《数学中的小问题大定理》丛书（第四辑）

面积原理

——从常庚哲命的一道CMO试题的积分解法谈起

刘培杰数学工作室 编

◎ 历史与经典结果

◎ 二次及三次的高维求积公式

◎ 构造数值积分公式的算子方法

◎ 高维矩形区域上的数值积分与误差估计

◎ 多元周期函数的数值积分与误差估计

◎ 高维数值积分公式的误差界限决定法

HITP

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

《数学中的小问题大定理》丛书（第四辑）

面积原理

——从常庚哲命的一道CMO试题的积分解法谈起

刘培杰数学工作室 编

◎历史与经典结果

◎二次及三次的高维求积公式

◎构造数值积分公式的算子方法

◎高维矩形区域上的数值积分与误差估计

◎多元周期函数的数值积分与误差估计

◎高维数值积分公式的误差界限决定法

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书是从常庚哲命的一道 CMO 试题的积分解法谈起，进而介绍了面积原理问题. 本书共有 9 章：第 1 章引言，第 2 章历史与经典结果，第 3 章近代理论介绍——关于高维求积公式的某些简单定理，第 4 章二次及三次的高维求积公式，第 5 章构造数值积分公式的算子方法，第 6 章高维积分的“降维法”与二维求积公式的一种构造法，第 7 章高维矩形区域上的数值积分与误差估计，第 8 章多元周期函数的数值积分与误差估计，第 9 章高维数值积分公式的误差界限决定法.

本书适合大、中学师生及数学爱好者阅读及收藏.

图书在版编目(CIP)数据

面积原理：从常庚哲命的一道 CMO 试题的积分解法谈起/刘培杰数学工作室编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015. 1

ISBN 978 - 7 - 5603 - 5110 - 0

Ⅰ. ①面… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①面积—普及读物 Ⅳ. ①O123. 3 - 49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 303176 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　穆　青
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451—86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 19.5　字数 201 千字
版　　次　2015 年 1 月第 1 版　2015 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978 - 7 - 5603 - 5110 - 0
定　　价　48.00 元

目录

第1章 引言

中国科技大学前数学系主任常庚哲教授曾撰文说：

第 11 届中学生数学冬令营于 1996 年元月在南开大学举行. 竞赛试题中的第五题是这样的：

设 $n\in\mathbf{N}, x_0=0, x_i>0, i=1,2,\cdots,n$，且 $\sum_{i=1}^{n} x_i=1$. 求证

$$1\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1+x_0+x_1+\cdots+x_{i-1}}\sqrt{x_i+\cdots+x_n}}<\frac{\pi}{2}$$

上述左边那个不等式是极易证明的，绝大多数的参赛者都做对了. 但是，右边的那个不等式证出来的只有 18 人，在近 120 名选手中，这是一个很小的比例. 在本节中，常教授讲了这个题目的命题思路.

先讲一讲右边那个不等式的证法. 在证明中，关键是要利用一个熟知的不等式：当 $0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时

$$0<\sin\theta<\theta$$

作变换

$$\sin\theta_i = x_0 + x_1 + \cdots + x_i \quad (0 \leqslant \theta_i \leqslant \frac{\pi}{2})$$

$i=1,2,\cdots,n$，易见

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n = \frac{\pi}{2}$$

于是

$$x_i = \sin\theta_i - \sin\theta_{i-1} = 2\sin\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{2}\cos\frac{\theta_i + \theta_{i-1}}{2}$$

$$(1 + x_0 + \cdots + x_{i-1})(x_i + \cdots + x_n) =$$
$$1 - (x_0 + x_1 + \cdots + x_{i-1})^2 =$$
$$1 - \sin^2\theta_{i-1} = \cos^2\theta_{i-1}$$

因此原不等式最中央的那个表达式变成

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2\sin\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{2}\cos\frac{\theta_i + \theta_{i-1}}{2}}{\cos\theta_{i-1}} \tag{1}$$

由于 $\cos\theta$ 在$[0,\frac{\pi}{2}]$上是单调下降的，故

$$\cos\frac{\theta_i + \theta_{i-1}}{2} < \cos\theta_{i-1}$$

再利用

$$2\sin\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{2} < 2\left(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{2}\right) = \theta_i - \theta_{i-1}$$

可见表达式(1)应严格地小于

$$\sum_{i=1}^{n}(\theta_i - \theta_{i-1}) = \theta_n - \theta_0 = \frac{\pi}{2}$$

这就证明了右边的不等式.

作为本题的命题人，常教授还介绍了这个题目是如何构想出来的. 在高等数学中，有一种“用积分来估计和式”或称“面积原理”的技巧. 华罗庚教授生前十分

重视这种技巧，在他的专著《数论导引》以及教程《高等数学引论》(第一卷第一分册)中，有专门的章节加以介绍. 面积原理的大意如下：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是非负的，严格上升的函数，又设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 n 个小区间的长度，这些小区间组成了 $[a,b]$ 上的一个分割，在每一个小区间上对应着一个矩形，矩形由图 1 的斜线标出，这些矩形的面积之和是

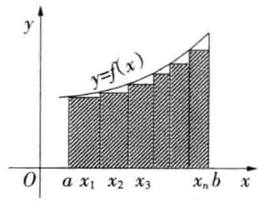

图 1

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f(a + x_0 + x_1 + \cdots + x_{i-1})$$

这里规定 $x_0 = 0$，显然 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = b - a$. 由面积关系可见

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f(a + x_0 + x_1 + \cdots + x_{i-1}) < S_a^b(f) \quad (2)$$

这里 $S_a^b(f)$ 表示由 x 轴、两平行直线 $x=a$ 及 $x=b$ 以及曲线 $y=f(x)$ 所包围的面积，有积分知识的人都会知道，$S_a^b(f)$ 正是定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

类似地考虑可以得出

$$S_a^b(f) < \sum_{i=1}^{n} x_i f(a + x_1 + \cdots + x_i) \quad (3)$$

由此可见，对于任何适合上述条件的函数 f，由式(2)与(3)便能构造出两个不等式，当然一个重要的前提是 $S_a^b(f)$ 能算得出来.

例 1　设 $x_0 = 0, n \in \mathbf{N}, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是任意的正数，适合 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. 求证：对任何 $m \in \mathbf{N}$ 有不等式

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(x_0 + x_1 + \cdots + x_{i-1})^m <$$

$$\frac{1}{m+1} < \sum_{i=1}^{n} x_i(x_1 + \cdots + x_i)^m$$

证 这时函数 $f(x)=x^m$,它在$[0,1]$上是严格上升的,积分学的知识告诉我们

$$\int_0^1 x^m \mathrm{d}x = \frac{1}{m+1}$$

令

$$y_i = x_0 + x_1 + \cdots + x_i \quad (i=0,1,2,\cdots,n)$$

故

$$0 = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = 1$$

这时

$$x_i(x_0+x_1+\cdots+x_{i-1})^m =$$

$$(y_i - y_{i-1})y_{i-1}^m <$$

$$(y_i - y_{i-1}) \cdot \frac{y_{i-1}^m + y_{i-1}^{m-1}y_i + \cdots + y_{i-1}y_i^{m-1} + y_i^m}{m+1} =$$

$$\frac{y_i^{m+1} - y_{i-1}^{m+1}}{m+1}$$

求和可得

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(x_0 + x_1 + \cdots + x_{i-1})^m <$$

$$\frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{n}(y_i^{m+1} - y_{i-1}^{m+1}) =$$

$$\frac{1}{m+1}(y_n^{m+1} - y_0^{m+1}) =$$

$$\frac{1}{m+1}$$

右边的不等式可以同法证明.

熟悉定积分的人,可以构造出众多的这一类不等式,但是,为了能够让中学生在他们的知识和技巧范围内证出来,那就不是任选一个函数 f 都合适. 在冬令营那个试题中,函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,它在靠近 1 的地方变为无穷大. 积分 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ 是非正常积分. 不过,当作变量代换 $x=\sin\theta$ 之后,积分便成为

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\mathrm{d}\theta$$

这时的被积函数是常数 1,它是最简单的函数了. 这种考虑正提示了在离散的情形也用正弦函数来作变换. 这就保证了至少有一种初等的方法可以奏效.

最后,提出三点注记:

1. 由于是对任何的自然数 n 以及任意的分割 x_1, x_2, …, x_n 都要求不等式成立,所以常数 $S_a^b(f)$ 在式(2)中不可以用更小的数来代替,在式(3)中不可以用更大的数来代替. 也就是说,这个常数是最佳的.

2. 面积原理对于严格下降的函数也能适用,这时不等式(2)与(3)都应反向. 建议读者对函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[0,1]$作出两个不等式,并加以证明.

3. 数学上的技巧是不厌反复使用的,但是,戏法若泄漏了机关,那也就是只能玩一次. 所以说,用同一种技巧来形成类似的试题,那意义就不大了.

当年中科大数学系的讲授体系有三条龙,分别是"华龙"(华罗庚)、"吴龙"(吴文俊)、"关龙"(关肇直). 其中"华龙"积分是这样讲的:

§1 求面积

设 $c<a<b$，求在 $x=a$，$x=b$ 之间，x 轴与曲线(C)

$$y=f(x)$$

之间的面积. 为方便起见，我们暂时假定曲线(C)在 x 轴的上方(图 2).

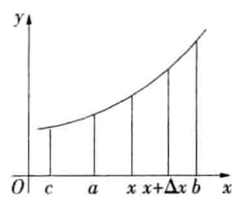

图 2

令 $F(x)$表示 c，x 之间及 x 轴与曲线(C)之间的面积，令

$$M=\max_{x\leqslant t\leqslant x+\Delta x} f(t),m=\min_{x\leqslant t\leqslant x+\Delta x} f(t) \qquad (1)$$

考虑面积大小显然有

$$m\Delta x\leqslant F(x+\Delta x)-F(x)\leqslant M\Delta x \qquad (2)$$

也就是

$$m\leqslant\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}\leqslant M \qquad (3)$$

假定 $f(x)$是连续的，由式(3)，当 $\Delta x\to 0$，可知 $F'(x)$存在，且

$$F'(x)=f(x)$$

也就是

$$F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x+C$$

这个 C 是待定常数.

在 $x=a$，$x=b$ 之间的面积等于

$$F(b)-F(a)$$

我们就记之为

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b$$

这称为函数 $f(x)$的定积分，a，b 分别称为定积分的下限与上限.

例如，$f(x)=\lambda x^2$，则在$(0,x)$之间，抛物线与 x 轴之间的面积等于

$$\int_0^x \lambda t^2 \, \mathrm{d}t = \frac{\lambda x^3}{3}$$

如果曲线在 x 轴的下方，这种方法所求出的数值是面积的负值；如果有一部分在 x 轴的上方，一部分在 x 轴的下方，我们所得出的积分值就是 x 轴上部的面积与 x 轴下部的面积的差.

例如，$f(x)=x^3$，在$(-a,a)$之间的定积分等于

$$\int_{-a}^{a} x^3 \, \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}\bigg|_{-a}^{a} = \frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{4} = 0$$

这并不是说面积等于 0. 因为从 0 到 a，积分等于

$$\int_0^a x^3 \, \mathrm{d}x = \frac{a^4}{4}$$

而从$-a$ 到 0，积分等于

$$\int_{-a}^{0} x^3 \, \mathrm{d}x = \frac{a^4}{4}$$

如果要求的是 x 轴与曲线 $y=x^3$ 之间及在$-a$ 与 a 间的面积的绝对值，应当是$\frac{a^4}{2}$.

如果曲线是由若干个连续曲线所组成的，我们也可以算出面积. 例如

$$f(x)=\begin{cases} x^2, 0\leqslant x\leqslant 1 \\ x^3, 1\leqslant x\leqslant 2 \end{cases}$$

则

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x + \int_1^2 x^3 \, \mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}(2^4-1)=$$

$$\frac{1}{3}+\frac{15}{4}=4\frac{1}{12}$$

例 1 求界于抛物线

$$y=ax^2+bx+c$$

与 x 轴之间，及距离是 h 的两个纵坐标之间的面积等于

$$\frac{h}{6}(y_1+y_2+4y_0)$$

此处 y_1，y_2 是两端的纵坐标，y_0 是中点的纵坐标.

解 令左端的横坐标是 x_1，面积等于

$$\int_{x_1}^{x_1+h}(ax^2+bx+c)\mathrm{d}x=$$

$$\frac{a}{3}((x_1+h)^3-x_1^3)+\frac{1}{2}b((x_1+h)^2-x_1^2)+ch=$$

$$\frac{1}{3}ah(3x_1^2+3x_1h+h^2)+\frac{1}{2}bh(2x_1+h)+ch=$$

$$\frac{h}{6}\Big[a(x_1+h)^2+b(x_1+h)+c+ax_1^2+bx_1+c+$$

$$4a\left(x_1+\frac{h}{2}\right)^2+4b\left(x_1+\frac{h}{2}\right)+4c\Big]$$

证毕.

例 2 椭圆的方程是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

求椭圆面积(图 3).

解 椭圆的总面积等于椭圆在第一象限内面积的四倍，即

$$S=4\int_0^a y\mathrm{d}x=4b\int_0^a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x=$$

$$4ab\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t=$$

$$2ab(t\sqrt{1-t^2}+\sin^{-1}t)\Big|_0^1=$$

$$\pi ab$$

例 3 计算在两条曲线

$$y=x^2,x=y^2$$

间的面积(图 4).

解 这两个方程的交点是(0,0),(1,1),因为在区间(0,1)上

$$\sqrt{x}\geqslant x^2$$

由此所求的面积等于

$$\int_0^1\sqrt{x}\,\mathrm{d}x-\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

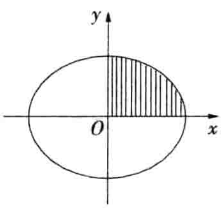

图 3

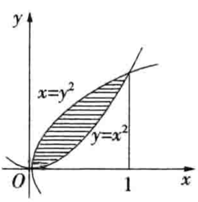

图 4

§2 定积分的概念

现在我们可以把定积分的概念抽象化. 如果

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x)=f(x)$$

我们就定义

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

为 $f(x)$ 由 a 到 b 的定积分.

我们假定 $a<b$,并且假定在 a,b 中添上一批分点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

则由拉格朗日(Lagrange)公式得出

$$F(b)-F(a)=\sum_{v=1}^{n}(F(x_v)-F(x_{v-1}))=$$
$$\sum_{v=1}^{n}(x_v-x_{v-1})f(x'_v)$$

这里 $x_v>x'_v>x_{v-1}$.

我们现在从任意的 $f(x)$ 出发,考虑更一般的和

$$\sigma_n=\sum_{v=1}^{n}(x_v-x_{v-1})f(\xi_v) \tag{1}$$

这里 ξ_v 是区间 (x_{v-1},x_v) 中的任意一点. 我们的问题是当添入任意分点 x_v,使

$$\lambda=\max_{v=1,2,\cdots,n}(x_v-x_{v-1})\to 0$$

时,对任意的 $\xi_v(x_{v-1}\leqslant\xi_v\leqslant x_v)$,$\sigma_n$ 是否皆有相同的极限存在. 如果存在,我们称之为 $f(x)$ 由 a 到 b 的定积分,或称为黎曼(Riemann)定积分,而 $f(x)$ 称为 Riemann 可积函数.

如果 $f(x)$ 不是有界的,在式(1)中至少有一次没有意义. 因此现在我们所讨论的函数常假定它们适合于

$$m<f(x)<M$$

即存在有限的上、下界.

令

$$M_v=\overline{Bd}_{x_{v-1}\leqslant x\leqslant x_v}f(x),m_v=\underline{Bd}_{x_{v-1}\leqslant x\leqslant x_v}f(x)$$

分别表示 $f(x)$ 在区间 $[x_{v-1},x_v]$ 中的上确界与下确界,并以