21世纪数学教育信息化精品教材

高职高专数学立体化教材

线性代数与概率统计学习辅导与习题解答

（经管类·高职高专版·第二版）

·吴赣昌 主编·

中国人民大学出版社

21世纪数学教育信息化精品教材

高职高专数学立体化教材

线性代数与概率统计学习辅导与习题解答

（经管类·高职高专版·第二版）

·吴赣昌　主编·

中国人民大学出版社

·北京·

图书在版编目（CIP）数据

《线性代数与概率统计》学习辅导与习题解答（经管类·高职高专版·第二版）
吴赣昌主编.
北京：中国人民大学出版社，2010
21世纪数学教育信息化精品教材．高职高专数学立体化教材
ISBN 978-7-300-13035-4

Ⅰ.①线…
Ⅱ.①吴…
Ⅲ.①线性代数-高等学校：技术学校-教学参考资料
②概率论-高等数学：技术学校-教学参考资料
③数理统计-高等学校：技术学校-教学参考资料
Ⅳ.①O151.2②O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第224038号

21世纪数学教育信息化精品教材
高职高专数学立体化教材
《线性代数与概率统计》学习辅导与习题解答
（经管类·高职高专版·第二版）
吴赣昌　主编
Xianxing Daishu yu Gailü Tongji Xuexi Fudao yu Xiti Jieda

出版发行	中国人民大学出版社			
社　　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080	
电　　话	010－62511242（总编室）	010－62511398（质管部）		
	010－82501766（邮购部）	010－62514148（门市部）		
	010－62515195（发行公司）	010－62515275（盗版举报）		
网　　址	http://www.crup.com.cn			
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）			
经　　销	新华书店			
印　　刷	北京鑫霸印务有限公司			
规　　格	148 mm×210 mm　32开本	**版　　次**	2010年12月第1版	
印　　张	9.875	**印　　次**	2010年12月第1次印刷	
字　　数	368 000	**定　　价**	18.00元	

前　言

人大版“21世纪数学教育信息化精品教材”（吴赣昌主编）是融纸质教材、教学软件与网络服务于一体的创新性“立体化教材”. 教材自出版以来，历经多次的升级改版，已形成了独特的立体化与信息化的建设体系，更加适应我国大众化教育新时代的教育改革，受到全国广大师生的好评，迄今已被全国600余所大专院校广泛采用.

大学数学是自然科学的基本语言，是应用模式探索现实世界物质运动机理的主要手段. 对于非数学专业的大学生而言，大学数学的教育，其意义则远不仅仅是学习一种专业的工具而已. 事实上，在大学生涯中，就提高学习基础、提升学习能力、培养科学素质和创新能力而言，大学数学是最有用且最值得你努力学习的课程.

为方便同学们使用“21世纪数学教育信息化精品教材”，学好大学数学，作者团队建设了与该系列教材同步配套的“学习辅导与习题解答”. 该系列教辅书籍均根据教材章节顺序编排了相应的学习辅导内容，其中每一节的设计中包括了该节的**主要知识归纳**、**典型例题分析**与**习题解答**等内容，而每一章的设计中包括了该章的**教学基本要求**、**知识点网络图**与**题型分析**，上述设计有助于学生在课后自主研读时通过这些教辅书更好更快地掌握所学知识，在较短时间内取得好成绩.

在大学数学的学习过程中，要主动把握好从“学数学”到“做数学”的转变，不要以为你在课堂教学过程中听懂了就等于学到了，事实上，你需要在课后花更多的时间主动去做相关训练才能真正掌握所学知识. 而在课后的自学与练习过程中，首先要反复、认真地阅读教材，真正掌握大学数学的基本概念；在做习题时，你应先尝试独立完成习题，尽量不看答案，做完习题后，再参考本书进行分析和比较，这样便于发现哪些知识自己还没有真正理解.

与传统的教材和教辅建设不同的是，我们有一支实力雄厚、专业专职的作者队伍，我们还为读者朋友打造了数苑网（www.math168.com），此网站为本系列教材与教辅的用户提供丰富的资源性与交互性的网络学习服务，其中最为直接相关的是数苑论坛中专门建设的**“大学公共数学同步学习论坛”**（建设中，

待投入使用)，该论坛的建设旨在为全国大学数学相关课程的教学双方提供一个基于网络进行学习辅导与交流讨论的平台；**其最大的特色**在于该论坛的编辑工具中集成了作者团队开发的、国际领先的网页公式编辑系统 Web-FES 与网页图形编辑系统 Web-GES，使得论坛能支持文字、公式与图形的在线编辑、发布、复制、粘贴与修改，从而使得该论坛能全面支持用户基于网络进行数学与科学知识的在线交流与讨论. 在该论坛中，用户不仅可用跟帖方式对各类教学要点、例题与习题进行交流讨论，还可用主动发帖方式将自己学习中遇到的困惑、问题或者获得的经验、心得发布到论坛上进行交流讨论. 大学公共数学同步学习论坛的建设有利于汇聚广大师生的智慧对课程教育与学习相关的各类问题进行深入的讨论，而论坛中建设与积累的丰富教学资源又能进一步为参与交流讨论的师生创造良好的教学环境.

与“21 世纪数学教育信息化精品教材”配套建设的教辅书籍包含了面向普通本科理工类、经管类、农林类、医药类、医学类与纯文科类的 14 套共 16 本，面向各类三本院校理工类与经管类的 6 套共 7 本，面向高职高专院校的理工类、经管类与综合类的 7 套共 7 本，总计 27 套 30 本. 此外，该系列教辅书籍的内容建设与编排具有相对的独立性，它们还可以作为相应大学数学课程教学双方的参考书.

经常登录作者团队倾力为你建设的“数苑网”(www. math168. com)，你将会获得意想不到的收获. 在那里，你不仅能进一步拓展自己的学习空间，下载优秀的学习交流软件，寻找到更多教材教辅之外的学习资源，而且还能与来自全国各地的良师益友建立联系.

吴赣昌

2010 年 6 月 18 日

目　　录

第一部分　线性代数

第二部分　概率统计

第一部分　线性代数

第1章　行 列 式

行列式实质上是由一些数值排列成的数表按一定的法则计算得到的一个数. 历史上，行列式的概念是在研究线性方程组的解的过程中产生的. 如今，它在数学的许多分支中都有着非常广泛的应用，是一种常用的计算工具. 特别是在本门课程中，它是研究后面线性方程组、矩阵及向量组的线性相关性的一种重要工具.

本章教学基本要求：

1. 了解行列式的定义；

2. 熟练掌握行列式的性质，并且会正确使用行列式的有关性质化简行列式，利用“三角化”计算行列式，了解行列式按行（列）展开法则（降阶法）；

3. 理解克莱姆法则，并会用克莱姆法则判定线性方程组解的存在性、唯一性及求出方程组的解。

§1.1　行列式的定义

一、主要知识归纳

表1—1—1　　**二阶行列式**

定义	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$
计算规律	对角线法则：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{matrix} - \\ + \end{matrix}$
应用	二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$ 记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$， 则 $x_1=\dfrac{D_1}{D}$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}$.

表 1—1—2　三阶行列式

定义	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$
	划去元素 a_{ij} 所在的行与列后剩下的元素按原来顺序所组成的行列式，称为 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}；而 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式.
计算规律	按第一行（列）展开 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}A_{1j}$； $= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = \sum_{i=1}^{3} a_{i1}A_{i1}.$
应用	三元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$ 记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$， $D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$， 则 $x_1=\frac{D_1}{D}$，$x_2=\frac{D_2}{D}$，$x_3=\frac{D_3}{D}$.

表 1—1—3　*n* 阶行列式

n 阶行列式	$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ $= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}\ (i=1, 2, \cdots, n)$ $= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}\ (j=1, 2, \cdots, n)$

二、典型例题分析

例 1　解方程组

$$\begin{cases} bx - ay + 2ab = 0 \\ -2cy + 3bz - bc = 0 \\ cx + az = 0 \end{cases}.$$

解　因为

$$D=\begin{vmatrix} b & -a & 0 \\ 0 & -2c & 3b \\ c & 0 & a \end{vmatrix}=-5abc,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} -2ab & -a & 0 \\ bc & -2c & 3b \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}=5a^2bc,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} b & -2ab & 0 \\ 0 & bc & 3b \\ c & 0 & a \end{vmatrix}=-5ab^2c,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} b & -a & -2ab \\ 0 & -2c & bc \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix}=-5abc^2,$$

所以

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{5a^2bc}{-5abc}=-a,\ y=\frac{D_2}{D}=\frac{-5ab^2c}{-5abc}=b,\ z=\frac{D_3}{D}=\frac{-5abc^2}{-5abc}=c.$$

小结：本题求解三元线性方程组，但其关键在于计算相关的三阶行列式.

例 2　当元素 x 为何值时，使得三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 5 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}=0$?

解　将行列式按第二行展开得

$$D=-4\cdot\begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & x \end{vmatrix}+x\cdot\begin{vmatrix} 5 & x \\ 1 & x \end{vmatrix}=-4x+4x^2=0,$$

解得 $x=0$ 或 $x=1$.

例 3　计算四阶行列式：$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$.

解　按第 1 列展开得

$$D=a\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}+b\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & b \\ a & b & 0 \\ b & a & 0 \end{vmatrix}$$

再按以上两行列式都按第三列展开得

$$D=a\times(-1)^{1+1}\times a\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}+b\times(-1)^{4+1}\times b\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}$$

$$=a^2(a^2-b^2)-b^2(a^2-b^2)$$

$$=(a^2-b^2)^2$$

小结: 前两例都是根据行列式的展开式来计算行列式，利用了代数余子式和二阶行列式的对角线法则.

例 4 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

解 将行列式按第1列展开得

$$D_n=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}+$$

$$1\times(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}=1+(-1)^{n+1}.$$

小结: 本题根据 n 阶行列式的定义来计算行列式，并用到了上三角行列式与下三角行列式的概念和计算.

三、习题 1—1 解答

1. 计算下列二阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$.

解 原式$=1\times4-3\times1=1$.

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$.

解 原式$=2\times2-1\times(-1)=5$.

(3) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$.

解 原式$=a\cdot b^2-b\cdot a^2=ab(b-a)$.

2. 计算下列三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix}$.

解 由定义
$$\begin{vmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix}=(-2)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}+(-4)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$
$$=24-84+12=-48.$$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$.

解
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}-(-1)\cdot\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$=(-5\times6-(-3)\times3)+(4\times6-(-3)\times2)$$
$$=-30+9+24+6=9.$$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.

解
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}-(-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$=(1\times(-1)-1\times3)+(1\times(-1)-1\times2)+2\times(1\times3-1\times2)$$
$$=-1-3-1-2+6-4=-5.$$

3. 求行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中元素 2 和 -2 的代数余子式.

解 元素 2 的代数余子式为

$$(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=0;$$

元素-2的代数余子式为

$$(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}-3 & 4\\ 5 & 3\end{vmatrix}=29.$$

4. 写出行列式$D=\begin{vmatrix}5 & -3 & 0 & 1\\ 0 & -2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 4 & 7\\ 0 & 3 & 0 & 2\end{vmatrix}$中元素$a_{23}=-1$，$a_{33}=4$的代数余子式.

解 $A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}5 & -3 & 1\\ 1 & 0 & 7\\ 0 & 3 & 2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}5 & -3 & 1\\ 1 & 0 & 7\\ 0 & 3 & 2\end{vmatrix}.$

$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}5 & -3 & 1\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 3 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & -3 & 1\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 3 & 2\end{vmatrix}.$

5. 已知四阶行列式D中第3列元素依次为-1，2，0，1，它们的余子式依次为5，3，-7，4，求D.

解 $D=(-1)\times5-2\times3+0\times(-7)-1\times4=-15.$

6. 证明：$\begin{vmatrix}a^2 & ab & b^2\\ 2a & a+b & 2b\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(a-b)^3.$

证 左边$\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1}\begin{vmatrix}a^2 & ab-a^2 & b^2-a^2\\ 2a & b-a & 2b-2a\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}ab-a^2 & b^2-a^2\\ b-a & 2b-2a\end{vmatrix}$

$=(b-a)(b-a)\begin{vmatrix}a & b+a\\ 1 & 2\end{vmatrix}=(a-b)^3=$右边.

7. 按第3列展开下列行列式，并计算其值：

(1) $\begin{vmatrix}1 & 0 & a & 1\\ 0 & -1 & b & -1\\ -1 & -1 & c & -1\\ -1 & 1 & d & 0\end{vmatrix}.$

解 原式$=a\begin{vmatrix}0 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}$

$$-d\begin{vmatrix}1&0&1\\0&-1&-1\\-1&-1&-1\end{vmatrix}$$

$$=a\left(\begin{vmatrix}-1&-1\\1&0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{vmatrix}\right)-b\left(\begin{vmatrix}-1&-1\\1&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1&-1\\-1&1\end{vmatrix}\right)$$

$$+c\left(\begin{vmatrix}-1&-1\\1&0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&1\\-1&-1\end{vmatrix}\right)-d\left(\begin{vmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&1\\-1&-1\end{vmatrix}\right)$$

$$=a+b+d.$$

(2) $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&0&0&0\\a_{41}&a_{42}&0&0&0\\a_{51}&a_{52}&0&0&0\end{vmatrix}.$

解 $$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&0&0&0\\a_{41}&a_{42}&0&0&0\\a_{51}&a_{52}&0&0&0\end{vmatrix}=a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&0&0\\a_{41}&a_{42}&0&0\\a_{51}&a_{52}&0&0\end{vmatrix}-$$

$$a_{23}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{14}&a_{15}\\a_{31}&a_{32}&0&0\\a_{41}&a_{42}&0&0\\a_{51}&a_{52}&0&0\end{vmatrix}=0.$$

§1.2 行列式的性质

一、主要知识归纳

表 1—2—1

性质 1	行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.
性质 2	交换行列式的两行（列），行列式变号. 推论 1　若行列式中有两行（列）的对应元素相同，则此行列式为零.
性质 3	用数 k 乘行列式的某一行（列），等于用数 k 乘此行列式. 推论 2　行列式的某一行（列）中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面. 推论 3　行列式中若有两行（列）元素成比例，则此行列式为零.

续前表

性质4	若行列式的某一行（列）的元素都是两数之和，则此行列式可写成两个行列式的和，这两个行列式分别以这两个数为该行（列）的元素，其它元素不变.
性质5	将行列式的某一行（列）的所有元素都乘以数 k 后加到另一行（列）对应位置的元素上，行列式的值不变.
三角化	反复利用行列式的性质，把给定的行列式化为三角形行列式，此时行列式的值即为该三角形行列式主对角线上元素的乘积.
降阶法	用按行（列）展开法则与行列式的性质将高阶行列式化为低阶行列式的方法：先用行列式的性质将行列式的某一行（列）化为仅含有一个非零元素，再将行列式按此行（列）展开，化为低一阶的行列式，如此继续下去，直到化为二阶行列式为止.

二、典型例题分析

例1 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

解 $D=\begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=x\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[i=2,\,3,\,4]{r_i-r_1}x\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}-x\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 0 & x & 0 & -x \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix}=x^4.$$

小结：针对本题中行（列）和相等的这类行列式的计算方法为：先将各列（行）加到第一列（行）后提取出公因式，再三角化. 一般在三角化过程中比较关键的一步就是把某一行（列）的元素全化为1.

例2 证明行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ 能被13整除（不计算行列式的值）.

证 将 D 中的每一行看成一个三位数，分别为 104，325，416，它们都是 13 的倍数，利用行列式的性质将 D 的第 1，2 列分别乘以 10^2，10 都加到第 3 列，得

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 104 \\ 3 & 2 & 325 \\ 4 & 1 & 416 \end{vmatrix}$$

因第 3 列能被 13 整除，由行列式可提取公因数的性质可得 D 也能被 13 整除.

小结： 证明行列式能被某整数 k 整除，通常的方法是证明行列式的某行（列）的各元素都有公因子 k，本题的关键是利用行列式的性质把第三列“凑”成 13 的倍数.

例 3 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

解 D_n 类似爪型行列式◸，将第 i（$i=2,\cdots,n$）列乘上 $\left(-\frac{1}{i}\right)$ 后加到第一列，得

$$D_n \xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_1+r_i\times\left(-\frac{1}{i}\right)} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix},$$

再将 D_n 按第一列展开，有

$$D_n=-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix},$$

$$=-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)n!.$$

小结： 类似这种爪形行列式，一般的方法是先将行列式三角化，再用降阶法