杜秀云 主　编

宋哲　刘丽娟　副主编

# 复变函数

清华大学出版社

杜秀云 主编 / 宋哲 刘丽娟 副主编

# 复变函数

清华大学出版社
北京

## 内 容 简 介

本书主要包含复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、复级数、留数和留数在定积分计算上的应用等内容. 每章都配有适量习题供读者选用，书末附有习题参考答案.

本书适合于高等院校工科各专业，尤其可作为电子工程、自动化、计算机、测控等专业的教材，还可供工程技术人员阅读参考.



**图书在版编目(CIP)数据**

复变函数/杜秀云主编. --北京：清华大学出版社，2015

ISBN 978-7-302-40741-6

I. ①复…　II. ①杜…　III. ①复变函数–高等学校–教材　IV. ①O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 161843 号



**责任编辑**：汪　操
**封面设计**：常雪影
**责任校对**：刘玉霞
**责任印制**：刘海龙

**出版发行**：清华大学出版社
　　**网　　址**：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
　　**社 总 机**：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　　**投稿与读者服务**：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　**质 量 反 馈**：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
**印 刷 者**：三河市君旺印务有限公司
**装 订 者**：三河市新茂装订有限公司
**经　　销**：全国新华书店
**开　　本**：170mm×230mm　　**印　张**：7.25　　**字　数**：131 千字
**版　　次**：2015 年 7 月第 1 版　　**印　次**：2015 年 7 月第 1 次印刷
**印　　数**：1～2000
**定　　价**：20.00 元

---

产品编号：065256-01

# 前　言

本书作者在多年的“工程数学”教学工作中，感觉到“复变函数”对工科学生来说非常重要. 为此，希望将本书写得便于工科学生掌握，使得他们能运用课程中所学到的方法处理一些专业课程中的实际问题.

在选材上，本书既注重工科数学要求的计算技能的训练，又注意论证能力的培养，兼顾数学方法的物理意义与工程应用背景，突出复变量与实变量之间的关系、级数和积分表示方法，使之尽可能地满足工科各专业的需求，并充分地反映出复变函数的核心内容，真正做到既方便教师教学，又方便学生自学.

在编写上，本书内容精练，深入浅出，强调理论的应用性，对烦琐的理论推导进行适度的约简，将重点放在基本理论与基本方法的应用上，力求做到叙述简洁、通俗易懂.

考虑到“复变函数”的教学恰逢学生学完“高等数学”，因此本书将复变函数与高等数学做了比较，力求概念形式和叙述保持连续，同时更注意其中的创新和发展，使读者既感受到内容的深化和拓展，又不会感到陌生，因而更易于学习.

本书共分 5 章，其中第 1、2、5 章由杜秀云执笔，第 3 章由宋哲执笔，第 4 章由刘丽娟执笔，全书由杜秀云统稿.

感谢辽宁师范大学物理与电子技术学院潘峰院长对本书出版的大力支持及“辽宁师范大学特聘教授专项经费”的资助. 本书还得到“辽宁省重点专业（电子科学与技术专业）建设项目（906049）”和“辽宁师范大学博士启动基金（203564）”的资助. 清华大学出版社的责任编辑做了大量细致的工作，在此深表谢意.

由于水平有限，书中难免有疏漏之处，恳请广大读者批评指正.

编　者

2015 年 5 月

## 目　录

# 第 1 章　复数与复变函数

复变函数的主要内容是研究复数域上的微积分. 本章首先简要回顾复数的概念和运算法则，然后在此基础上进一步引入复变函数、区域的概念，最后介绍复变函数的极限和连续性，为研究解析函数理论奠定必要的基础.

## 1.1　复数

### 1.1.1　复数的概念

在方程的求解过程中，经常遇到类似于 $z^2+1=0$ 这样的开平方问题. 众所周知，在实数范围内，此方程无解. 为了求解此方程，人们定义了 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，提出了与实数对应的复数的概念.

**定义 1.1**　形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 的数称为**复数**，$z=x+\mathrm{i}y$ 这种表示复数的方法也叫做**复数的代数式**. 其中 i 称为**虚数单位**，任意实数 $x$ 和 $y$ 分别称为复数 $z$ 的**实部**和**虚部**，记为

$$x=\operatorname{Re}z,\quad y=\operatorname{Im}z. \tag{1.1}$$

特别地，当 $x=0$，$y\neq 0$ 时，$z=\mathrm{i}y$ 为**纯虚数**.

若两个**复数相等**，必须实部和虚部分别相等. 若复数 $z=0$，必须实部和虚部分别等于零. 复数和实数不同，两个复数不能比较大小.

若两个复数的实部相等，虚部差一负号，则称这两个复数互为**共轭复数**. $z=x+\mathrm{i}y$ 的共轭复数记作 $\overline{z}$，有

$$\overline{z}=x-\mathrm{i}y. \tag{1.2}$$

共轭复数有很多用处，后文将逐渐介绍.

### 1.1.2　复数的表示方法

由于任一复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 与一对有序实数 $(x,y)$ 一一对应，所以复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可以用平面直角坐标系中坐标为 $(x,y)$ 的点表示，如图 1-1 所示. 另外，复数也与从原点指向点 $(x,y)$ 的平面向量一一对应，我们常把点 $z$ 或向量 $z$ 作为复数 $z$ 的同义词. 由于 $x$ 轴上的点对应着实数，$y$ 轴上的点对应着虚数，因此，分别称 $x$ 轴和 $y$ 轴为**实轴**和**虚轴**，把表示复数的平面称为**复平面**.

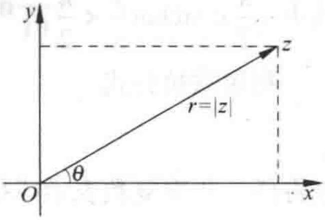


图　1-1

如果将平面直角坐标系$(x,y)$变换为平面极坐标系$(r,\theta)$，即

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases} \quad 其中 \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right), \end{cases} \tag{1.3}$$

则复数$z$在平面极坐标系中的表示式为

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta). \tag{1.4}$$

上式也叫做**复数的三角式**. 式中$r=\sqrt{x^2+y^2}$称为复数$z$的**模**，记作$|z|$，$\theta$称为复数$z$的**辐角**，记作$\mathrm{Arg}\, z$. 显然，下列不等式成立：

$$|x| \leqslant |z|, \quad |y| \leqslant |z|, \quad |z| \leqslant |x| + |y|. \tag{1.5}$$

当$z=0$时，$|z|=0$，但辐角没有明确意义.

任一非零复数有无穷多个辐角，通常称$(-\pi,\pi]$间的辐角为**主辐角**，记作$\arg z$. 这样，任何一个辐角都可以写成

$$\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \cdots. \tag{1.6}$$

辐角的主值$\arg z \ (z \neq 0)$可以用反正切$\mathrm{Arc}\tan\dfrac{y}{x}$的主值$\arctan\dfrac{y}{x}$按下列关系来确定：

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & x>0, y为任意实数, \\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0, y>0, \\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0, y\geqslant 0, \\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0, y<0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0, y<0, \end{cases} \tag{1.7}$$

其中$-\dfrac{\pi}{2} < \arctan\dfrac{y}{x} < \dfrac{\pi}{2}$.

利用欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta, \tag{1.8}$$

可将任一非零复数表示成指数形式

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}. \tag{1.9}$$

上式也叫做**复数的指数式**.

于是，一个复数可以表示成三种形式：代数式、三角式和指数式. 复数的这三种表示法可以互相转换，以适应讨论不同问题的需要.

**例 1.1**　将下列复数变换为三角式和指数式：

（1）$1+\mathrm{i}$；（2）$-1-3\mathrm{i}$；（3）$\sin\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{5}$.

**解**　（1）因为 $|1+\mathrm{i}|=\sqrt{2}$，$\arg(1+\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{4}$，所以复数 $1+\mathrm{i}$ 的三角式可以写成

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

据此可以写出复数的指数式

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.$$

（2）因为 $|-1-3\mathrm{i}|=\sqrt{10}$，$\arg(-1-3\mathrm{i})=\arctan 3-\pi$，所以复数 $-1-3\mathrm{i}$ 的三角式可以写成

$$-1-3\mathrm{i}=\sqrt{10}[\cos(\arctan 3-\pi)+\mathrm{i}\sin(\arctan 3-\pi)].$$

据此可以写出复数的指数式

$$-1-3\mathrm{i}=\sqrt{10}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\arctan 3-\pi)}.$$

（3）本题与复数的标准形式不同，需要标准化. 由题设可知，$|z|=\left|\sin\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{5}\right|=1$，而

$$\sin\frac{\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{3\pi}{10},\quad \cos\frac{\pi}{5}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\frac{3\pi}{10},$$

所以复数 $\sin\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{5}$ 的三角式可以写成

$$\sin\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{5}=\cos\frac{3\pi}{10}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{10}.$$

据此可以写出复数的指数式

$$\sin\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{5}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{10}}.$$

## 1.2 复数的代数运算

### 1.2.1 复数的四则运算

如果两个复数分别为 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 和 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$，$z_1$ 和 $z_2$ 的四则运算定义如下：

加（减）法：

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1) \pm (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2), \tag{1.10}$$

乘法：

$$z_1 z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1), \tag{1.11}$$

除法：

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2)}{(x_2 + \mathrm{i}y_2)(x_2 - \mathrm{i}y_2)} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2},\ z_2 \neq 0.\end{aligned} \tag{1.12}$$

不难证明，与实数的情形一样，复数的四则运算也满足交换律、结合律和分配律.

$$\begin{aligned}&(1)\ 交换律\quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1,\ z_1z_2 = z_2z_1; \\ &(2)\ 结合律\quad z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3,\ z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3; \\ &(3)\ 分配律\quad z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3.\end{aligned} \tag{1.13}$$

结合共轭复数的定义，可以得到共轭复数的下列性质：

$$\begin{cases}\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2,\quad \overline{z_1z_2} = \overline{z}_1\ \overline{z}_2,\quad \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}; \\ \overline{\overline{z}} = z; \\ z\,\overline{z} = |z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2; \\ z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z,\quad z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\operatorname{Im} z.\end{cases} \tag{1.14}$$

**例 1.2** 设 $z_1$，$z_2$ 是任意两个复数，求证：

$$2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2) = z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1z_2.$$

**解** 利用公式（1.14）中的 $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$，可得

$$2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2) = z_1\overline{z}_2 + (\overline{z_1\overline{z}_2}) = z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1z_2.$$

对于复数的乘除运算，除了可以利用代数式以外，还可以利用三角式和指数式，更加简便. 设两个复数分别为

$$z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1) = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1},$$
$$z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) = r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}.$$

乘法运算为

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)} \\ &= r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]. \end{aligned} \tag{1.15}$$

分别写出模和辐角的运算法则，有

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1||z_2|, \tag{1.16}$$

$$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 + 2k\pi = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2. \tag{1.17}$$

除法运算为

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)],\ z_2 \neq 0. \end{aligned} \tag{1.18}$$

模和辐角的运算法则为

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \tag{1.19}$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}\, z_1 - \mathrm{Arg}\, z_2. \tag{1.20}$$

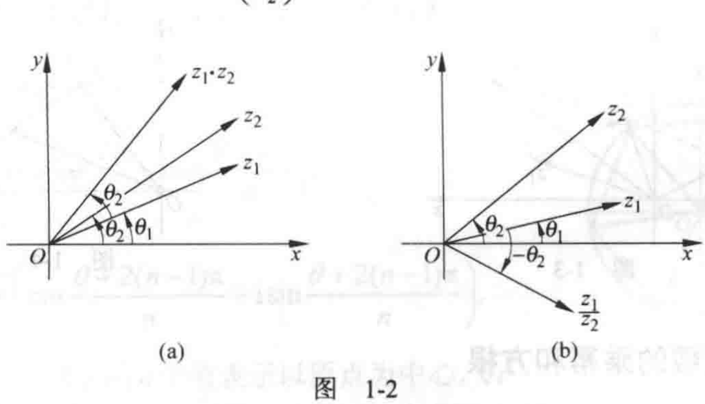


图　1-2

根据式（1.16）和式（1.17）可以得到复数乘法的几何意义：乘积 $z_1 z_2$ 所表示的向量可以从 $z_1$ 所表示的向量旋转角度 Arg $z_2$ 并伸长 $|z_2|$ 倍获得（如图 1-2(a) 所示）. 同理，根据式（1.19）和式（1.20）可以得到复数除法的几何意义：商

$\dfrac{z_1}{z_2}$ 所表示的向量可以从 $z_1$ 所表示的向量旋转角度 $-\mathrm{Arg}\, z_2$ 并缩短 $|z_2|$ 倍获得（如图 1-2(b) 所示）.

**例 1.3** 设 $z=-\dfrac{1}{\mathrm{i}}-\dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$，求 $\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Im}\, z$ 和 $z\bar{z}$ .

**解**

$$
\begin{aligned}
z&=-\frac{1}{\mathrm{i}}-\frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=-\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}(\mathrm{i})}-\frac{3\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}\\
&=\mathrm{i}-\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}\right)\\
&=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}.
\end{aligned}
$$

所以

$$
\mathrm{Re}\, z=\frac{3}{2},\ \ \mathrm{Im}\, z=-\frac{1}{2},\ \ z\bar{z}=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}.
$$

由于复数可以看作平面向量，所以复数的和、差运算也可以在复平面上按照平行四边形法则或三角形法则来表示（如图 1-3 所示），另外，$|z_1-z_2|$ 表示点 $z_1$ ，$z_2$ 之间的距离（如图 1-4 所示），因此有

$$
\begin{aligned}
\big||z_1|-|z_2|\big|&\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,\\
\big||z_1|-|z_2|\big|&\leqslant|z_1-z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.
\end{aligned}
\tag{1.21}
$$

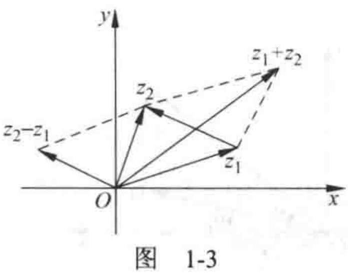


图 1-3

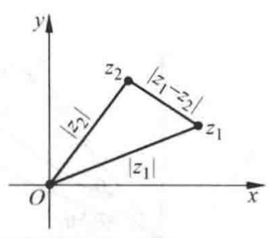


图 1-4

## 1.2.2 复数的乘幂和方根

利用数学归纳法将两个复数的乘积公式（1.15）推广到 $n$ 个复数相乘，可得 $z$ 的 $n$ 次乘幂为

$$
z^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)=r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}. \tag{1.22}
$$

再考虑开方运算，开方是乘方的逆运算，对于任意一个复数 $z$ 以及任意一

个正整数 $n$，所谓 $z$ 的 $n$ 次方根，记作 $\sqrt[n]{z}$，它满足

$$w^n = z.$$

为了求出根 $w$，令

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta), \quad w = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi),$$

于是有

$$[\rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)]^n = \rho^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi) = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

比较左右两边，可以得到

$$\rho^n = r,\ n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

由此解出

$$\rho = \sqrt[n]{r},\ \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

所以

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right).$$

这里 $k$ 表面上可以取 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$，但实际上只要取 $k = 0, 1, \cdots, n-1$ 就可以得出复数 $w$ 的所有 $n$ 个不同的根. 为确定起见，我们可写成

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{1.23}$$

从这个表达式可以看出，$n$ 个不同的值分别为

$$w_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{n}\right),$$

$$w_1 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta + 2\pi}{n}\right),$$

$$\vdots$$

$$w_{n-1} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n}\right).$$

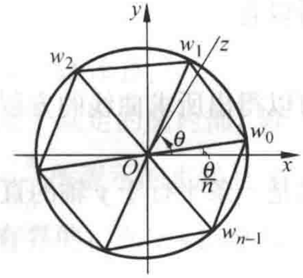

图　1-5

在几何上，$\sqrt[n]{z}$ 的 $n$ 个值表示以原点为中心，$\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆的内接正 $n$ 边形的 $n$ 个顶点，如图 1-5 所示.

**例 1.4**　计算 $(1+\mathrm{i})^5$.

**解**　因 $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$，故

$$(1+\mathrm{i})^5=(\sqrt{2})^5\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)=4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-4-4\mathrm{i}.$$

**例 1.5** 计算 $\sqrt[3]{-8}$.

**解** 因 $-8=8(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)$，故

$$\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right),\quad k=0,1,2.$$

因此，$-8$ 的三次方根分别为

$$w_0=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=1+\sqrt{3}\mathrm{i},$$
$$w_1=2(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)=-2,$$
$$w_2=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right)=1-\sqrt{3}\mathrm{i}.$$

**例 1.6** 求下列方程所表示的曲线：

（1）$|z+\mathrm{i}|=2$；（2）$\mathrm{Re}(\overline{z}+2\mathrm{i})=2$.

**解** （1）方程 $|z+\mathrm{i}|=2$ 表示所有与点 $-\mathrm{i}$ 间距离均为 2 的点的集合，即中心为 $(0,-1)$，半径为 2 的圆，如图 1-6(a) 所示. 设 $z=x+y\mathrm{i}$，则它的直角坐标方程为

$$|x+\mathrm{i}y+\mathrm{i}|=|x+\mathrm{i}(y+1)|=2,$$

也就是

$$x^2+(y+1)^2=4.$$

（2）设 $z=x+\mathrm{i}y$，则

$$\overline{z}+2\mathrm{i}=x-\mathrm{i}y+2\mathrm{i}=x+\mathrm{i}(2-y),$$

所以有

$$\mathrm{Re}(\overline{z}+2\mathrm{i})=x.$$

可以得出所求曲线的方程为

$$x=2.$$

这是一条平行于 $y$ 轴的直线，如图 1-6(b) 所示.

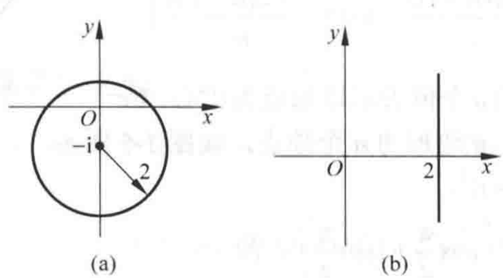


图 1-6

## 1.3 复变函数

前面我们介绍了复数的一些基本概念及运算，接下来讨论复变函数. 复变函数的理论和方法在后续学习中有着非常广泛的应用.

### 1.3.1 区域的相关概念

将函数的概念由实数域推广到复数域时，自变量及函数值的取值范围则相应地推广到复平面上的点集. 复变函数的定义域和值域都是区域，不再像实变函数那样是区间了，为给区域做出严格的定义，首先熟悉下面的概念.

**邻域**　以 $z_0$ 为圆心，任意小的正实数 $\varepsilon$ 为半径作一个圆，圆内所有点的集合 $|z-z_0|<\varepsilon$ 称为点 $z_0$ 的邻域.

**去心邻域**　以 $z_0$ 为圆心，任意小的正实数 $\varepsilon$ 为半径作一个圆，满足 $0<|z-z_0|<\varepsilon$ 的所有点的集合称为点 $z_0$ 的去心邻域.

**内点**　对平面点集 $E$，若 $z_0$ 及其邻域均属于 $E$，则称点 $z_0$ 为 $E$ 的内点.

**外点**　若 $z_0$ 及其邻域均不属于 $E$，则称点 $z_0$ 为 $E$ 的外点.

**边界**　若在 $z_0$ 的每个邻域内，既有属于点集 $E$ 的点，也有不属于 $E$ 的点，则称点 $z_0$ 为 $E$ 的边界点. 所有边界点的集合称为 $E$ 的边界.

**开集**　若点集 $E$ 的每个点都是内点，则称 $E$ 为开集.

**区域**　区域就是复变量 $z$ 的取值范围. 一般用 $D$ 来表示. 它满足下列两个条件：

（1）全部由内点组成（开集）；

（2）具有连通性，即点集中的任意两个点均可以用一条完全属于该点集的折线连接起来.

**闭区域**　由区域 $D$ 及其边界所组成的点集称为闭区域，记作 $\overline{D}$.

如果一个区域 $D$ 可以被包含在一个以原点为中心的某个确定的圆内部，则称 $D$ 是**有界**的，否则称它是**无界**的. 例如不等式 $0<\arg z<\dfrac{\pi}{3}$ 所表示的点集是区域且是无界的；不等式 $|z-1|<2$ 表示的点集是区域且是有界的；而 $|z-1|\leqslant 2$ 只是闭区域，不是区域.

**简单闭曲线**　没有重点的连续曲线称为简单曲线. 若简单曲线的两个端点重合，则称为简单闭曲线.

**单连通域和复连通域**　在区域 $D$ 内任意作一条简单闭曲线，若该曲线内部总属于 $D$，则称 $D$ 为单连通域，否则称为复连通域，如图 1-7 所示.

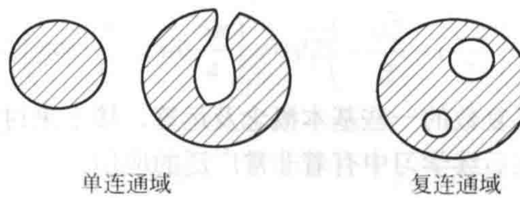


图 1-7

**边界正向** 沿着区域边界走，区域 $D$ 总在左方，则该走向定义为边界的正方向.

对于有界的单连通域，逆时针方向即为正向，而复连通域的外边界以逆时针方向为正向，内边界以顺时针方向为正向，如图 1-8 所示. 与边界正向相反的方向为边界负方向，例如曲线边界 $C$ 的负方向记作 $C^-$.

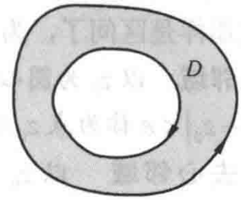


图 1-8

### 1.3.2 复变函数的概念

复变函数的定义，形式上和实变函数的定义一样，不过自变量和函数值都取复数值（也包括实数值）.

**定义 1.2** 如果对区域 $D$ 内每一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$，按照一定的法则 $f$，均有一个或多个 $w=u+\mathrm{i}v$ 与之对应，则称 $w$ 为 $z$ 的**复变函数**，记作

$$w=f(z). \tag{1.24}$$

式中：$z$ 为自变量，$w$ 为因变量，区域 $D$ 为函数的定义域.

如果一个 $z$ 值对应一个 $w$ 值，则 $w=f(z)$ 称为**单值函数**，否则称为**多值函数**. 将 $z=x+\mathrm{i}y$ 带入式（1.24），有

$$w=f(z)=\mathrm{Re}[f(z)]+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}[f(z)]=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y). \tag{1.25}$$

这表明，复变函数其实是两个二元实变函数的有序组合. 这样，一个复变函数总是对应着一对二元实变函数，从而关于复变函数的讨论总可以转化为关于实变函数的讨论，而且实变函数的许多定义、性质和定理也都可以直接推广到复变函数.

**例 1.7** 将定义在复平面上的复变函数 $w=z^2+1$ 化为一对二元实变函数.

**解** 记 $z=x+\mathrm{i}y, w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，代入 $w=z^2+1$，可得

$$u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)=(x+\mathrm{i}y)^2+1=x^2-y^2+1+2xy\mathrm{i}.$$

分开实部和虚部，可得

$$u(x,y)=x^2-y^2+1, v(x,y)=2xy.$$