现代数学基础丛书 156

线性算子的谱分析

（第二版）

孙 炯 王 忠 王万义 编著

科 学 出 版 社

现代数学基础丛书 156

线性算子的谱分析

（第二版）

孙 炯 王 忠 王万义 编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书从有限维空间线性算子的特征值出发，采用类比、归纳等方式，通过大量实例循序渐进地引入无穷维空间上线性算子的谱理论，系统介绍并分析了有界线性算子、共轭算子、正常算子、自共轭算子、紧算子的结构，讨论了上述这些有界线性算子的谱点分类、谱集的性质和谱分解定理. 进而对闭的线性算子、无界线性算子，特别是在近代物理学、量子力学中有着深刻应用背景的微分算子的结构、亏指数、自共轭扩张和它们的谱分解加以分析.

本书适合数学、应用数学以及其他相关的理工科研究生阅读，可供专门从事泛函分析、线性算子谱理论、微分算子理论研究的数学工作者使用，也可供从事偏微分方程、非线性科学和量子力学的科学工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性算子的谱分析/孙炯，王忠，王万义编著. —2版. —北京：科学出版社，2015.6

(现代数学基础丛书 156)

ISBN 978-7-03-045054-8

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①孙… ②王… ③王… Ⅲ. ①线性算子—谱分析(数学)

Ⅳ. ①O177.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 131498 号

责任编辑：王丽平／责任校对：张凤琴

责任印制：徐晓晨／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京京华虎彩印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005 年 9 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5

2015 年 6 月第 二 版 印张：21 1/4

2015 年 6 月第二次印刷 字数：430 000

定价：128.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于“文化大革命”的浩劫已经被破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

第二版前言

《线性算子的谱分析》出版以来, 得到了读者, 特别是从事谱理论研究的数学工作者的肯定, 同时他们也对本书提出了许多宝贵的改进意见, 本书在作为研究生教材讲授时, 我们也发现有不少需要修改和完善的地方. 第一版出版十年后的今天, 我们很高兴本书有机会再版.

作为一本数学专业书籍, 我们更希望读者能从中理解数学研究的本源, 数学发现的源动力, 而不是仅仅学会从定义和定理推导出的一组结论. 作为一种尝试, 本书的第二版我们在最前面加上了一节绪论“从矩阵的特征值到无穷维空间的谱理论”, 从线性代数、数学分析和微分方程中的一些实例中, 使用类比、联想、归纳等数学方法, 引申、抽象出本书要研究的问题. 我们认为对最基本、最简单数学结构的感悟与理解是学会数学、学懂数学最为关键的一步.

本书的第二版除了对第一版的文字叙述和排版中的小错误做了仔细的修订和完善外, 在 5.6 节微分算子的辛结构, 结合我们近期的研究工作增加了部分内容. 孙炯负责第一章到第四章的修订和统稿, 王万义、王忠分别负责第五章、第六章的修订, 内蒙古大学郝晓玲、姚斯琴等教师和研究生也对本书的修订再版做了很多具体的工作. 本书的三位作者多年来在国家自然科学基金的支持下, 在微分算子谱理论方面从事研究工作, 本书的出版受到了国家自然科学基金的资助, 我们在这里表示由衷的谢意! 在出版过程中, 我们得到了科学出版社以及王丽平编辑的大力支持, 在此谨向他们表示衷心的感谢!

囿于学识, 本书虽经修订, 错误和缺陷仍然在所难免, 希望读者不吝赐教.

孙　炯　王　忠　王万义

2015 年 1 月于呼和浩特

第一版前言

要想获得真理和知识, 唯有两件武器, 那就是清晰的知觉和严格的演绎.

——笛卡儿 (Descartes)

运算永远是数学研究的重要对象. 线性算子理论将微分、积分等在近代数学中最为基本的运算手段, 抽象为建立在空间上的映射关系, 并加以统一处理. 线性算子的谱理论从结构上剖析了算子作用的本质特征, 它的处理方式体现了数学结构在分析、代数和几何上的和谐与统一. 本书以谱分析为主线, 对一些最基本的线性算子的结构进行了分析和阐述. 作者设定的目标有两个, 一是使本书有很好的可读性, 二是努力展现数学内在的美学结构. 数学美感在数学创造中往往能给人以意想不到的启迪.

作者遵循从有限维空间线性算子特征值引入无穷维空间上线性算子谱理论的基本思路, 详细介绍和分析了有界线性算子、共轭算子、正常算子、自共轭算子、紧算子的结构, 在此基础上给出了这些有界线性算子的谱点分类、谱集合的性质和谱分解定理. 进而对闭的线性算子、无界线性算子, 特别是在近代物理学、量子力学中有着深刻应用背景的微分算子的结构、亏指数、自共轭扩张及其谱分解加以研究. 为了给出空间按照线性算子的特征进行的几何分解和线性算子的谱积分、谱表示, 本书首先详尽地分析了最简单的谱积分 (级数形式)—— 投影算子加权和的谱理论, 使读者能够从简单中了解复杂, 从个性中理解共性, 从具体实例中感悟抽象的线性算子谱分解、谱积分的具体真实意义, 感受到数学结构的美学含义. 本书撰写时注重可读性, 选材系统, 循序渐进, 前后呼应. 有兴趣的读者 (包括理工科的研究生) 甚至可以通过自学前四章来了解线性算子和谱分解的基本理论.

对最基本、最简单数学结构的感悟与理解是学会数学、学懂数学最为关键的一步. 线性算子理论是深刻反映许多数学问题本质的数学分支, 有着十分广泛的应用背景, 同时它可以用十分抽象的数学语言来加以概括和描述. 但是本书并不准备一开始就给出抽象的谱族和谱积分的概念, 而是采用类比、归纳等思维方式, 循序渐进地引入较为抽象的谱理论. 书中包含很多的例子, 作者在大量的实例中系统地介绍了线性算子及其谱分析的基本理论, 有助于从线性算子的结构上, 十分简洁地了解它的作用形式和作用结果, 为读者感悟线性算子及其谱理论的基本概念和定理提供了切实的背景. 事实上, 数学不应当被想象为一种难懂而又违背常识的东西, 希

望读者看到的数学正是常识的精微化.

本书第一章介绍有界线性算子的基本理论, 为了全书的系统性, 前几节简要介绍了 Banach 空间、Hilbert 空间和线性算子的基本概念和性质. 第二章讨论有界线性算子的谱, 特别是投影算子的加权和、有界自共轭算子、紧算子的谱, 在此基础上引出了谱族和谱积分的概念以及有界算子的谱分解. 第三章从闭算子开始, 研究无界线性算子的共轭算子、对称算子的结构、亏指数、Cayley 变换和自共轭扩张. 第四章专门讨论无界算子谱的性质和分布, 自共轭算子谱的非空性, 本质谱的分布以及无界自共轭算子、正常算子的谱族和谱表示. 从第五章开始, 把注意力放到微分算子上, 分别从不同的角度讨论一阶微分算子和它的共轭算子, 二阶的 Sturm-Liouville 算子以及高阶微分算子, 介绍了对称微分算子的自共轭扩张, 特别是带有中间亏指数微分算子的自共轭域的刻画和微分算子的辛结构. 最后一章介绍了微分算子的谱理论, 包括常系数的微分算子、Euler 算子、J 自共轭算子本质谱的范围和谱的离散性. 在本书的前四章各节末选配了大量的习题, 习题的一部分内容是为了加深对内容的理解, 提高分析问题、解决问题的能力, 另外一部分是对书中内容的补充.

无界线性算子理论特别是微分算子谱理论, 无论从纯数学还是从应用数学的角度都是十分重要的, 它为微分方程众多问题提供了统一的解决模式和理论框架. 微分算子理论的研究, 可追溯到 20 世纪初 H.Weyl 把经典的 Sturm-Liouville 问题推广到无穷区间, 1926 年 Schrödinger 方程的提出, 1932 年 John von Neumann 建立了量子力学的数学理论, 特别是无界自共轭算子的谱理论. 近几十年来 E.C. Titchmarsh, N. Levison, I. M. Glazman, M. A. Naimark, W. N. Everitt, D.E. Edmunds, A.Zettl 等国际著名数学家在微分算子理论方面作了大量的开拓性研究. 内蒙古大学微分算子讨论班 20 多年来始终坚持在这一方向上做研究工作, 承担了多项国家自然科学基金项目和内蒙古自然科学基金项目, 本书的写作基础是内蒙古大学微分算子研究集体科研工作的积累. 书中一些内容是作者及其内蒙古大学微分算子讨论班多年来取得的一些最新研究成果. 本书可以看成是曹之江的《常微分算子》专著的续篇. 由于作者的学识与能力有限, 书中的偏颇和不当之处在所难免, 希望同仁不吝赐教.

本书的第一章至第五章由孙炯执笔, 第六章由王忠执笔. 作者在写作过程中, 得到了曹之江教授的鼓励和指点, 这使作者能从更高的角度来审视和编排本书的原材料. 王爱平博士选编了全书的习题, 并且十分精细地完成了全书的排版和初校工作, 作者的一些研究生也帮助进行了部分打字和校对工作, 在这里向他们表示诚挚的感谢! 本书的出版得到了华夏英才基金会的资助, 得到了内蒙古自治区统战部的大力支持, 他们对科研著作出版的热忱使得本书得以出版, 作者向华夏英才基金会和内蒙古自治区统战部表示深深的谢意! 两位作者的妻子刘素华、刘冬玲和女儿们为作

者营造了温馨的家庭环境, 始终全力以赴地支持作者在事业上的努力, 谨以此书献给她们.

孙 炯 王 忠

2005 年 1 月于呼和浩特

目　　录

绪　论
——从矩阵的特征值到线性算子的谱理论

数学研究问题的基本方法是把问题数量化、简单化, 用其数字特征来刻画问题的本源特性. 但是专业的数学书籍给读者的第一印象往往都是抽象而难懂. 我们认为: 数学不应该成为一门让人费解的科学.

准确了解数学研究的原始动力 (为什么要研究这样的问题, 研究问题的来源和背景) 是十分重要的, 或者是说从一些简单的例子里, 去掉数学词汇的抽象、数学定理的外饰, 返璞归真是理解和学会数学基本方法. 绪论拟从线性代数、数学分析和微分方程中的一些实例展开, 引申、抽象出本书要研究的问题. 只有从实例才能感悟数学, 学会如何从问题中使用类比、联想等方法, 归纳出一些基本的数学思想方法, 进而去解决未知的问题. 对最基本、最简单数学结构的感悟与理解是学会数学、学懂数学最为关键的一步.

本书的书名中有两个关键词, 一是“线性算子”; 二是“谱”, 这两个词汇对于具有高等数学基础的读者来说可能是完全陌生的. 绪论的内容将从这两个关键词展开.

通俗地说, 线性算子就是一种线性运算, 或者称之为“映射”, 一个元素通过这种运算被转变成另一个元素.

运算始终是数学研究的基本对象. 高等数学中研究的主要对象微分、积分、矩阵都可以看成是运算, 并且都是线性运算. 即满足:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_1(t)+x_2(t))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_2(t),\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha x(t)=\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t).$$

$$\int(x_1(t)+x_2(t))\mathrm{d}t=\int x_1(t)\mathrm{d}t+\int x_2(t)\mathrm{d}t,\quad \int\alpha x(t)\mathrm{d}t=\alpha\int x(t)\mathrm{d}t,$$

$$A(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Ax_1+\beta Ax_2,$$

其中 $A_{n\times n}$ 是 n 维空间中的线性变换 (矩阵).

一般地, 把这样一些运算 T (连同其定义的范围) 称为算子, 满足条件

$$T(x+y)=Tx+Ty,\quad T(\alpha x)=\alpha Tx,\quad \forall x,y\in\mathfrak{D}(T) \tag{0.1.1}$$

的运算称为是线性算子, 其中 $\mathfrak{D}(T)$ 是 T 的定义域.

本书以线性变换、微分、积分这些具有线性性质的运算为应用背景，来研究线性算子的谱理论，“谱”正是反映这种运算本质的数字特征. 对于 n 维空间中线性变换 A 来说，这个线性算子的“谱”实际上就是我们在线性代数中熟知的“特征值”. 我们从下面的例子里来看矩阵的特征分解：

0.1.1 有限维空间矩阵运算的特征值

例 0.1.1 设 A 是从 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的对称矩阵，

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix},\quad A:\ x\to\ Ax,\quad Ax=y,$$

其中 $x,y\in\mathbb{R}^3$.

尽管矩阵中的数字很简单，但是我们从直观上并不能看出这个线性运算 (线性变换) 的运算特征. 学过线性代数的读者知道，A 的运算特征是由它的特征值来确定，并且：

(1) A 是对称的线性变换，

$$A(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Ax_1+\beta Ax_2,\quad (Ax_1,x_2)=(x_1,Ax_2),\quad \forall x_1,x_2\in\mathbb{R}^3;$$

(2) A 的特征值是实的；

(3) A 的属于不同特征值的特征向量相互正交；

(4) A 可以化为对角矩阵. 对称矩阵一定正交相似于一个对角矩阵.

具体做法为：

(i) 求解 $|\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda+1)=0$, $\lambda=2,-1$ 是特征值. 其中 $\lambda=2$ 是 A 的 2 重特征值, $\lambda=-1$ 是单重特征值.

(ii) $\lambda=2$ 时，求出其基础解系如下：

$$\alpha_1=(1,-1,0),\quad \alpha_2=(1,0,-1).$$

(iii) 该基础解系不正交，将其单位正交化：

$$\beta_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\quad \beta_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right),$$

当 $\lambda=-1$ 时，求出其特征向量并单位化：

$$\beta_3=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 成为 $\mathbb{R}^3$ 中的一组标准正交基. 在这组标准正交基下, 矩阵 A 成为对角矩阵, 即: 令

$$C=(\beta_1,\beta_2,\beta_3),$$

则

$$C^{\mathrm{T}}AC=A_1=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\quad 即\quad A\sim A_1=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}. \tag{0.1.2}$$

注 1　在新的坐标系 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 下, 线性变换 A 有最简单的标准型.

注 2　由于 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 是 A 的特征向量, 有

$$A\beta_1=2\beta_1,\quad A\beta_2=2\beta_2,\quad A\beta_3=-\beta_3. \tag{0.1.3}$$

对于 $\forall x\in\mathbb{R}^3$, 在原来的正交基 e_1,e_2,e_3 下,

$$x=(x_1,x_2,x_3)=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3, \tag{0.1.4}$$

其中 $e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1)$.

在空间构造一组新的正交基 (它们是由对称矩阵 A 确定的)β_1,β_2,β_3, 则

$$x=(a_1,a_2,a_3)=a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3, \tag{0.1.5}$$

其中 $a_1=(x,\beta_1),\ a_2=(x,\beta_2),a_3=(x,\beta_3)$ 是 x 在 β_1,β_2,β_3 上的投影.

由于 A 是线性的,

$$\begin{aligned}Ax&=A(a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3)=a_1A\beta_1+a_2A\beta_2+a_3A\beta_3\\&=2a_1\beta_1+2a_2\beta_2-a_3\beta_3=(2a_1,2a_2,-a_3)=y.\end{aligned}$$

这说明, 矩阵 A 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 确定了一组正交基 β_1,β_2,β_3, 对于任何的 $x\in\mathbb{R}^3$, 只要知道 x 在 β_1,β_2,β_3 上的投影 (a_1,a_2,a_3), 则 A 作用的方式一目了然, 即

$$Ax=(\lambda_1a_1,\lambda_2a_2,\lambda_3a_3)=(2a_1,2a_2,-a_3). \tag{0.1.6}$$

注 3　数学处理问题的原则是把复杂的问题简单化. 在确定了特征值和特征向量以后, 在每一个特征子空间上, A 作用的形式是最简单的 (放大、缩小特征值的倍数). 令 P_1,P_2,P_3 是在 β_1,β_2,β_3 上的投影 (算子), 则

$$A=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\lambda_3P_3=2P_1+2P_2-P_3, \tag{0.1.7}$$

在这里 $\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=-1$. A 分解成 3 个投影变换 (算子) 的线性组合.