

## 6. 电学式测量仪器

如电接触式、电感式、电容式、磁栅式、电涡流式及感应同步器等。

## 7. 光电式测量仪器

如激光干涉仪、激光准直仪、激光丝杆动态测量、光栅式测量仪以及影像测量仪等。

## 测量分类

**直接测量：**无需对被测量与其他实测量进行一定函数关系的辅助计算，而是直接得到被测量值的测量。



**间接测量：**通过直接测量，与被测参数有已知函数关系的其他量而得到该被测参数量值的测量。

**接触测量：**仪器的测量头与工件的被测表面直接接触，并有机械作用的测力存在。

**不接触测量：**仪器

的测量头与工件的被测表面之间没有机械的测力存在（如光学投影仪和气动量仪测量等）。

**组合测量：**如果被测量有多个，虽然被测量（未知量）与某种中间量存在一定函数关系，但由于函数式有多个未知量，对中间量的一次测量是不可能求得被测量值的。这时可以通过改变测量条件来获得某些可测量的不同组合，然后测出这些组合的数值，解联立方程求出未知的被测量。

**比较测量：**比较法是指被测量与已知的同类度量器在比较器上进行比较，从而求得被测量的一种方法。这种方法用于高准确度的测量。

**零位法：**被测量与已知量进行比较，使两者之间的差值为零，这种方法称为零位法。例如，电桥、天秤、杆秤、检流计。

**偏位法：**被测量直接作用于测量机构使指针等偏转或位移以指示被测量大小。

**替代法：**替代法是将被测量与已知量先后接入同一测量仪器，在不改变仪器的工作状态下，使两次测量仪器的示值相同，则认为被测量等于已知量。例如，曹冲称象。

**累积法：**被测量物体的量值太小，不能够用测量仪器直接测量单一的物体，则测量相同规格的物体集合再求其平均值的方法，如测量一张纸张的厚度、一根头发丝的直径、一颗订书针的质量等。

## 单位

### 测量单位

把测量中的标准量定义为“单位”。单位是一个选定的标准量，独立定义的单位称“基本单位”；由物理关系导出的单位称“导出单位”。

国际单位制（SI）Système International d'Unités

1980年由国际计量大会（CGPM）采纳和推荐的基本标准单位。注：SI是国际单位制的国际通用符号。

目前，国际单位制下7个基本单位：

长度：米（m）

质量：千克（公斤）kg

时间：秒（s）

电流安[培]：A

热力学温度：开[尔文]K

物质的量：摩[尔]Mol

发光强度：坎[德拉]cd

### 测量注意事项

1. 正确读出刻度尺的零刻度、最小刻度、测量范围；
2. 把刻度尺的刻度尽可能与被测物体接近，不能歪斜；
3. 读数时，视线应垂直于被测物体与刻度尺；
4. 除读出最小刻度以上各位数字外，还应估读最小刻度下一位的数字；
5. 记录的测量数据，包括准确值、估计值以及单位（没有单位的数值是毫无意义的）。

对于精密测量，要注意：1. 要考虑测量温度及湿度对测量结果的影响，量具和被测工件尽可能放在同一环境温度中，1m 以下不少于 1.5h，1m ~ 3m 的为 3h，超过 3m 时应在 4h 以上。2. 要减小视力引起的误差。一般常用多次测量求平均值的办法减小误差。3. 测量周围环境要求：无震动、无磁场无粉尘等。

## 工程测量

工程测量在测绘界，人们把工程建设中的所有测绘工作统称为工程测量。实际上它包括在工程建设勘测、设计、施工和管理阶段所进行的各种测量工作，它是直接为各项建设项目的勘测、设计、施工、安装、竣工、监测以及营运管理等一系列工程工序服务的。可以这样说，没有测量工作为工程建设提供数据和图纸，并及时与之配合和进行指挥，任何工程建设都无法开展和完成。

## 大地测量

确定地面点位、地球形状大小和地球重力场的精密测量。内容包括三

角测量、精密导线测量、水准测量、天文测量、卫星大地测量、重力测量和大地测量计算等。任务是：(1) 为地形测图和大型工程测量提供基本的平面和高程控制；(2) 为空间科学和国防建设提供精确的点位坐标、距离、方位角和地球重力场数值；(3) 为研究地球形状大小、地壳运动和地震预报等提供资料。

用于解决大地测量学学科问题和在广大地区内为建立平面和高程控制网所进行的精密测量。测量时，通常应顾及地球形状、大小和重力场因素。它是建立国家和区域大地控制网的基本手段，也是地形测量和其他各种工程测量的基础工作，并为研究和测定地球形状和大小、空间目标坐标和方位，以及地壳变形等提供资料。其平面控制网，一般用三角测量、三边测量、边角测量、精密导线测量和空间大地测量建立，并配合天文测量和重力测量，通常将观测结果归算到地球椭球面上，计算各点的大地坐标，最后通过地图投影换算为平面直角坐标，作为平面基本控制；高程控制网，一般用水准测量建立，以测定各点的正常高，作为高程的基本控制。

## 测量平差

测量平差是德国数学家高斯于 1821 ~ 1823 年在汉诺威弧度测量的三角网平差中首次应用，经过许多科学家的不断完善、发展，测量平差已成为测绘学中很重要的、内容丰富的基础理论与数据处理技术之一。由于测量仪器的精度不准确和人为因素及外界条

件的影响，测量误差总是不可避免的。为了提高成果的质量，处理好这些测量中存在的误差问题，观测值的个数往往要多



于确定未知量所必须观测的个数,也就是要进行多余观测。有了多余观测,势必在观测结果之间产生矛盾,测量平差的目的就在于消除这些矛盾而求得观测量的最可靠结果并评定测量成果的精度。测量平差采用的原理就是“最小二乘法”。

## 测量原理

测量平差是用最小二乘法原理处理各种观测结果的理论和计算方法。测量平差的目的在于消除各观测值间的矛盾,以求得最可靠的结果和评定测量成果的精度。任何测量,只要有多余观测,就有平差的问题。

## 平差目的

为了提高成果的质量,处理好测量中存在的误差问题,要进行多余观测,有了多余观测,势必在观测结果之间产生矛盾。测量平差目的就在于消除这些矛盾而求得观测量的最可靠的结果,并评定测量成果的精度。

## 测量步骤

- (1) 观测数据检核,起始数据正确性的处理;
- (2) 列出误差方程式或条件方程式,按最小二乘法原理进行平差;
- (3) 平差结果的质量评定。按观测量相互间的关系,可分为相关的或不相关的平差。平差的方法有直接平差、间接平差、条件平差、附有条件的间接平差和附有未知数的条件平差等。

## 相关研究

测量误差理论主要表现在对模型误差的研究上,主要包括:平差中函数模型误差、随机模型误差的鉴别或诊断;模型误差对参数估计的影响,对参数和残差统计性质的影响;病态方程与控制网及其观测方案设计的关系。变形监测网参考点稳定性检验的需要,导致了自由网平差和拟稳平差的出现和发展。观测值粗差的研究促进了控制网可靠性理论,以及变形监测网变形和观测值粗差的可区分性理论的研究和发展。针对观测值存在粗差的客观实际,出现了稳健估计(或称抗差估计);针对法方程系数阵存在

病态的可能，发展了有偏估计。与最小二乘估计相区别，稳健估计和有偏估计称为非最小二乘估计。

## 平差应用

### 测量平差理论在计量中的应用

计量科学与测绘科学都是以物理学、数学及近代计算机科学为基础的学科，本质上两者是相容一致的。

在计量学中，对测量不确定度给出的综合的不确定性评价，此评价不但考虑了观测时各种误差因素的联合影响，包括观测时随机效应的影响，一些系统效应的影响，也考



虑了测量时其他因素的影响，文章主要针对这一问题进行探讨，旨在通过对“测量平差理论在计量中的应用”的本质内涵的深入探讨，期望这一问题得到缓解或解决，最终的目的是便于测绘仪器校准工作的开展。

## 测量界限

考虑函数是待定常数，如果在一直线上，可以认为是变量之间的关系。但一般来说，这些点不可能在同一直线上。它反映了用直线来描述时，计算值与实际值产生的偏差。当然偏差越小越好，但由于可正可负，因此不能认为总偏差时，函数就很好地反映了变量之间的关系，因为此时每个偏差的绝对值可能很大。为了改进这一缺陷，就要考虑代替，但是由于绝对值不易作解析运算，因此，进一步用来度量总偏差。因偏差的平方和最小可以保证每个偏差都不会很大。于是问题归结为确定中的常数为最小，用

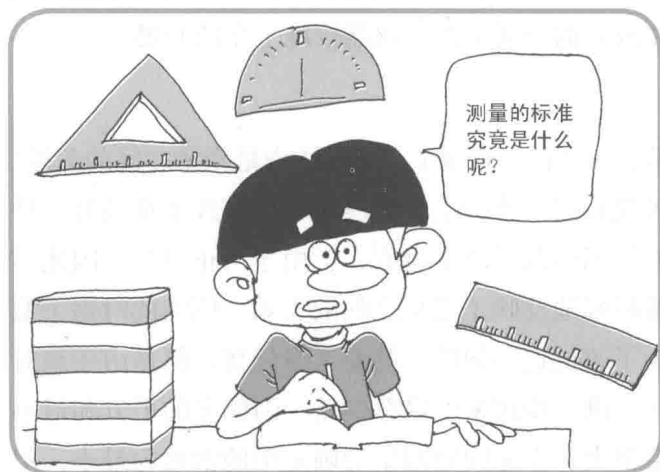
这种确定系数的方法称为最小二乘法。

## 测量精准

其精确定义可以从一组测定的数据中寻求变量之间的依赖关系，这种函数关系称为经验公式。最小二乘法是寻求二者之间近似成线性关系时的经验公式，假定实验测得变量之间个数，在平面上得出多个点这种图形称为“散点图”，最小二乘法是一种数学优化技术，它通过最小化误差的平方和找到一组数据的最佳函数匹配，用最简的方法求得一些绝对不可知的真值。

## 测量标准

测绘中广泛使用的测量平差法，是基于最小二乘法原理的测量数据处理方法，它是利用直接测量采集观测数据（观测向量），再利用此观测数据（观测向量）结合平差数学模型，对被测量结果进行估计的过程，估计方法采用“数理统计学”中著名的“最小二乘法”。平差处理结果包括被测量物体的测量结果和表示这个测量结果不确定性的标准差（中误差）。测量平差法本质上相当于对测量中的随机误差进行了有效地减弱（采集数据量越大，减弱效果越好，直到几乎消除），对测量中不等权的非确定性系统误差（大小水平不一致的非确定性系统误差）进行了合理的分配，但



对于测量中等权的非确定性系统误差（大小水平一致的非确定性系统误差）没有起到消除或减弱作用。所以，平差后所得的测量结果标准差（中误差），只是表示了随机效应导致的测量不确定性（度），是测

量不确定度的随机分量，为了完全表示测量结果不确定性（度），还需要考虑系统效应导致的不确定性（度）并加以合成。

测量平差法虽然包括了一定的现场测量条件，但其测量结果（平差结果）只是测得值所处范围的一个参数（随机误差）。在计量学中，测量的目的是为了确定被测量的量值。测量不确定度就是对测量结果质量的定量表示，测量结果表述必须同时包含被测量的值及与该值相关的测量不确定度，才是完整并有意义的。用测量不确定度表示测量结果不确定性，既要考虑测量结果的系统误差效应，又考虑了测量结果的随机误差效应，严格说还考虑了测量结果的模糊效应，所以测量不确定度具有严密的科学性与严谨性，是测量结果不确定性的精确描述。随机误差（平差结果）是由于测量时的随机因素或效应所引起的相对于被测量真值的偏差，这种随机因素或效应，将导致重复测量时测量结果值的分散性。这说明，随机误差具有随机不确定性，这种不确定性的具体特征就是值的分散性。随机误差应属于随机不确定性量，其数学期望（均值）为零。

$$\begin{aligned} \text{测量结果} &= \text{被测量真值} + \text{系统误差} + \text{随机误差} \\ &= \text{被测量真值} + \text{确定性系统误差} + \text{非确定性系统误差} + \text{随机误差} \\ &= \text{确定性分量} + \text{非确定性分量} \end{aligned}$$

以上讨论了测量平差结果在计量学测量结果不确定度评定中，只是不确定度分量之一。因为，测量结果是被测量真值、系统误差、随机误差（中误差）这三个量的合成，所以不确定性应由这三个量的不确定性决定，研究测量结果不确定度应由这三个量的不确定度着手。仅考虑随机不确定性，是不全面、不客观的。

## 控制测量学

控制测量学是研究精确测定和描绘地面控制点空间位置及其变化的学科。它是在大地测量学的基础理论上以工程建设和社会大战与安全保证的测量工作为主要服务对象而发展和形成的，为人的社会活动提供有用的空间信息。因此，从本质上说，它是地球工程信息学科，是地球科学和



测绘学中的一个重要分支，是工程建设测量中的基础学科，也是应用学科。在测量工程专业人才培养中占有重要的地位。

控制测量的服务对象主要是各种工程建设，城镇建设和土地规划与管理等工作。这就决定它的测量范围与大地测量要小，并且在观测手段和数据处理方法上还具有多样化的特点。

