國家科學叢書

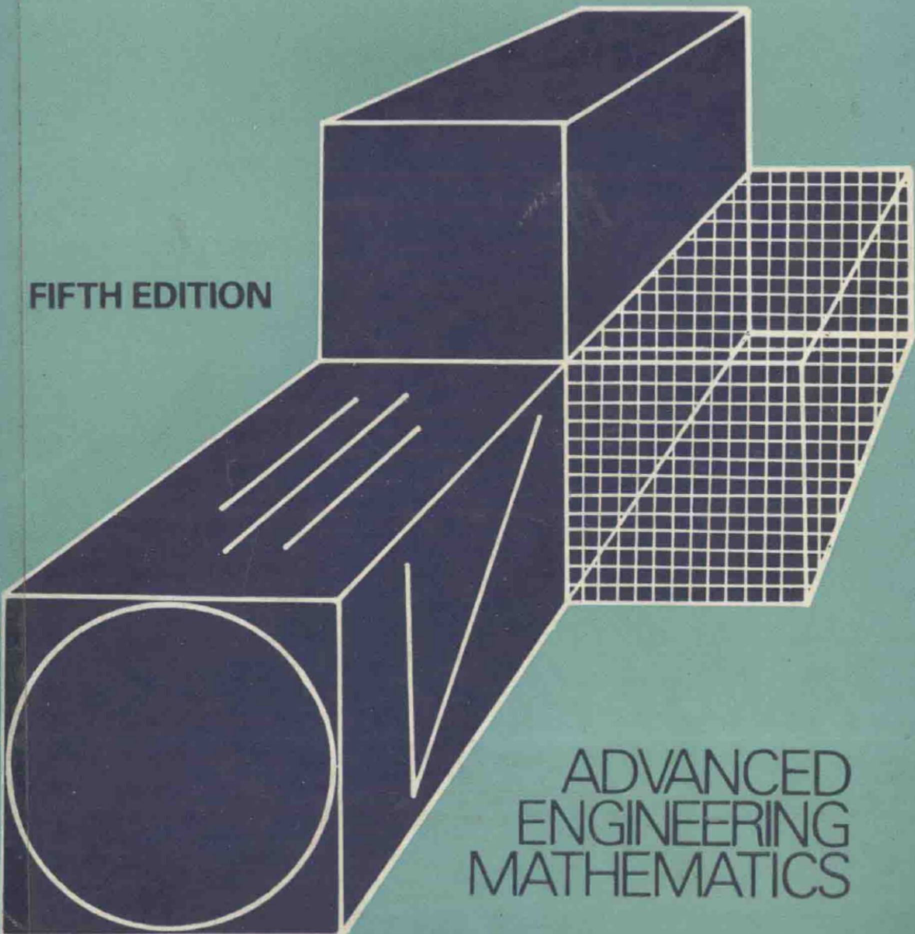
高等工程數學

(第五版・下册)

C. RAY WYLIE
LOUIS C. BARRETT 著

林明緯 譯

FIFTH EDITION



ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS

ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS

高等工程數學

（第五版・下冊）

原著者：C.RAY WYLIE &
LOUIS C.BARRETT

譯　者：林明緯

■ 高等工程數學（下冊）

定價：新台幣貳佰肆拾元整

原著者：C.RAY WYLIE & LOUIS C.BARRETT
譯　者：林明緯
總策劃：林洋慈
發行人：林大坤
發行所：國家出版社
總經銷：國家書店有限公司
郵　撥：104801帳戶
總公司：台北市新生南路一段126之8號3樓
電　話：3926748・3926749
門市部：台北市信義路二段128號
電　話：3912425
印刷所：東遠印刷廠

1984年6月

行政院新聞局局版台業字第零陸叁貳號

目　　錄

第十章　貝索函數與雷建德多項式 (Bassel Functions and Legendre Polynonials)

10.1理論基礎(Theoretical Preliminaries)

由分離變數法來解偏微分方程式時，我們經常可以得到可變係數之常微分方程，但不能以常用之函數來解。在此種情況之下常利用此方法是以無限級數之型式以求得其解，此這一級數可當作新函數加以定義來詳加研究，而由於它們非常重要所以我們將其列表。本節我們討論如何求出一般問題中下列形式的級數之解

(1) $Y=|x-x_0|^r\,[a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots]\qquad a_0\neq 0$

使其成爲線性二階微分方程式

(2) $$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

在 $x=x_0$ 的鄰域(Neighborhood)之解，此種程序時常被稱爲 **Frobenius, 方法**(因德國數學家 F.G. Frobenius (1849～1917年) 而得名)。於下節中，吾人將詳細研究利用 Frobenius 方法以求解**貝索方程式**(Bessel's eguation)

$$x^2y''+xy'+(\lambda^2x^2-\nu^2)y=0$$

及**雷建德方程式**(Legendre's eguation)

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$$

所獲得之函數。

通常，在方程式(1)中之指數 r 既非零亦不爲正整數而所以，我們所求之解(若其解存在)將不爲泰勒或麥克勞林展開式。在 r 不爲整數之情況下，當 $x-x_0$ 是負數，則 $x-x_0$ 之絕對值在(1)式中是需要乘以冪級數以

使 y 爲實數。但是，爲求簡化，我們將時常省略絕對值並令 y 表下列級數

$$(1a)\qquad y=(x-x_0)^r\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{n+r}\qquad a_0\neq 0$$

且在 $x_0<x<R$ 之區間求解。若 $x-x_0$ 爲負時，$|x-x_0|=x_0-x$，在 $R<x<x_0$ 之區間，若解存在，則能以下列之假設而求得解

$$(1b)\qquad y=(x_0-x)^r\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x_0-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x_0-x)^{n+r}\qquad a_0\neq 0$$

此分析牽涉到好幾個情況之下的考慮，每一種情況且依函數 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 在 $x=x_0$ 點附近的情況而定，因此用 $x=x_0$ 點爲解 y 之展開點。在大多數之情況下，變數 x 和 y 與係數函數 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是實數，但這並不是必要的限制，而且在本節中所介紹的基本定義和定理中，x, y，$P(x)$, $Q(x)$ 可能是實數也可能是複數。

我們首先需要之觀念爲**解析函數**之觀念（Analytic function）

定義 1　若且唯若函數在 $x=x_0$ 處之一些鄰域有泰勒級數，則此函數被稱爲**可解析**（Analytic）。

尤其是，多項函數於任意點爲可解析，且有理數函數在所定義之所有點（即除分母爲零外之所有點鄰域）爲可解析。

利用解析函數之觀念，我們現在能區分於點 x_0 處在 (2) 式之解。

定義 2　於方程式 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 中，若係數函數 $P(x)$ 及 $Q(x)$ 在 $x=x_0$ 處皆爲可解析，則 x_0 稱爲該方程式之**常點**（Ordinary point）。

若係數函數 $P(x)$ 及 $Q(x)$ 中至少有一在 $x=x_0$ 處不爲可解析，但其乘積 $(x-x_0)P(x)$ 及 $(x-x_0)^2Q(x)$ 在 $x=x_0$ 處可解析，則 x_0 稱爲方程式之**有規則的奇點**（Regular singular point）。

若 $(x-x_0)P(x)$ 及 $(x-x_0)^2Q(x)$ 中至少有一在 $x=x_0$ 處不爲可解析，則 x_0 稱爲**不規則的奇點**（Irregular singular point）。

目前的工作我們所關心的是(2)式在常點及規則的奇點處之解的展開式。

【例題 1】

討論微分方程式

$$y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{3}{x(x-1)^3}y = 0$$

因爲在 $x = 0$ 和 $x = 1$ 時 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 都將變成爲無限大；而且在 $x = 1$ 時，雖然 $P(x)$ 是可解析的，但是 $Q(x)$ 是無限大，所以 $x = 0$ 或 $x = 1$ 時爲奇點，其他各點皆爲常點。而 $x = 0$ 點是規則奇點，因其乘積爲

$$xP(x) = 2$$

及
$$x^2Q(x) = \frac{3x}{(x-1)^3} = -3x(1-x)^{-3} = -3x(1+3x+6x^2+\cdots) \qquad |x|<1$$

於 $x = 0$ 時爲可解析的，就是說該點可展開成爲 x 正整數冪次之級數。$x = 1$ 點爲不規則之奇點，因爲，雖其乘積爲

$$\begin{aligned}(x-1)P(x) &= \frac{2(x-1)}{x} = 2(x-1)[1+(x-1)]^{-1} \\ &= 2(x-1)[1-(x-1)+(x-1)^2-\cdots] \qquad |x-1|<1\end{aligned}$$

於 $x = 1$ 時爲可解析的，而其乘積爲

$$(x-1)^2Q(x) = \frac{3}{x(x-1)}$$

却變成爲無限大，而且，爲不可解析的。

將變數 x 分辨成常數或奇點之重要性之情況下，可在下列定理中顯示出，其定理之證明可以參考較高深之微分方程式之書籍【註 1】。

【註 1】：參閱 E.T. Whittaker 及 G.N. Waston 著 " Modern Analysis " 194 至203 頁，1943 年出版。

定理 1 若 $x=x_0$ 是微分程式

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

之常點，在此方程式之任何解都爲可解析的，即是說其解可以由下列級數之型式

$$y=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots$$

來表示，且每一個級數解之半徑均等於由x_0到最後近之奇點的距離。

定理 2 若 $x=x_0$ 是微分方程式

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

之規則奇點，則該方程式最少有一個解，而其可以利用下列之級數來代表之

$$y=|x-x_0|^r\left[a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots\right]$$

於 $0<|x-x_0|<R$ 中，此級數是收斂，其中 R 爲收斂半徑，爲 x_0 到最接近奇點的距離。

定理 3 若 $x=x_0$ 是微分方程式

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

之不規則奇點，則該方程式沒有只用 $x-x_0$ 的冪級數來組成之解。之解。

利用定理 1 和 2 用來求解(2)式之冪級數解之其收斂半徑時，在腦中必需有個觀念就使用展開式附近的點爲實數，但是最接近展開點之奇點可能是複數。例如，微分方程式

$$y''+\frac{1}{1+x^2}y'+y=0$$

對所有 x 的實數，其係數函數爲

$$P(x)=\frac{1}{1+x^2} \text{ 及 } Q(x)=1$$

均爲可解析的。但是在 $x=\pm i$ 點時 $P(x)$ 爲不可解析的，而成爲微分方程式的兩個奇點。因此，在 $x=2$ 點附近的解其具有 $R=\sqrt{5}$ 之收斂半徑，因爲在複數平面中，從展開點 $x=2$ 到最近奇點之 $x=i$（或 $x=-i$）其距離爲 $\sqrt{5}$。（圖 10-1）

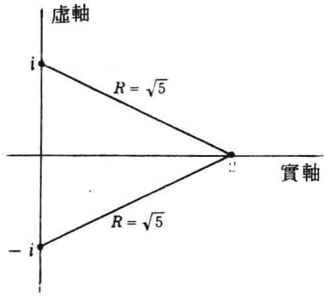


圖 10-1 收斂半徑爲至複數奇點之距離

爲了求得(2)式在常點或規則奇點附近之級數解，則我們可用 Frobenius 方法，爲了方便起見，若是有需要可做座標轉換，而使展開點 $x=x_0$ 成爲 $x=0$。

若 $x=0$ 爲(2)式之常點，則依定理 1，$P(x)$ 及 $Q(x)$ 在原點處可解析，在 $x=0$ 處每一解能以下列麥克勞林級數表之

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

所以，在此種情況下，於應用 Frobenius 方法時不需包含 $|x|^r$。

【例題 2】

求下列微分方程式在原點處之級數解

(3) $$y''+xy'+y=0$$

於此方程式 $P(x)\equiv x$ 及 $Q(x)\equiv 1$ 在任意點皆爲可解析，故 $x=0$，像其他所有點一樣，是已知方程之常點。所以，由定理 1，在原點處之每一解將可以麥克勞林表之且此些級數對所有 x 值將爲收斂。故，如上所言，我們可取 $r=0$ 並令 y 爲下列型式之級數

(4) $$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

將上式代入(3)式，可得

(5) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}+x\sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=0$$

上式可將最後二項合併，則(5)式變爲

(6) $$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)a_n x^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+1)x^n=0$$

最後，若我們改變(6)式第一項由 n 至 $m+2$ 和之變數，則以 n 代 m 並合併三項和，可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)(n+2)a_{n+2}+(n+1)a_n]x^n=0$$

若且唯若 x 之每一冪次之係數是零，則此爲相等。故其係數滿足線性循環關係式

$$(n+1)(n+2)a_{n+2}+(n+1)a_n=0 \qquad \text{或} \qquad a_{n+2}=-\frac{1}{n+2}a_n$$

由 a_0 及 a_1 開始，其爲常數，可得

$$a_0=a_0 \qquad\qquad a_1=a_1$$

$$a_2=-\frac{1}{2}a_0 \qquad\qquad a_3=-\frac{1}{3}a_1$$

$$a_4=-\frac{1}{4}a_2=a_2=\frac{1}{2\cdot 4}a_0 \qquad\qquad a_5=-\frac{1}{5}a_3=\frac{1}{3\cdot 5}a_1$$

且

$$a_{2m}=(-1)^m\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2m)}a_0 \qquad a_{2m+1}=(-1)^m\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2m+1)}a_1$$
$$=\frac{(-1)^m}{2^m m!}a_0 \qquad\qquad =\frac{(-1)^m 2^m m!}{(2m+1)!}a_1$$

故 若 a_0 $a_1 \neq 0$ 時，我 們 有 二 個 獨 立 解

$$y_0=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^m m!}=a_0 e^{-x^2/2} \qquad 及\quad y_1=a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^m 2^m m! x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

例題 2 尚易求解，因係數 $P(x)$ 及 $Q(x)$ 不祇是 x 之簡單函數而事實上亦爲簡單的 x 之多項式。很幸運的，$P(x)$ 在 e^x 和 $Q(x)$ 在 $\sin x$ 之特別的問題必須以無限級數表之。該無限級數不是普通的而是在 Frobenius 方法理論之討論上，我們必須認知此可能性。

讓我們令 $x=0$ 爲(2)式之不規則奇點。其意乃 $xP(x)$ 及 $x^2Q(x)$ 兩者在原處爲可解析且所以能以下列型式表之

$$xP(x)=p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots$$
$$x^2Q(x)=q_0+q_1x+q_2x^2+\cdots$$

所以，將(2)式乘以 x^2，然後代入 $xP(x)$ 和 $x^2Q(x)$ 於其中，則可以改寫成

(7) $$x^2y''+x(p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots)y'+(q_0+q_1x+q_2x^2+\cdots)y=0$$

假說有一級數

(8) $$y=x^r(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots) \qquad a_0\neq 0$$

其中 $a_0\neq 0$。由(7)式將其代入(2)式，則可以得到

$$\begin{aligned}&x^2[a_0r(r-1)x^{r-2}+a_1(r+1)rx^{r-1}+a_2(r+2)(r+1)x^r+\cdots]\\&\quad+x(p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots)[a_0rx^{r-1}+a_1(r+1)x^r+a_2(r+2)x^{r+1}+\cdots]\\&\qquad+(q_0+q_1x+q_2x^2+\cdots)(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots)=0\end{aligned}$$

或是，將各同冪次的 x 項加以歸納在一起，則可以得到

$$
\begin{aligned}
&a_0[r(r-1)+p_0r+q_0]x^r \\
&\quad+\{a_1[(r+1)r+p_0(r+1)+q_0]+a_0(p_1r+q_1)\}x^{r+1} \\
&\quad+\{a_2[(r+2)(r+1)+p_0(r+2)+q_0] \\
&\qquad+a_1[p_1(r+1)+q_1]+a_0(p_2r+q_2)\}x^{r+2}+\cdots=0
\end{aligned} \tag{9}
$$

若是要使(9)式成立，則必須使各個 x 冪次的係數均為零，因此就可得到一組方程式

$$
\begin{aligned}
&a_0[r(r-1)+p_0r+q_0]=0 \\
&a_1[(r+1)r+p_0(r+1)+q_0]+a_0(p_1r+q_1)=0 \\
&a_2[(r+2)(r+1)+p_0(r+2)+q_0] \\
&\qquad+a_1[p_1(r+1)+q_1]+a_0(p_2r+q_2)=0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{10}
$$

因為 $a_0 \neq 0$，所以由上面第一式可以得之

$$r^2+(p_0-1)r+q_0=0 \tag{11}$$

這個 r 之二次方程式稱之為微分方程式對應於展開點之**指標方程式**(Indicial equation)，其根為 r_1 和 r_2 則稱之為微分方程式在該點之**指數**(Exponents)。對於其中每一個數值，我們都可以由(2)式得到一個和(8)式相似之形成之級數解。而這些展開式之級數，可由(10)式的方程式來求得，而其中之任一 a 值都可依照秩序利(8)式中的 a 值來表示。

如果指標方程式是具有重根時，顯然此種方法並不能得到兩種獨立之級數解。而在指標方程式中所求得之兩根，若其差為整數時，則此種方法也不能求獨立之第二個級數解。【註2】所以在碰到上列之情況下，我們都可以利用 2.4 節中之方法，以求出第二個解，就是說當已知 $y_1(x)$ 為第一個解之後，則可以假設 $y=\phi(x)y_1(x)$，以求出 $\phi(x)$，而使乘積 $\phi(x)y_1(x)$ 能夠滿足已知之微分方程式。另外一種方法比 2.4 節中的方法好，其步驟如下例題所示。

【註 2】： 閱習題 35

【例題 3】

求方程式 $xy''+y'+y=0$ 之兩線性獨立解，其解靠近原點之鄰域處爲有效

因已知方程式有 $P(x)=Q(x)=1/x$，其原點爲一規則的奇點。故由定理 2，至少有一個具有下列展開式之解

(12) $$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \qquad a_0 \neq 0 \text{ (possibly } x>0) \qquad (\text{可能 } x>0)$$

將此級數以及其前兩項導數代入已知之微分方程式中，則可以得知

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}=0$$

將上式前二項級數合併

(13) $$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)^2 a_n x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}=0$$

若 $n=0$ 之項由 (13)式之第一項級數中之分離，且若和之索引於第二項級數中由 n 至 $n-1$ 變化，則上式之兩級數能組合爲

(14) $$r^2 a_0 x^{r-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+r)^2 a_n+a_{n-1}\right]x^{n+r-1}=0$$

若且唯若

(15) $$r^2 a_0=0$$

則 (14) 式亦可同樣滿足

且對 $n \geq 1$ 時，滿足 a 之關係式爲

(16) $$(n+r)^2 a_n+a_{n-1}=0 \quad \text{或} \quad a_n=-\frac{a_{n-1}}{(n+r)^2}$$

由 (15) 式知指標方程式 $r^2=0$。但是，欲使 r 爲零之前，通常須將其視爲一個參數，爲此，由 (16) 式可求得

$$a_1 = -\frac{a_0}{(r+1)^2} \qquad a_2 = -\frac{a_1}{(r+2)^2} = \frac{a_0}{(r+1)^2(r+2)^2}$$

且更顯明之式子爲

$$a_n = (-1)^n \frac{a_0}{(r+1)^2(r+2)^2\cdots(r+n)^2} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

而 a_0 爲任意值，且所有其他的 a 値以 a_0 及 r 表之而被求出，(12) 式可 被寫爲

$$y = a_0 x^r\left[1 - \frac{x}{(r+1)^2} + \frac{x^2}{(r+1)^2(r+2)^2} - \frac{x^3}{(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^2} + \cdots\right] \equiv a_0 y_r \tag{17}$$

因所有 a 値被決定以滿足 (16) 式，(14) 式中除 $r^2\ a_0\ x^{r-1}$ 外之每一項是等於零。故 (17) 式不能滿足已知齊性微分方程式，但能滿足下列非齊性方程式

$$xy'' + y' + y = r^2 a_0 x^{r-1} \tag{18}$$

如果 $r = 0$，則 (18) 式則等於已知微分方程式，且 $a_0 = 1$ 時之 (17) 式可化簡成

$$y_1 = 1 - \frac{x}{(1!)^2} + \frac{x^2}{(2!)^2} - \frac{x^3}{(3!)^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{(n!)^2}$$

因爲其指標方程式 $r^2 = 0$，只有 $r = 0$ 一個根，因此可以知道沒有辦法利用指標方程式之根求得 (12)式之第二個解。但爲了求得其第二個解讓我們將 $a_0\ y_r$ 代入 (18) 式中之 y，所以可得等式如下

$$xy_r'' + y_r' + y_r = r^2 x^{r-1}$$

現在將上式對 r 微分，當然，必須記住，x 是與 r 無關的，其結果爲

$$x\frac{\partial(y_r'')}{\partial r}+\frac{\partial(y_r')}{\partial r}+\frac{\partial(y_r)}{\partial r}=2rx^{r-1}+r^2x^{r-1}\ln|x| \qquad x\neq 0$$

若將 x 和 r 之階次互換時，則可變爲

$$x\left(\frac{\partial y_r}{\partial r}\right)''+\left(\frac{\partial y_r}{\partial r}\right)'+\frac{\partial y_r}{\partial r}=r(2+r\ln|x|)x^{r-1} \tag{19}$$

假設在此方程式中令 $r=0$，則等號的右邊也將等於零，就是證明了 $\partial y_r/\partial r|_{r=0}$

滿足於原微分方程式，所以可以成爲第二個獨立解。

求出指標之微分，由 $a_0=1$ 時之 (17) 式可以得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial y_r}{\partial r}=x^r\ln|x|&\left[1-\frac{x}{(r+1)^2}+\frac{x^2}{(r+1)^2(r+2)^2}-\frac{x^3}{(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^2}+\cdots\right]\\
&+x^r\left\{-x\frac{-2}{(r+1)^3}+x^2\left[\frac{-2}{(r+1)^3}\frac{1}{(r+2)^2}+\frac{1}{(r+1)^2}\frac{-2}{(r+2)^3}\right]\right.\\
&-x^3\left[\frac{1}{(r+2)^2(r+3)^2}\frac{-2}{(r+1)^3}+\frac{1}{(r+1)^2(r+3)^2}\frac{-2}{(r+2)^3}\right.\\
&\left.\left.+\frac{1}{(r+1)^2(r+2)^2}\frac{-2}{(r+3)^3}\right]+\cdots\right\}\end{aligned}$$

最後，令 $r=0$，則可以求得原方程式之第二個解

$$\begin{aligned}y_2=\frac{\partial y_r}{\partial r}\bigg|_{r=0}&=\ln|x|\left[1-\frac{x}{(1!)^2}+\frac{x^2}{(2!)^2}-\frac{x^3}{(3!)^2}+\cdots\right]\\
&+2\left[\frac{x}{(1!)^2}-\frac{x^2}{(2!)^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{x^3}{(3!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\cdots\right]\\
&=y_1\ln|x|-2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{(n!)^2}H_n \qquad x\neq 0\end{aligned}$$

其中 $H_n=\Sigma_{k=1}^{n}1/k$ 爲調諧級數之 n 個部份總和

因此 y_2 包含 $\ln|x|$ 項而沒有 y_1，顯然 y_1 和 y_2 並不成比例。換句話說，它們是獨立的特解，而原方程的全解爲 $y=c_1y_1+c_2y_2$