中學各科綱要叢書

平面幾何

陳朔南 編

商務印書館發行

中學各科綱要叢書

面幾何

陳朔南編

商務印書館發行

中華民國二十七年一月初版
中華民國二十八年五月三版

✠G二九四二
周

(51124·9)

中學各科綱要叢書 平面幾何一冊

每冊實價國幣肆角
外埠酌加運費匯費

編纂者　陳朔南
發行人　王雲五　長沙南正路
印刷所　商務印書館
發行所　商務印書館　各埠

(本書校對者陳忠杰)

編 輯 大 意

一. 本書編輯之目的,在供中學學生升學投考之準備及平時複習,與有志研究幾何者之用.

二. 本書與教科書旨趣不同,將定理及問題分類配列,俾便於自修.

三. 本書所選問題 甚爲豐富,且均屬扼要,對於代表問題,附以略解,以供讀者之參考.

四. 本書在易忽略之處,加入注意,認爲疑難處,則加以詳細之解釋.

五. 本書名詞,均依照教部所審定者.

六. 本書限於時間,忽促譯就,謬誤之處,在所難免,尚希讀者指教是幸.

譯者識於浙江省立民衆教育實驗學校

二十六年四月二十日

目　　次

平 面 幾 何

第一章　直線形

1　三角形的邊的關係

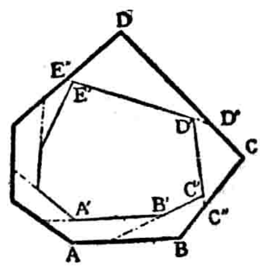
由二點間的最短距離,是為聯結二點的線分的公理,得如下的定理.

〔定理〕　三角形二邊的和大於其他一邊.

由上關於凸多角形周圍的問題如下例.

(例)　凸多角形 $ABCD\cdots\cdots$ 的周圍,是比在其內的任意邊數的凸多角形 $A'B'C'D'E'\cdots\cdots$ 的周圍大.

〔解〕　凸多角形 $A'B'C'D'E'\cdots\cdots$ 的一邊 $D'E'$,不在 $ABCD\cdots\cdots$ 的任何的一邊上,則其向二方延長的延長線被 $ABCD\cdots\cdots$ 的周所截,其截點各為 D'', E'',則此多角形為 $D''E''$ 分成二個凸多角形,如圖.



$$DD''+DE''>D''E''.$$

$\therefore$　$ABCD\cdots\cdots$ 的周

$>ABCD''E''\cdots\cdots$ 的周.

延長 $D'C'$ 邊與 BC 邊相截於 C'',

$$C''C+CD''+D''D'>D'C''.$$

$\therefore$　$ABCD''E''\cdots\cdots$ 的周 $>ABC''D'E''$ 的周.

順此以同理,得證明

$ABCD\cdots\cdots$ 的周 $>A'B'C'D'E'\cdots\cdots$ 的周;

$A'B'C'D'E'\cdots\cdots$ 的幾邊在 $ABCD\cdots\cdots$ 的邊上,

或　　幾個的頂點在 $ABCD\cdots\cdots$ 的周上時,即可由以上的證明得知

問　題　I

1. 設四邊形爲 $ABCD$, 試證
$$AB+CD<AC+BD.$$

2. 設 P 爲 $\triangle ABC$ 內的任意一點,則
$$AB+AC>PB+PC.$$

3. 三角形內的任意一點,到三項點的聯結線的和小於三角形的周.

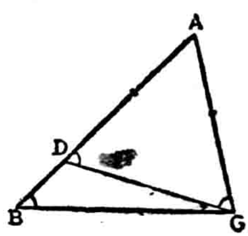
4. 設 $\triangle ABC$ 的中線 AD, 則
$$AB+AC>2AD.$$

〔註〕 由 D 點延長 AD 至 A', 使 $AD=DA'$,
$$AB+AC=AB+BA'>2AA'.$$

5. 角 C 爲三角形 ABC 的鈍角, D 及 E 爲 BC 邊的三等分點,則
$$AB+AC>AD+AE,$$
試證明之.

6. $\triangle ABC$ 的三中線爲 AD, BE, CF, 則
$$AD+BE+CF<AB+BC+AC<2(AD+BE+CF).$$

2. 三角形的邊與角的關係



在 $\triangle ABC$ 中,
$$AB=AC,\quad 則\quad \angle B=\angle C,$$
又
$$\angle B=\angle C,\quad 則\quad AB=AC.$$
若 $AB>AC$, 在 AB 上取 D 點,使
$$AC=AD,$$
則
$$\begin{aligned}\angle ADC&=\angle ACD\\&=\angle B+\angle BCD\\&=\angle C-\angle BCD.\end{aligned}$$
$$\therefore\quad \angle C-\angle B=2\angle BCD.$$

〔定理〕 三角形大邊的對角比小邊的對角大.

其逆 $\angle B<\angle C$, 在 $\angle C$ 內作直線 CD,
$$\angle ACD=\tfrac{1}{2}(\angle B+\angle C),$$

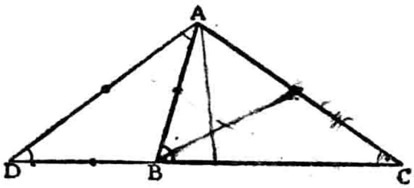
CD 交 AB 於 D, ADC 爲等腰三角形,則 $AB>AC$, 故

〔系〕 三角形大角的對邊比小角的對邊大.

(例) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B=2\angle C$, 則 $AC<2AB$.

〔解〕 由 B 點延長 CB 至 D, 使

$$BD=BA,$$



則 $\triangle ABD$ 爲等腰三角形,故

$$\angle D=\tfrac{1}{2}\angle ABC.$$

$$\therefore\quad \angle C=\angle D.\quad \therefore\quad AC=AD.$$

而 $$BA+BD>AD.\quad \therefore\quad 2AB>AC.$$

問 題 II

1. D 爲 $\triangle ABC$ 的 BC 邊上任意的一點,且 AB 比 AC 小,則
$$AB>AD.$$

2. 凸四邊形 $ABCD$ 的四邊中, AD 最長, BC 最短,則
$$\angle ABC>\angle ADC,\quad \angle BCD>\angle BAD.$$

3. 在 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ 中, $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$, 且 $AB>A'B'$, 則 $BC>B'C'$, $AC>A'C'$.

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB>AC$, 由 B, C 到對邊各作垂線 BD, CE, 則

(1) $BD>CE$.

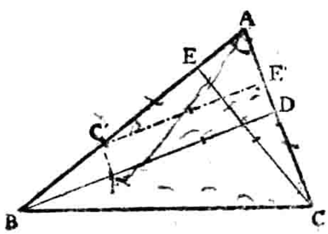
(2) $AB+CE>AC+BD$.

〔註〕 在 AB 上取 C' 點,使
$$AC=AC'.$$

並作 $C'E' \parallel BD$, $C'F \parallel AC$.

$$\therefore\quad \triangle ACF \equiv \triangle AC'E'.$$

$$DF=C'E'=CE.$$



$$BF < BC',$$
$$AC = AC'.$$

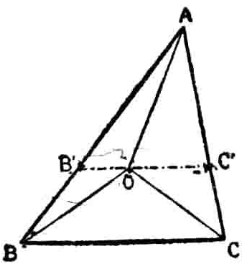
此兩邊相加,得 $AC + BD < AB + CE.$

5. 直角三角形 ABC 的直角頂 A 到斜邊作垂線,則

$$AD + BC > AB + AC.$$

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $BC < CA < AB$, O 爲此三角形內的任意一點,則

$$AO + BO + CO < AB + AC.$$



〔註〕 通過 O 作 $B'C'$, 使 $BC \parallel B'C'$, 在 $\triangle AB'C'$ 中,

$$AB' > AC' > B'C'.$$

又 $AB' > AO,$

$$BB' + B'O > BO,$$
$$CC' + C'O > CO.$$

$\therefore$ $AB + B'C' + C'C > AO + BO + CO.$

$\therefore$ $AB + AC' + C'C > AO + BO + CO,$

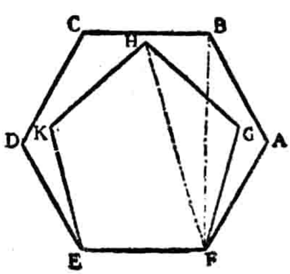
即 $AB + AC > AO + BO + CO.$

7. 在 $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ 中, $AB = DE$, $AC = DF$, $\angle A > \angle D$, 則

$$BC > EF.$$

又 $AB = DE$, $AC = DF$, $BC > EF$, 則 $\angle A > \angle D$.

8. 在線分 EF 的同側,並以 EF 爲邊作正六角形 $ABCDEF$ 及正五角形 $EFGHK$, 則正五角形在正六角形之內.



〔註〕 在 $\triangle FAB$, $\triangle FGH$ 中,

$$AF = GF, \quad AB = GH,$$
$$\angle FAB > \angle FGH.$$

$\therefore$ $BF > HF.$

而 $\angle EFB = \angle R,$

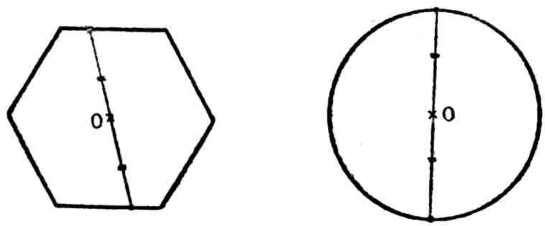
$$\angle EFH < \angle R.$$

故 G, H, K 在正六角形之內.

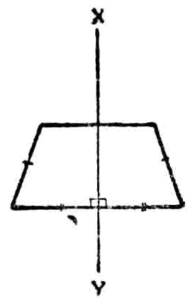
同理,可證明正 n 角形,正 $n+1$ 多角形之內.

3. 對稱的性質

點 A, B 若對於點 O 爲對稱的位置，則 O 卽爲線分 AB 的中點，從而



某圖形若對於點 O 爲對稱，則通過 O，爲其圖形所截取的線分，均在 O 點被平分.

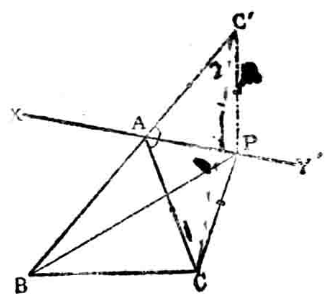


某圖形若對於直線 XY 爲對稱，則該圖形以此直線爲摺紋而摺轉時，兩側的部分完全一致，此性質應用的範圍甚廣，故特別重要，若由於圖形將其移至關於某直線對稱的位置來看，則比較的可以容易看出種種的性質

（例）設有一點 P 在 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的外角平分線上，則

$$AB+AC<PB+PC,$$

試證明之.



〔解〕在 BA 的延長線上取點 C'，令 $AC=AC'$.

點 C, C' 卽爲與 $\angle A$ 外角的二等分線 XY 有關的對稱點.

$$\therefore\quad PC=PC'.$$

$$\therefore\quad PB+PC=PB+PC'.$$

但在 $\triangle BPC'$，　　$BC'<PB+PC'$.

$$\therefore\quad AB+AC<PB+PC.$$

問　題　III

1. 在直線 XY 的同側有點 A, B，對於 XY 爲對稱的 A 的對稱點

爲 A', 直線 $A'B$ 與 XY 的交點爲 C, 又不在 C 的 XY 上任意的點爲 D, 則

$$AC+BC<AD+BD.$$

2. 若以與正三角形 ABC 的一邊 AB 上的點 P 的邊 CB, CA 有關的對稱點,各爲 D, E; 直線 DE 與邊 CB, CA 的交點,各爲 Q, R. 則由 P 向 Q 所打出的球,經 R, 再通過 P, 試證之,但球落於邊上而跳回的前後的通路,在此三角形的平面內,適與其邊成等角.

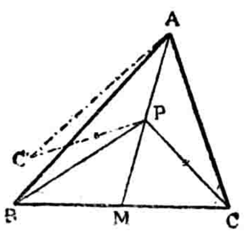
3. 在 $\triangle ABC$ 爲 $AB>AC$, 若以 P 爲由 A 所引中線上任意的點,則 $AB-AC>PB-PC$, 試證明之.

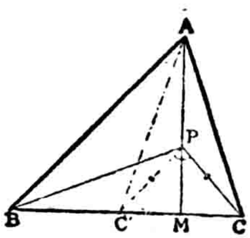
又 P 爲由 A 所作垂線上任意的點時,上式的不等號又該如何?

〔註〕 若對於中線 AM 爲對稱的 C 的對稱點爲 C', 則

$$\angle CAP>\angle BAP.$$

故 C' 在三角形外,而由四邊形 $BPAC'$,





$$AB+PC'>BP+AC'.$$

$$\therefore\quad AB+PC>BP+AC.$$

$$\therefore\quad AB-AC>PB-PC.$$

又 AM 若爲垂線,則

$$\angle CAP>\angle BAP.$$

因而由四邊形 $BC'PA$,

$$AB+PC'<BP+AC'.$$

$$\therefore\quad AB-AC<PB-PC.$$

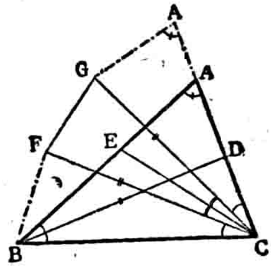
4. 在 $\triangle ABC$ 內, $AB>AC$. 若在 $\angle A$ 的平分線上,取任意的一點 P, 則

$$AB-AC>PB-PC.$$

5. 三角形的大角的平分線,較小角的平分線爲短

〔註〕 在 $\triangle ABC$ 內, $\angle B<\angle C$; $\angle B$, $\angle C$ 的平分線,各爲 BD, CE.

$$\angle CBF=\angle BCA,$$
$$\angle BCF=\tfrac{1}{2}\angle B,$$
$$\angle ACG=\tfrac{1}{2}\angle B,$$
$$CA'=AB,$$
$$A'G \parallel AB.$$



若如上,則

$$\triangle BCD\equiv\triangle CBF,$$
$$\triangle BDA\equiv\triangle CGA'.$$

故 CGF 爲等腰三角形, G 在 $\triangle ABC$ 的形外,且 CE 爲頂角 FCG 的平分線的一部分.

$$\therefore\quad CE<CG.\quad\therefore\quad CE<BD.$$

6. 已知底邊及高的三角形之中,其周圍最小的爲等腰三角形.

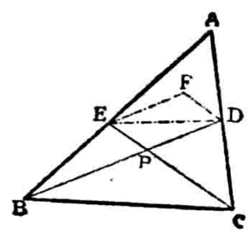
〔註〕 若以底邊爲 BC, 等腰三角形爲 ABC, 其他的三角形爲 BCD, 則頂點 D 在 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 外角的平分線上.

7. 若以 $\triangle ABC$ 內的一點爲 P; BP, CP 的延長線與 AC, AB 的交點各爲 D, E, 則

$$AD+AE>PD+PE.$$

〔註〕 若作平行四邊形 $PDFE$, 則 F 與 ED 有關,與 P 在反對的側面, 且可決定是在 $\triangle AED$ 內.

$$\therefore\quad FE+FD<AE+AD.$$
$$\therefore\quad PD+PE<AD+AE.$$



8. 以 A 爲頂點的等腰三角形 ABC 與三角形 PBC 爲等周,邊 AC 與 PB 在 D 點相交時,則 $AD>PD$.

〔註〕 因 $BP>CP$, 故

$$AB=AC>CP,$$
$$AB=AC<BP.$$

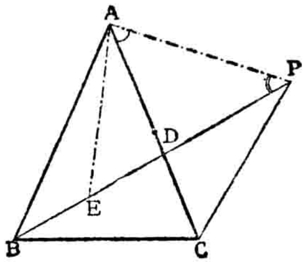
故於 PB 上取 E 點,令 $PE=AB$, 且

$PB+PC=AB+AC.$

$\therefore\ PB-AB=AC-PC.$

$\therefore\ BE=AC-PC,$

即 $PC+BE=AC=AB.$



且在 $\triangle ABE$ 內,

$AE+BE>AB.\quad \therefore\ AE>PC.$

因此比較 $\triangle ACP$, $\triangle PEA$, 即可決定 $\angle CAP<\angle EPA.$

故在 $\triangle ADP$ 中爲 $AD>PD.$

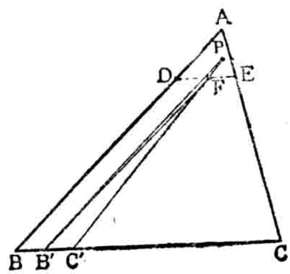
9. 在不等邊三角形 ABC 內, 選適當的一點 P, 又在邊 BC 上選適當的二點 B', C'; 則得 $PB'+PC'>AB+AC$, 試證之.

〔註〕 今爲 $AB>AC$, 邊 AB 上取一點 D, 令爲

$$2BD=AB+AC.$$

通過 D 平行於 BC 的直線,與 AC 的交點爲 E.

由 DE 上任意的點 F, 引與 AB 的平行線,若與 BC 的交點爲 C', 則 $FC'=DB.$



但爲 $\angle B<\angle C,$

故 $\angle FC'B>\angle R.$

依此,若 BC' 內任意的點爲 B', 則

$$FB'>FC'.$$

$\therefore\ FB'+FC'>2FC'.$

$\therefore\ FB'+FC'>AB+AC.$

若又在 $C'F$ 的延長上 $\triangle ADE$ 內,取點 P, 則

$$PB'>FB'.\quad \therefore\ PB'+PC'>AB+AC.$$

這樣,在線分 DE 上,或 $\triangle ADE$ 內取點 P, 則雖說成問題,但可得如上的結果.

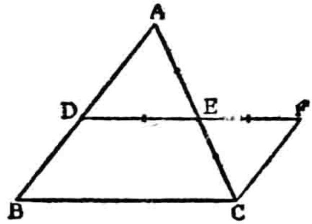
4. 重 心 問 題

$\triangle ABC$ 的邊 AB, AC 的中點各爲 D, E, DE 延長至 F, 使 $DE=EF$, 則

$\triangle ADE \equiv \triangle CEF$.

$\therefore \angle DAE = \angle FCE$.

$\therefore AD = CF$，且 $AD \parallel CF$.



由 $BD \parallel CF$，且 $BD = CF$，故 $BCFD$ 爲平行四邊形.

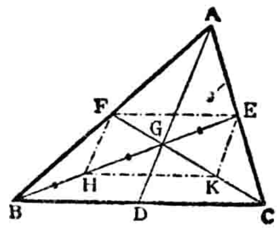
$\therefore BC \parallel DE$，且 $DE = \frac{1}{2}BC$，

卽得下面的一重要定理.

〔定理〕 三角形二邊中點的聯結線，若與第三邊平行，且等於其一半.

此定理很重要，爲基本定理之一，其應用最著的爲三角形的重心定理，卽

〔定理〕 $\triangle ABC$ 的三中線 AD, BE, CF 相交於一點 G.



$$AG = 2GD,$$

$$BG = 2GE,$$

$$CG = 2GF.$$

BE, CF 相交於一點 G, BG, CG 的中點各爲 H, K，則

$$EF \parallel BC, \quad 且 \quad EF = \tfrac{1}{2}BC;$$

$$HK \parallel BC, \quad 且 \quad HK = \tfrac{1}{2}BC.$$

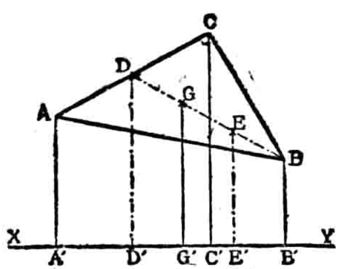
$$\therefore EF \parallel HK, \quad 且 \quad EF = HK.$$

$EFHK$ 爲平行四邊形，其對角線 EH, FK 在 G 互相平分，同樣，AD 與 BE 相交於 G.

〔例〕 設 $\triangle ABC$ 的重心爲 G，由 A, B, C, G 四點作四條平行線 AA', BB', CC', GG' 與一直線 XY 相交，則

$$AA' + BB' + CC' = 3GG'.$$

〔解〕 BD 爲過 B 點的中線，BG 的中點爲 E，且 $DD' \parallel EE' \parallel GG'$.



由梯形的性質，

$$AA' + CC' = 2DD' \cdots\cdots\cdots (1)$$

$$DD' + EE' = 2GG' \cdots\cdots\cdots (2)$$

$$GG' + BB' = 2EE' \cdots\cdots\cdots (3)$$

(1)+(3)+(2)×2, 相加後將兩邊相同的部分消去,

$$AA'+BB'+CC'=3GG'.$$

〔注意〕 梯形 $AA'CC'$ 的一腰 AC 的中點 D, 過 D 點平行於底 AA' 的直線,截 $A'C'$ 於 D', 則 $AA'+CC'=2DD'$, 此與本節第一定理有很大的關係.

問　題　IV

1. $\triangle ABC$ 的邊 AC 的中點爲 M, AB 邊上的一點爲 N, 若 MN 等於 BC 的一半,則 MN 平行於 BC.

2. 四邊形各邊中點順次聯結所成的四邊形,爲平行四邊形.

3. 四邊形 $ABCD$ 的邊 AB, BC, CD, DA 的中點各爲 P, Q, R, S.

(1) $AC=BD$, 則 PR 垂直二等分 QS.

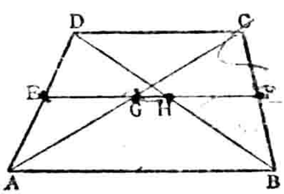
(2) 若 $AC\perp BD$, 則 $PR=QS$.

4. 由平行四邊形 $ABCD$ 的頂點 A, B, C, D 至一直線 XY, 各引平行線 AA', BB', CC', DD', 則

$$AA'+CC'=BB'+DD'.$$

5. 梯形 $ABCD$ 的腰 AD, BC 及對角線 AC, BD 的中點各爲 E, F, G, H, 則此四點在一直線上,且

$$GH=\tfrac{1}{2}(AB-CD).$$



〔註〕 聯結 GE 及 GF, 由 $EG\parallel CD\parallel AB$, $GF\parallel AB$, 則 E, G, F 在一直線上,同樣, E, H, F 在一直線上,所以四點都同在一直線上,其次

$$EH=\tfrac{1}{2}AB,\quad EG=\tfrac{1}{2}CD.$$

$$\therefore\quad GH=\tfrac{1}{2}(AB-CD).$$

6. 四邊形 $ABCD$ 的邊 AB, BC, CD, DA 的中點各爲 E, F, G, H, 又對角線 AC, BD 的中點各爲 M, N, 則三直線 EG, FH, MN 相交於一點.

7. 平行四邊形 $ABCD$ 的邊 DA, DC 的中點各爲 E, F, 則 AC 被 BE, BF 三等分.