

李正兴 **高考**

**数学** 蓝宝书

THE BLUE BOOK OF MATHEMATICS



# 狂练必考点 精做压轴题

李正兴 ○ 编著



高考妙题、名校一二模好题新题集锦

刷题达人必备必练

李正兴 **高考**

**数学** 蓝宝书

THE BLUE BOOK OF MATHEMATICS

**+**

**狂练必考点  
精做压轴题**

李正兴 ○ 编著



图书在版编目(CIP)数据

李正兴高考数学蓝宝书:狂练必考点+精做压轴题/  
李正兴著. —上海:上海社会科学院出版社,2014

ISBN 978-7-5520-0642-1

I. ①李… II. ①李… III. ①中学数学课—高中—升  
学参考资料 IV. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 150116 号

李正兴高考数学蓝宝书:狂练必考点+精做压轴题

---

著 者:李正兴

责任编辑:李 慧

封面设计:郁心蓝

出版发行:上海社会科学院出版社

上海淮海中路 622 弄 7 号 电话 63875741 邮编 200020

<http://www.sassp.org.cn> E-mail:sassp@sass.org.cn

排 版:南京展望文化发展有限公司

印 刷:上海华教印务有限公司

开 本:889×1 194 毫米 1/16 开

印 张:27.25

字 数:850 千字

版 次:2014 年 8 月第 1 版 2014 年 8 月第 1 次印刷

---

ISBN 978-7-5520-0642-1/G·349

定价:58.00 元

---

版权所有 翻印必究

# 序

近 200 万字的《李正兴高考数学蓝宝书：狂练必考点+精做压轴题》以及与之配套的《李正兴高考数学红宝书：梳理必考点+精讲压轴题》终于付梓在即，这是我写作的第十二部数学高复系列图书，由上海社会科学院出版社出版发行，本丛书是根据近年来高考数学命题的现状 & 改革方向，遵循考纲，注重思维，聚焦能力，为高考学生精心打造的教辅书，又兼顾名牌大学自主招生的最新走向（包括上海市水平考加试及全国高校自主命题），吸取了近年来数学高复研究成果，是对数学高复的全新演绎。

《李正兴高考数学蓝宝书：狂练必考点+精做压轴题》共五十九节专项训练与二十个单元测试，实质是对应五十九个必考专题，重要考点无一遗漏，对每一个必考点的分析力争精准到位。

在本书出版之际，填词一首：

## 金缕曲

数苑四十载，在教坛，华发染鬓，才情尽送，叹高次方程无解，世事原来不公，难将息，灵泉源涌，五色尚存生花笔，向人间，纸墨相吟弄，夜深沉，海上风。

青春岁月消踪，想当年，意气勃发，今已成空。

一曲清歌浦江畔，汗牛也要充栋，君不见，江湖涸洞，

得失无关文章事，勤耕耘，莘莘学子有用，脚乃健，心犹雄。

退休已经七个年头，却仍然是整天忙忙碌碌、辛苦而快乐着，杨绛在“一百岁感言”中说：我们曾如此渴望命运的波澜，到最后才发现：人生最曼妙的风景，竟是内心的淡定与从容。这是一个智者的内心独白。在物欲横流的人世间如何以平静的心态坚持做对社会有价值的事情，这种坚持与名利无关，名够累人利也不缺，在本世纪的十五年中，以个人的力量出版了 2 000 万字的数学高复专著，计十部 35 本，发行数近 40 万册，有四十万高三学生用过或正在用我写的书：如果考虑重复使用以及有些名校买一本试卷集印刷几百份，受众远不止这个数。这应当是一件最为快乐的事情，孔子仅是弟子三千，我的学生百倍于此数，今天我们大谈“你幸福了吗？”对我而言，能静心地把四十余年的教学经验和知识传授给那么多的学生，可以称得上是幸福了！

人的一生总会经受一些苦难的，邓小平时代才开始重视人的价值，把苦难当作不同程度的锻炼吧！每一个人降生到这个美丽又险恶的世界上来，“一定有对于他最合宜的位置，这个位置仿佛是降生时就给他准备好了的只等他有一天来认领，每一个人的禀赋都是独特的，由此决定了能使其禀赋和价值得到最佳实现的那个位置也必然是独特的。”（哲学家周国平语）我的位置是当一个出色的数学教师，由于我还有较为扎实的文科功底，决定了我这个数学教师具有一定的写作才能，于是决定了我在这个位置从容而淡定地一干就是三十多年，退休后再干十年，我乐此不疲地授课、教研、写作，爬格子居然爬出了 2 000 万字，有时梦中还想着如何写作，怎样才能写得更好，我想起了钱锺书先生的诗：“睡乡分境隔山川，枕拆槐安各一天，那得五丁开路手，为余凿梦两通连”，我在为具有梦想的学生们写作，无怨无悔地做他们的“开路手”，我的心与学生的心始终是相通的。他们的受益是我的快乐，感谢苍天，我找到了最适合我的天性的生活，对我而言是理想的生活，我不会在喧闹的人世间迷失方向，我的老年生活更充实，更绚丽多彩！

七律一首正反映出我当前的生活状态，词一首是我心灵的写照。以此与读者交流，一位老者正陪伴你走过走火热的六月，走向成功！

## 七律

远离浮躁已超然，阅读授课两不误。

书稿在案秃笔破，曙色临窗漏日妍。

昂立邀我拓教研，老骥伏枥赋新篇。

心曲没有终止符，白首痴顽亦可怜。

## 六州歌头——述怀

霜雪染发，落日夕阳红，述而斋，北窗下，清晖共，勤耕耘。

案上稿盈尺，渐升起，涓流积，沧深水，拳石垒，泰山耸。

千万余字，十部三十册，笑对晚风，人生苦与乐，尽在不言中。

岁月匆匆，白头翁，忆少年时，狂来笔，青春梦，豪情涌。  
“文革”乱，神州坠，道难通，影朦胧。  
小平扭乾坤，启高考，情意浓。  
攻数理，授《九章》，心晶莹。  
收得桑榆，满山桃李拥，暮敲晨钟。  
浩然吟啸客，老眼望山川，漠漠苍穹。

感谢我的妻子杨蕙芬，没有她的支持，我的2000万字，35本专著是不可能写出来的，亲情使我获得生命的享受，我坚信，大自然提供的只是素材，唯有亲情才能把素材创造出完美的作品，我获得的任何细小的成功都有她的陪伴，这就是阳光下绵亘着人生简朴的幸福，浩渺宇宙，一个生灵与另一个生灵的相遇总是千载一瞬，她的爱心既博大又深沉。

限于本人水平，书中存在的疏漏之处，欢迎读者批评指正、合作交流。

李正兴

2014年夏

于海上迷而斋

# 前 言

《李正兴高考数学蓝宝书：“狂练必考点+精做压轴题”》(简称“蓝宝书”)共有五十九节专项训练和二十节单元测试，覆盖高中数学教材全部知识，直指高考，实现与高考零距离。

每章原则上给出一套本章测试卷。重点章给出 A、B 卷两套，是对整章知识的全面考核。不论是专项训练卷还是篇测试卷，题型新，类型全。许多是近年来高考中、一模考、二模考中涌现出来的绝妙好题，试题对基础题、中档题、难题的比例依据 7:2:1 的原则先易后难布局，大多给出详解，这些试卷可配合与之对应的专题作巩固练习之用，复习过程中还可以用章测试卷检验复习效果，从而使每位学生把对考点的掌握、解题能力的提高落到实处，激发潜能，增强自信，挑战高考，获得高分。

本书配套《李正兴高考数学红宝书》使用，效果更好。

# 目 录

专项训练一	集合的概念与运算	1
专项训练二	命题与充要条件	4
单元测试一	集合和命题(A)	7
单元测试二	集合和命题(B)	10
专项训练三	不等式的基本性质和基本不等式	13
专项训练四	整式、分式不等式的解法	16
专项训练五	绝对值不等式与无理不等式的解法	19
专项训练六	指数、对数不等式的解法	22
专项训练七	不等式的证明	25
专项训练八	不等式的综合应用	28
单元测试三	不等式(A)	31
单元测试四	不等式(B)	34
专项训练九	函数的概念与运算、反函数	37
专项训练十	函数的定义域、值域与对应法则	40
专项训练十一	函数的奇偶性、周期性	43
专项训练十二	函数的单调性	46
专项训练十三	函数的图像	49
专项训练十四	函数的最值及应用	52
单元测试五	函数的基本性质(A)	55
单元测试六	函数的基本性质(B)	58
专项训练十五	幂函数、二次函数	61
专项训练十六	指数函数	64
专项训练十七	对数函数	67
专项训练十八	指数方程和对数方程	70
专项训练十九	函数与方程、不等式	73
单元测试七	二次函数、幂函数、指数函数与对数函数	76
单元测试八	函数综合	79
专项训练二十	任意角、同角三角比、诱导公式	82
专项训练二十一	三角恒等变形	85
专项训练二十二	解三角形	88
单元测试九	三角比	91
专项训练二十三	三角函数的图像与性质	94
专项训练二十四	三角函数的最值问题	97
专项训练二十五	反三角函数与三角方程	100
单元测试十	三角函数	103
专项训练二十六	数列概念、通项探求	106
专项训练二十七	等差数列	109
专项训练二十八	等比数列	112
专项训练二十九	数列求和	115

专项训练三十 数列的极限 .....	118
专项训练三十一 数学归纳法 归纳—猜想—证明 .....	121
专项训练三十二 数列的应用 .....	124
单元测试十一 数列、极限、数学归纳法(A) .....	127
单元测试十二 数列、极限、数学归纳法(B) .....	130
专项训练三十三 平面向量的坐标表示 .....	133
专项训练三十四 平面向量的综合应用 .....	136
单元测试十三 平面向量 .....	139
专项训练三十五 行列式的运算、性质及应用 .....	142
专项训练三十六 矩阵与算法初步 .....	145
专项训练三十七 复数的概念与运算、复数中的方程 .....	149
单元测试十四 行列式、矩阵、算法初步、复数 .....	152
专项训练三十八 直线的方程 .....	156
专项训练三十九 线性规划 .....	159
专项训练四十 圆的方程 .....	162
专项训练四十一 椭圆及其性质 .....	165
专项训练四十二 双曲线及其性质 .....	168
专项训练四十三 抛物线及其性质 .....	171
专项训练四十四 直线与圆锥曲线 .....	174
专项训练四十五 轨迹探求 .....	177
单元测试十五 直线与圆(A) .....	180
单元测试十六 直线与圆(B) .....	183
单元测试十七 圆锥曲线 .....	186
单元测试十八 直线与圆锥曲线 .....	189
专项训练四十六 圆锥曲线(统一定义) .....	192
专项训练四十七 参数方程与极坐标 .....	196
专项训练四十八 排列与组合 .....	199
专项训练四十九 二项式定理 .....	202
专项训练五十 概率初步 .....	205
专项训练五十一 数学期望与统计初步 .....	208
单元测试十九 排列组合、二项式定理、概率与统计 .....	211
专项训练五十二 直线与平面 .....	215
专项训练五十三 空间角与距离的计算 .....	218
专项训练五十四 棱柱与棱锥 .....	222
专项训练五十五 圆柱与圆锥、球 .....	225
专项训练五十六 空间向量在立体几何中的应用 .....	228
单元测试二十 空间图形与空间向量 .....	231
专项训练五十七 导数的概念及运算 .....	235
专项训练五十八 导数的应用 .....	238
专项训练五十九 定积分的应用 .....	241
参考答案 .....	244



## 集合的概念与运算

### 一、填空题

1. 若集合  $A = \{x \mid x^2 - 3x - 4 < 0, x \in \mathbf{R}\}$ , 则  $A \cap \mathbf{N}^*$  的真子集的个数是\_\_\_\_\_.
2. 已知集合  $A = \{-1, 3, 2m-1\}$ , 集合  $B = \{3, m^2\}$ . 若  $B \subseteq A$ , 则实数  $m =$ \_\_\_\_\_.
3.  $A = \{x \mid |x-a| \leq 1\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 - 5x + 4 \geq 0\}$ ,  $A \cap B = \emptyset$ , 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
4. 已知集合  $A = \{x \mid x^2 + x - 6 = 0\}$ ,  $B = \{x \mid mx + 1 = 0\}$ , 则满足  $B \subsetneq A$  的实数  $m$  的一切值为\_\_\_\_\_.
5. 已知集合  $A = \{y \mid y = \log_2 x, x > 1\}$ ,  $B = \left\{y \mid y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}, x > 1\right\}$ , 则  $A \cup B =$ \_\_\_\_\_.
6. 已知  $A = \{x \mid x^2 + (p+2)x + p - 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$ ,  $A \cap \mathbf{R}^+ = \emptyset$ , 则实数  $p$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
7. 设  $A = \{(x, y) \mid y = x + k, x, y \in \mathbf{R}\}$ ,  $B = \{(x, y) \mid y = x^2 - 3x, x, y \in \mathbf{R}\}$  且  $A \cap B = \emptyset$ , 则  $k$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
8. 从集合  $U = \{a, b, c, d\}$  的子集中选出 4 个不同的子集, 需同时满足以下两个条件:  
(1)  $\emptyset, U$  都要选出;  
(2) 对选出的任意两个子集  $A$  和  $B$ , 必有  $A \subseteq B$  或  $A \supseteq B$ .  
那么, 共有\_\_\_\_\_种不同的选法.
9. 已知集合  $A = \{x \in \mathbf{R} \mid |x+2| < 3\}$ , 集合  $B = \{x \in \mathbf{R} \mid (x-m)(x-2) < 0\}$ , 且  $A \cap B = (-1, n)$ , 则  $m =$ \_\_\_\_\_,  $n =$ \_\_\_\_\_.
10. 已知集合  $A = \{x \in \mathbf{R} \mid |x+3| + |x-4| \leq 9\}$ ,  $B = \left\{x \in \mathbf{R} \mid x = 4t + \frac{1}{t} - 6, t \in (0, +\infty)\right\}$ , 则集合  $A \cap B =$ \_\_\_\_\_.
11. 已知集合  $A = \{(x, y) \mid kx + y + 2k = 0, k \in \mathbf{R}\}$ ,  $B = \{(x, y) \mid x = \cos \theta \text{ 且 } y = \sin \theta, \theta \in [0, \pi)\}$ , 若  $A \cap B$  有且仅有一个元素, 则  $k$  的值为\_\_\_\_\_.
12. 已知集合  $A = \{0, 2, 3, 5, 8\}$ ,  $B = \{1, 3, 5, 7, 10\}$ , 如果集合  $C$  满足: ① 若将  $C$  中的各元素均减去 2, 则所得新集合  $C_1$  为集合  $A$  的一个子集; ② 若将  $C$  中的各元素均加上 3, 则所得新集合  $C_2$  为集合  $B$  的一个子集. 那么满足以上两个条件, 且所含有的元素个数最多的集合  $C =$ \_\_\_\_\_.

### 二、选择题

13. 设全集  $I = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$ , 集合  $M = \left\{(x, y) \mid \frac{y-3}{x-2} = 1\right\}$ ,  $N = \{(x, y) \mid y \neq x+1\}$ , 则  $\complement_I(M \cup N)$  等于( ).  
A.  $\emptyset$                       B.  $\{(2, 3)\}$                       C.  $(2, 3)$                       D.  $\{(x, y) \mid y = x+1\}$
14. 已知全集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 集合  $A, B \subsetneq U$ , 若  $A \cap B = \{2\}$ ,  $(\complement_U A) \cap B = \{4\}$ ,  $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{1, 5\}$ , 则下列结论正确的是( ).  
A.  $3 \in A, 3 \in B$                       B.  $3 \notin A, 3 \notin B$                       C.  $3 \notin A, 3 \in B$                       D.  $3 \in A, 3 \notin B$
15. 若集合  $A = \{x \mid x < a\}$ ,  $B = \{x \mid 1 < x < 2\}$ , 且  $A \cup (\complement_{\mathbf{R}} B) = \mathbf{R}$ , 则实数  $a$  的取值范围是( ).  
A.  $a \leq 1$                       B.  $a < 1$                       C.  $a \geq 2$                       D.  $a > 2$
16. 设集合  $M = \{y \mid y = |\cos^2 x - \sin^2 x|, x \in \mathbf{R}\}$ ,  $N = \left\{x \mid \left|x - \frac{1}{i}\right| < \sqrt{2}, i \text{ 为虚数单位}, x \in \mathbf{R}\right\}$ , 则  $M \cap N$  为( ).  
A.  $(0, 1)$                       B.  $(0, 1]$                       C.  $[0, 1)$                       D.  $[0, 1]$
17. 对于集合  $P$  和  $Q$ , 定义  $P - Q = \{x \mid x \in P, \text{ 且 } x \notin Q\}$ , 若  $P = \{x \mid \log_2 x < 1\}$ ,  $Q = \{x \mid |x-2| < 1\}$ , 则  $P - Q$  为( ).  
A.  $\{x \mid 0 < x < 1\}$                       B.  $\{x \mid 0 < x \leq 1\}$                       C.  $\{x \mid 1 \leq x < 2\}$                       D.  $\{x \mid 2 \leq x < 3\}$
18. 设集合  $A = \{x \mid x^2 + 2x - 3 > 0\}$ , 集合  $B = \{x \mid x^2 - 2ax - 1 \leq 0, a > 0\}$ , 若  $A \cap B$  中恰含有一个整数, 则实数  $a$  的取值范围是( ).

A.  $(0, \frac{3}{4})$

B.  $[\frac{3}{4}, \frac{4}{3})$

C.  $[\frac{3}{4}, +\infty)$

D.  $(1, +\infty)$

## 三、解答题

19. 已知集合  $A = \{x \mid (m-1)x^2 + 3x - 2 = 0\}$ .

(1) 若集合  $A$  为两个元素的集合, 试求实数  $m$  的取值范围;

(2) 是否存在这样的实数  $m$ , 使得集合  $A$  有且仅有两个子集? 若存在, 求出所有的  $m$  的值组成的集合  $M$ ; 若不存在, 请说明理由.

20. 已知全集  $I = \{\text{不超过 } 10 \text{ 的正奇数}\}$ , 它的两个子集  $A = \{1, 3, a^2 - a + 3\}$ ,  $B = \{1, 5, a^3 + a^2 - 2a + 7\}$ , 且  $3 \in A \cap (\complement_I B)$ , 求:

(1) 实数  $a$  的值;

(2)  $A \cap B$  和  $A \cup B$ ;

(3)  $A \cup B \neq I$ , 且集合  $M$  满足  $A \cap B \subsetneq M \subsetneq A \cup B$  时, 求  $M$  的子集个数.

21. 设  $a, b$  是两个实数,  $A = \{(x, y) \mid x = n, y = na + b, n \in \mathbf{Z}\}$ ,  $B = \{(x, y) \mid x = m, y = 3(m^2 + 5), m \in \mathbf{Z}\}$ ,  $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 144\}$ , 讨论是否存在  $a$  和  $b$ , 使得  $A \cap B \neq \emptyset$  且  $(a, b) \in C$ .

22. 已知集合  $A = \{x \mid x^2 - (m+3)x + 2(m+1) = 0, m \in \mathbf{R}\}$ ,  $B = \{x \mid 2x^2 + (3n+1)x + 2 = 0, n \in \mathbf{R}\}$ ,
- (1) 若  $A \cap B = A$ , 求  $m, n$  的值;
- (2) 若  $A \cup B = A$ , 求  $m, n$  的值.

23. 设全集为  $\mathbf{R}$ , 集合  $A = \left\{y \mid y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right), \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ .

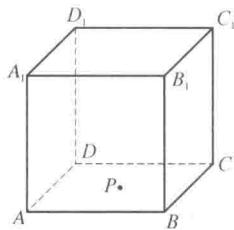
集合  $B = \{a \in \mathbf{R} \mid \text{关于 } x \text{ 的方程 } x^2 + ax + 1 = 0 \text{ 的一根在 } (0, 1) \text{ 上, 另一根在 } (1, 2) \text{ 上}\}$ ,  
求  $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap (\complement_{\mathbf{R}} B)$ .

24. 已知三个集合  $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 - ax + a - 1 = 0\}$ ,  $C = \{x \mid x^2 - bx + 2 = 0\}$ , 问同时满足  $B \subsetneq A$ ,  $A \cup C = A$  的实数  $a, b$  是否存在? 若存在, 求出  $a, b$ ; 若不存在, 请说明理由.

## 命题与充要条件

### 一、填空题

- 写出“ $1 < a + b < 10$ ”的一个充分不必要条件\_\_\_\_\_.
- 设命题甲为：“ $0 < x < 5$ ”，命题乙为：“ $|x - 2| < 3$ ”，则甲是乙的\_\_\_\_\_条件.
- 等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 $a_1$ ，公比为 $q$ ，则“ $a_1 > 0$ 且 $q > 1$ ”是“对于任意正整数 $n$ ，都有 $a_{n+1} > a_n$ ”的\_\_\_\_\_条件.
- 已知命题 $p$ ：“ $|x - 2| < a (a > 0)$ ”，命题 $q$ ：“ $|x^2 - 4| < 1$ ”，若 $p$ 是 $q$ 的充分不必要条件，则实数 $a$ 的取值范围是\_\_\_\_\_.
- 二次函数 $f(x)$ 的二次项系数为正，且对任意实数 $x$ 恒有 $f(2+x) = f(2-x)$ ，若 $f(1-2x^2) < f(1+2x-x^2)$ ，则 $x$ 的取值范围是\_\_\_\_\_.
- “ $a = 1$ ”是“函数 $y = \cos^2 ax - \sin^2 ax$ 的最小正周期为 $\pi$ ”的\_\_\_\_\_条件.
- 已知四个命题：
  - $c = 0$ 是函数 $f(x) = x|x| + c$ 为奇函数的必要非充分条件；
  - 若 $x, y \in \mathbf{R}$ ，则 $x^2 + y^2 \leq 1$ 是 $|x| + |y| \leq \sqrt{2}$ 的充分非必要条件；
  - $A, B$ 是 $\triangle ABC$ 的两内角，则 $A < B$ 是 $\sin A < \sin B$ 的充要条件；
  - 两条直线的斜率相等是这两条直线平行的既不充分也不必要条件；
 其中为真命题的有\_\_\_\_\_（把你认为是真命题的序号都填上）.
- 下列四个命题中，真命题的序号有\_\_\_\_\_（写出所有真命题的序号）.
  - 将函数 $y = |x + 1|$ 的图像按向量 $\vec{v} = (-1, 0)$ 平移，得到的图像对应的函数表达式为 $y = |x|$ ；
  - 圆 $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$ 与直线 $y = \frac{1}{2}x$ 相交，所得弦长为2；
  - 若 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$ ， $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$ ，则 $\tan \alpha \cot \beta = 5$ ；
  - 如图所示，已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ ， $P$ 为底面 $ABCD$ 内一动点，点 $P$ 到平面 $AA_1D_1D$ 的距离与到直线 $CC_1$ 的距离相等，则点 $P$ 的轨迹是抛物线的一部分.
- 设 $p$ ：关于 $x$ 的不等式 $a^x > 1$ 的解集为 $\{x | x < 0\}$ ， $q$ ：函数 $y = \lg(ax^2 - x + a)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，若 $p$ 或 $q$ 为真命题， $p$ 且 $q$ 为假命题，则 $a$ 的取值范围是\_\_\_\_\_.
- 给出下列四个命题：
  - 函数 $y = a^x (a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 与函数 $y = \log_a a^x (a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 的定义域相同；
  - 函数 $y = x^3$ 与 $y = 3^x$ 的值域相同；
  - 函数 $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^x - 1}$ 与 $y = \frac{(1 + 2^x)^2}{x \cdot 2^x}$ 都是奇函数；
  - 函数 $y = (x - 1)^2$ 与 $y = 2^{x-1}$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上都是增函数，
 其中正确命题的序号是\_\_\_\_\_（把你认为正确的命题序号都填上）.



第8题图

### 二、选择题

- 下列命题中真命题的是( ).
  - 若 $x > y$ ，则 $x^2 > y^2$
  - 若 $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ ，当 $|z_1| = |z_2|$ 时，则 $z_1 = z_2$
  - 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ ，则 $a_n = b_n$
  - 已知直线 $l$ 与平面 $\alpha, \beta$ ，若 $l \perp \alpha, l \parallel \beta$ ，则 $\alpha \perp \beta$
- 设 $\vec{a}, \vec{b}$ 都是非零向量，下列四个条件中，使 $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ 成立的充分条件是( ).
  - $\vec{a} = -\vec{b}$
  - $\vec{a} \parallel \vec{b}$
  - $\vec{a} = 2\vec{b}$
  - $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 且 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$
- 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且以2为周期，则“ $f(x)$ 为 $[0, 1]$ 上的增函数”是“ $f(x)$ 为 $[3, 4]$ 上的减函数”的( ).

- A. 既不充分也不必要的条件  
 B. 充分而不必要的条件  
 C. 必要而不充分的条件  
 D. 充要条件
14.  $a = 3$  是直线  $l_1: ax + 2y + 3a = 0$  和直线  $l_2: 3x + (a - 1)y = a - 7$  平行且不重合的( ).  
 A. 充分非必要条件  
 B. 必要非充分条件  
 C. 充要条件  
 D. 既非充分也非必要条件
15. 集合  $P = \{x \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}$ , 集合  $Q = \{x \mid x^2 + (2t - 1)x + t < 0\}$ , 则“ $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ”是“ $P \cap Q = Q$ ”的( )  
 条件.  
 A. 充分且必要  
 B. 必要非充分  
 C. 充分非必要  
 D. 既非充分又非必要
16. 已知  $p$ : “不等式  $|x - 1| + |x + 2| > m$  的解集为  $\mathbf{R}$ ”;  $q$ : “ $f(x) = \log_{(5-2m)} x$  为减函数”, 则  $p$  成立是  $q$  成立的( )  
 条件.  
 A. 充分不必要  
 B. 必要不充分  
 C. 充要  
 D. 既不充分也不必要
17. 若函数  $f(x)$  和  $g(x)$  的定义域、值域都是  $\mathbf{R}$ , 则  $f(x) > g(x)$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) 成立的充要条件是( ).  
 A. 存在一个  $x$  ( $x \in \mathbf{R}$ ), 使得  $f(x) > g(x)$   
 B. 有无穷多个  $x$  ( $x \in \mathbf{R}$ ), 使得  $f(x) > g(x)$   
 C. 对于任意的  $x$  ( $x \in \mathbf{R}$ ), 都有  $f(x) > g(x)$   
 D.  $x \notin \{x \mid f(x) \leq g(x)\}$
18. 已知  $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ , 命题  $p$ : “关于  $x$  的方程  $x^2 + |\vec{a}|x + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  没有实数根”, 命题  $q$ : “ $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ ”, 则  
 命题  $p$  是命题  $q$  的( ).  
 A. 充分不必要条件  
 B. 必要不充分条件  
 C. 充要条件  
 D. 既不充分也不必要条件

### 三、解答题

19. (1) 已知集合  $A = \{x \mid \log_{\frac{1}{2}}(x - a^2) < 1\}$ ,  $B = \{x \mid x - 4 < 2a\}$ , 若  $A \cap B \neq \emptyset$ , 求实数  $a$  的取值范围;  
 (2) 集合  $A = \left\{x \mid \frac{x^3 + 2x}{x + 2} \geq x, x \in \mathbf{R}\right\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 - (2a + 1)x + a^2 + a < 0, x \in \mathbf{R}\}$ , 若  $B \subseteq A$ , 求实数  $a$  的取值范围.

20. 设  $\alpha, \beta$  是方程  $x^2 - ax + b = 0$  的两个根, 试分析  $a > 2$  且  $b > 1$  是两根  $\alpha, \beta$  均大于 1 的什么条件.

21. 已知抛物线  $y = -x^2 + mx - 1$  ( $m \in \mathbf{R}$ ), 点  $A(3, 0)$ ,  $B(0, 3)$ , 求抛物线与线段  $AB$  有两个不同交点的充要条件是什么?

22. 设所有可表示为两整数的平方差的整数组成的集合为  $M$ ,

- (1) 证明所有奇数都属于  $M$ ;
- (2) 为使偶数  $2t \in M$ ,  $t$  应满足什么条件?
- (3) 证明属于  $M$  的两个整数之积属于  $M$ .

23. (1) 求关于  $x$  的方程  $ax^2 + 2x + 1 = 0$  至少有一个负实根的充要条件;

(2) 已知  $p$ : “函数  $f(x) = \lg\left(ax^2 - x + \frac{1}{16}a\right)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ”,  $q$ : “不等式  $a > \frac{1}{x+1}$  对一切正实数  $x$  均成立”. 如果“ $p$  或  $q$ ”为真命题, “ $p$  且  $q$ ”为假命题, 求实数  $a$  的取值范围.

24. 可以用下述方法证明“ $a > 0$  且  $b > 0$  的充要条件是  $a + b > 0$  且  $ab > 0$ ”为真命题.

必要性: 若  $a > 0$ ,  $b > 0$ , 必然有  $a + b > 0$  且  $ab > 0$ .

充分性: 若  $a + b > 0$  且  $ab > 0$ , 考察函数  $f(x) = x^2 - (a + b)x + ab$ .

当  $x \leq 0$  时, 因  $x^2 \geq 0$ ,  $-(a + b)x \geq 0$ ,  $ab > 0$ , 所以  $f(x) > 0$ , 即“若  $x \leq 0$ , 则  $f(x) > 0$ ”为真命题, 进而其逆否命题“若  $f(x) \leq 0$ , 则  $x > 0$ ”亦为真命题, 而今  $f(a) = f(b) = 0$ , 故  $a > 0$ ,  $b > 0$ , 充分性得证.

阅读上述材料, 并利用上述方法证明:

$a < 0$ ,  $b < 0$ ,  $c < 0$  的充要条件是  $a + b + c < 0$ ,  $ac + bc + ab > 0$ ,  $abc < 0$ .

## 集合和命题(A)

### 一、填空题

- 用列举法表示  $\{y \mid y = x^2 - 1, |x| \leq 2, x \in \mathbf{Z}\} = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $\{(x, y) \mid y = x^2 - 1, |x| \leq 2, x \in \mathbf{Z}\} = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- 若集合  $A = \{m, m+d, m+2d\}$ ,  $B = \{m, mq, mq^2\}$ , 其中  $m \neq 0$ , 且  $A = B$ , 则  $q$  的值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .
- 已知集合  $P = \{y \mid y = x^2 + 1, x \in \mathbf{R}\}$ ,  $Q = \{y \mid y = x^2 + 2x, x \in \mathbf{R}\}$ , 则集合  $P \cap Q = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- 设  $A = \{x \mid 1 < x < 2\}$ ,  $B = \{x \mid x < a\}$ , 若  $A \subseteq B$ , 则实数  $a$  的取值范围是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .
- 若集合  $M = \{x \mid ax^2 + 2x + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$  只有一个元素, 则实数  $a$  的值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .
- 已知集合  $A = \{x \mid |x - a| \leq 1\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 - 5x + 4 \geq 0\}$ , 若  $A \cap B = \emptyset$ , 则实数  $a$  的取值范围是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .
- 已知集合  $A = \{x \mid x^2 - 3x - 10 \leq 0\}$ ,  $B = \{x \mid m + 1 \leq x \leq 2m - 1\}$ , 若  $A \cup B = A$ , 则实数  $m$  的取值范围是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .
- 若集合  $A = \{x \mid -2 < x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$ , 集合  $B$  满足  $A \cup B = \{x \mid x > -2\}$ , 且  $A \cap B = \{x \mid 1 < x \leq 5\}$ , 则集合  $B = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- 条件  $p$ : 不等式  $\log_2(x-1) < 1$  的解, 条件  $q$ : 不等式  $x^2 - 2x - 3 < 0$  的解, 则  $p$  是  $q$  的  $\underline{\hspace{2cm}}$ .
- 设  $A = \left\{x \mid \frac{x-1}{x+1} < 0\right\}$ ,  $B = \{x \mid |x-b| < a\}$ , 若“ $a=1$ ”是“ $A \cap B \neq \emptyset$ ”的充分条件, 则实数  $b$  的取值范围是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .
- 设  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数, 如  $[1.5] = 1$ ,  $[-1.5] = -2$ , 若集合  $A = \{x \mid x^2 - [x] - 1 = 0\}$ ,  $B = \left\{x \mid \frac{1}{2} < 2^x < 4\right\}$ , 则  $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- 设  $A$  是整数集的一个非空子集, 对于  $k \in A$ , 如果  $k-1 \notin A$  且  $k+1 \notin A$ , 那么  $k$  是  $A$  的一个“孤立元”, 给定  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ , 由  $S$  的 3 个元素构成的所有集合中, 不含“孤立元”的集合共有  $\underline{\hspace{2cm}}$  个.
- 已知集合  $A \cup B = \{x \mid 1 \leq x \leq 2012, x \in \mathbf{N}^*\}$ , 则满足条件的二元有序集合组  $(A, B)$  的个数是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .
- 设  $y = f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的函数, 给定下列三个条件:
  - $y = f(x)$  是偶函数;
  - $y = f(x)$  的图像关于直线  $x = 1$  对称;
  - $T = 2$  为  $y = f(x)$  的一个周期. 如果将(1)(2)(3)中的任意两个作为条件, 余下一个作为结论, 那么构成的三个命题中真命题有  $\underline{\hspace{2cm}}$  个.

### 二、选择题

- “ $\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ ”是“ $\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$ ”的( ).
  - 充分而不必要条件
  - 必要而不充分条件
  - 充分必要条件
  - 既不充分也不必要条件
- 已知不等式  $|x - m| < 1$  成立的充分不必要条件是  $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ , 则  $m$  的取值范围是( ).
  - $\left\{m \mid -\frac{4}{3} \leq m \leq \frac{1}{2}\right\}$
  - $\left\{m \mid m < \frac{1}{2}\right\}$
  - $\left\{m \mid -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{4}{3}\right\}$
  - $\left\{m \mid m \geq -\frac{4}{3}\right\}$
- 有下列四个命题:
  - “若  $xy = 1$ , 则  $x, y$  互为倒数”的逆命题;
  - “相似三角形的周长相等”的否命题;
  - “若  $b \leq -1$ , 则方程  $x^2 - 2bx + b^2 + b = 0$  有实根”的逆否命题;
  - “若  $A \cup B = B$ , 则  $A \supseteq B$ ”的逆否命题.
 其中真命题是( ).
  - ①②
  - ②③
  - ①③
  - ③④

18. 已知 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 均为单位向量,其夹角为 $\theta$ ,有下列四个命题:

$$P_1: |\vec{a} + \vec{b}| > 1 \Leftrightarrow \theta \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$P_2: |\vec{a} + \vec{b}| > 1 \Leftrightarrow \theta \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$$

$$P_3: |\vec{a} - \vec{b}| > 1 \Leftrightarrow \theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right)$$

$$P_4: |\vec{a} - \vec{b}| > 1 \Leftrightarrow \theta \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right]$$

其中的真命题是( ).

A.  $P_1, P_4$

B.  $P_1, P_3$

C.  $P_2, P_3$

D.  $P_2, P_4$

### 三、解答题

19. 设 $m, n \in \mathbf{N}^*$ ,  $m > n$ ,  $A = \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $B = \{1, 2, \dots, n\}$ .

(1) 求 $C = \mathcal{P}_A B$ , 并回答 $C$ 有多少个子集;

(2) 满足 $D \subseteq A$ 且 $B \cap D \neq \emptyset$ 的 $D$ 有多少个?

20. 已知集合 $A = \{x \mid (x-2)(x-3a-1) < 0\}$ , 函数 $y = \lg[(2a-x)(x-a^2-1)]$ 的定义域为集合 $B$ .

(1) 若 $a = 2$ , 求集合 $B$ ;

(2) 若 $A = B$ , 求实数 $a$ 的值.



21. (1) 已知集合  $A = \{(x, y) \mid x^2 + mx - y + 2 = 0, x \in \mathbf{R}\}$ ,  $B = \{(x, y) \mid x - y + 1 = 0, 0 \leq x \leq 2\}$ , 若  $A \cap B \neq \emptyset$ , 求实数  $m$  的取值范围;
- (2) 已知命题  $p$ : 方程  $x^2 + mx + 1 = 0$  有两个不相等的负实根; 命题  $q$ : 方程  $4x^2 + 4(m-2)x + 1 = 0$  无实根, 若  $p$  或  $q$  为真、 $p$  且  $q$  为假, 求实数  $m$  的取值范围.

22. 已知函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上是增函数,  $a, b \in \mathbf{R}$ , 对命题: 若  $a + b \geq 0$ , 则  $f(a) + f(b) \geq f(-a) + f(-b)$ ,
- (1) 写出否命题, 判定真假, 并证明你的结论;
- (2) 写出逆否命题, 判定真假, 并证明你的结论.

23. (1) 是否存在实数  $m$ , 使得  $2x + m < 0$  是  $x^2 - 2x - 3 > 0$  的充分条件?
- (2) 是否存在实数  $m$ , 使得  $2x + m < 0$  是  $x^2 - 2x - 3 > 0$  的必要条件?
- (3) 求证: 关于  $x$  的方程  $ax^2 + 2x + 1 = 0$  至少有一个负根的充要条件是  $a \leq 1$ .