

《数学中的小问题大定理》丛书（第四辑）

面积原理

——从常庚哲命的一道 π 试题的积分解法谈起

刘培杰数学工作室 编



◎ 历史与经典结果

◎ 二次及三次的高维求积公式

◎ 构造数值积分公式的算子方法

◎ 高维矩形区域上的数值积分与误差估计

◎ 多元周期函数的数值积分与误差估计

◎ 高维数值积分公式的误差界限决定法



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

《数学中的小问题大定理》丛书（第四辑）

面积原理

——从常庚哲命的一道Cao试题的积分解法谈起

刘培杰数学工作室 编



◎ 历史与经典结果

◎ 二次及三次的高维求积公式

◎ 构造数值积分公式的算子方法

◎ 高维矩形区域上的数值积分与误差估计

◎ 多元周期函数的数值积分与误差估计

◎ 高维数值积分公式的误差界限决定法



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书是从常庚哲命的一道 CMO 试题的积分解法谈起,进而介绍了面积原理问题. 本书共有 9 章:第 1 章引言,第 2 章历史与经典结果,第 3 章近代理论介绍——关于高维求积公式的某些简单定理,第 4 章二次及三次的高维求积公式,第 5 章构造数值积分公式的算子方法,第 6 章高维积分的“降维法”与二维求积公式的一种构造法,第 7 章高维矩形区域上的数值积分与误差估计,第 8 章多元周期函数的数值积分与误差估计,第 9 章高维数值积分公式的误差界限决定法.

本书适合大、中学师生及数学爱好者阅读及收藏.

图书在版编目(CIP)数据

面积原理:从常庚哲命的一道 CMO 试题的积分解法谈起/刘培杰数学工作室编. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2015. 1

ISBN 978-7-5603-5110-0

I. ①面… II. ①刘… III. ①面积—普及读物
IV. ①O123. 3-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 303176 号

策划编辑	刘培杰	张永芹
责任编辑	张永芹	穆青
封面设计	孙茵艾	
出版发行	哈尔滨工业大学出版社	
社址	哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号	邮编 150006
传真	0451-86414749	
网址	http://hitpress.hit.edu.cn	
印刷	哈尔滨工业大学印刷厂	
开本	787mm×960mm	1/16 印张 19.5 字数 201 千字
版次	2015 年 1 月第 1 版	2015 年 1 月第 1 次印刷
书号	ISBN 978-7-5603-5110-0	
定价	48.00 元	

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎ 目 录

第 1 章	引 言	//1
§ 1	求面积	//6
§ 2	定积分的概念	//9
第 2 章	历史与经典结果	//24
§ 1	最简单的求积公式	//24
§ 2	函数类	//31
§ 3	泰勒公式	//38
§ 4	求积公式逼近的精确估值	//40
§ 5	关于特殊求积公式的数值常数	//44
§ 6	复杂化求积公式——对函数类逼近的上限的估值	//50
§ 7	对于个别的函数的估值、求积公式的选择	//60
§ 8	常数 κ ——求积公式的改进	//69
§ 9	对于多维求积公式的估值	//72
§ 10	极值问题	//81
§ 11	对于类 $W_2^{(n+1)}(M; 0, m)$ 的带等距基点的最佳求积公式	//97
§ 12	含导数值的求积公式	//103
§ 13	厄尔米特内插公式	//106
§ 14	一般极值问题	//109

§ 15	与零有最小偏差的切比雪夫多项式	//123
§ 16	依 L_p 度量与零有最小偏差的多项式	//129
§ 17	勒让德多项式、高斯求积公式	//137
第 3 章	近代理论介绍——关于高维求积公式的某些简单定理	//140
§ 1	变换定理	//140
§ 2	乘积定理	//143
§ 3	对称求积公式的构造原则	//147
§ 4	求积公式与插值多项式之间的关系	//153
第 4 章	二次及三次的高维求积公式	//156
§ 1	对称区域上的“二次求积公式”	//156
§ 2	对称区域上的“三次求积公式”	//160
§ 3	一般区域上的“二次求积公式”	//162
§ 4	中心对称区域上的“三次求积公式”	//167
第 5 章	构造数值积分公式的算子方法	//170
§ 1	几个常用的符号算子及其关系式	//171
§ 2	Euler 求和公式的导出	//174
§ 3	利用符号算子表出的数值积分公式	//176
§ 4	Willis 展开方法	//179
§ 5	Люстерник-Диткин 方法	//181
第 6 章	高维积分的“降维法”与二维求积公式的一种构造法	//186
§ 1	高维近似积分的“降维法”基本公式	//187
§ 2	“降维法”中的几个展开公式及余项估计	//189

- § 3 展开公式的应用及举例 //196
- § 4 适用于特种类型区域的降维展开公式 //199
- § 5 利用直角三点组构造二维求积公式 //204
- § 6 代数精确度的提高法(带微商的求积公式) //208

第 7 章 高维矩形区域上的数值积分与误差估计 //213

- § 1 问题的叙述与误差上界 C_r 的表示式 //213
- § 2 关于 $W^{(r)}(M;U)$ 类函数的求积程序及敛速估计 //217
- § 3 关于 $C^{(r)}(U)$ 类函数的求积程序的敛速估计 //224
- § 4 非矩形区域上的求积程序的敛速估计 //225
- § 5 注记及问题 //226

第 8 章 多元周期函数的数值积分与误差估计 //229

- § 1 化多重积分为单积分的方法 //230
- § 2 一类近似积分公式及余项估计 //233
- § 3 按均匀网点作成的求积公式及余项估计 //238
- § 4 积分维数的降低与被积函数的周期化 //243
- § 5 用序列点构成的单和去逼近重积分 //246
- § 6 Haselgrove 方法 //250

第 9 章 高维数值积分公式的误差界限决定

法 //260

§ 1 估计误差界限的一种方式 //260

§ 2 关于 W 函数类的求积公式的误差上限决定法 //263

§ 3 关于可微函数类的多重求积公式的误差上限表示式 //275

附表 I 对于区间 $[-1, 1]$ 的切比雪夫公式的量 $\mathcal{E}W^{(r)}(1; -1, +1) =$

$$\sup_{|f^{(r)}(x)| \leq 1} \left| \int_{-1}^1 f dx - L(f) \right| \quad // 282$$

附表 II 对于区间 $[-1, 1]$ 的高斯公式的量 $\mathcal{E}W^{(r)}(1; -1, +1) =$

$$\sup_{|f^{(r)}(x)| \leq 1} \left| \int_{-1}^1 f dx - L(f) \right| \quad // 283$$

编辑手记 //284



引 言

第 1 章

中国科技大学前数学系主任常庚哲教授曾撰文说：

第 11 届中学生数学冬令营于 1996 年元月在南开大学举行. 竞赛试题中的第五题是这样的：

设 $n \in \mathbf{N}$, $x_0 = 0, x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$, 且 $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. 求证

$$1 \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{1+x_0+x_1+\dots+x_{i-1}} \sqrt{x_i+\dots+x_n}} < \frac{\pi}{2}$$

上述左边那个不等式是极易证明的, 绝大多数的参赛者都做对了. 但是, 右边的那个不等式证出来的只有 18 人, 在近 120 名选手中, 这是一个很小的比例. 在本节中, 常教授讲了这个题目的命题思路.

先讲一讲右边那个不等式的证法. 在证明中, 关键是要利用一个熟知的不等式：

当 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 时

$$0 < \sin \theta < \theta$$

面积原理

作变换

$$\sin \theta_i = x_0 + x_1 + \cdots + x_i \quad (0 \leq \theta_i \leq \frac{\pi}{2})$$

$i=1, 2, \cdots, n$, 易见

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n = \frac{\pi}{2}$$

于是

$$\begin{aligned} x_i &= \sin \theta_i - \sin \theta_{i-1} = 2 \sin \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{2} \cos \frac{\theta_i + \theta_{i-1}}{2} \\ (1 + x_0 + \cdots + x_{i-1})(x_i + \cdots + x_n) &= \\ 1 - (x_0 + x_1 + \cdots + x_{i-1})^2 &= \\ 1 - \sin^2 \theta_{i-1} &= \cos^2 \theta_{i-1} \end{aligned}$$

因此原不等式最中央的那个表达式变成

$$\sum_{i=1}^n \frac{2 \sin \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{2} \cos \frac{\theta_i + \theta_{i-1}}{2}}{\cos \theta_{i-1}} \quad (1)$$

由于 $\cos \theta$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上是单调下降的, 故

$$\cos \frac{\theta_i + \theta_{i-1}}{2} < \cos \theta_{i-1}$$

再利用

$$2 \sin \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{2} < 2 \left(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{2} \right) = \theta_i - \theta_{i-1}$$

可见表达式(1)应严格地小于

$$\sum_{i=1}^n (\theta_i - \theta_{i-1}) = \theta_n - \theta_0 = \frac{\pi}{2}$$

这就证明了右边的不等式.

作为本题的命题人, 常教授还介绍了这个题目是如何构想出来的. 在高等数学中, 有一种“用积分来估计和式”或称“面积原理”的技巧. 华罗庚教授生前十分

重视这种技巧,在他的专著《数论导引》以及教程《高等数学引论》(第一卷第一分册)中,有专门的章节加以介绍.面积原理的大意如下:设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是非负的,严格上升的函数,又设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是 n 个小区间的长度,这些小区间组成了 $[a, b]$ 上的一个分割,在每一个小区间上对应着一个矩形,矩形由图1的斜线标出,这些矩形的面积之和是

$$\sum_{i=1}^n x_i f(a + x_0 + x_1 + \dots + x_{i-1})$$

这里规定 $x_0 = 0$,显然 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = b - a$.由面积关系可见

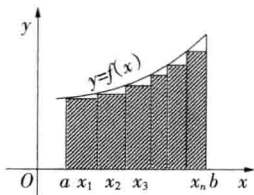


图1

$$\sum_{i=1}^n x_i f(a + x_0 + x_1 + \dots + x_{i-1}) < S_a^b(f) \quad (2)$$

这里 $S_a^b(f)$ 表示由 x 轴、两平行直线 $x=a$ 及 $x=b$ 以及曲线 $y=f(x)$ 所包围的面积,有积分知识的人都会知道, $S_a^b(f)$ 正是定积分 $\int_a^b f(x)dx$.

类似地考虑可以得出

$$S_a^b(f) < \sum_{i=1}^n x_i f(a + x_1 + \dots + x_i) \quad (3)$$

由此可见,对于任何适合上述条件的函数 f ,由式(2)与(3)便能构造出两个不等式,当然一个重要的前提是 $S_a^b(f)$ 能算得出来.

例1 设 $x_0 = 0, n \in \mathbf{N}, x_1, x_2, \dots, x_n$ 是任意的正

数,适合 $\sum_{i=1}^n x_i = 1$.求证:对任何 $m \in \mathbf{N}$ 有不等式

面积原理

$$\sum_{i=1}^n x_i (x_0 + x_1 + \cdots + x_{i-1})^m < \frac{1}{m+1} < \sum_{i=1}^n x_i (x_1 + \cdots + x_i)^m$$

证 这时函数 $f(x) = x^m$, 它在 $[0, 1]$ 上是严格上升的, 积分学的知识告诉我们

$$\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$$

令

$$y_i = x_0 + x_1 + \cdots + x_i \quad (i=0, 1, 2, \cdots, n)$$

故

$$0 = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = 1$$

这时

$$x_i (x_0 + x_1 + \cdots + x_{i-1})^m =$$

$$(y_i - y_{i-1}) y_{i-1}^m <$$

$$(y_i - y_{i-1}) \cdot \frac{y_{i-1}^m + y_{i-1}^{m-1} y_i + \cdots + y_{i-1} y_i^{m-1} + y_i^m}{m+1} =$$

$$\frac{y_i^{m+1} - y_{i-1}^{m+1}}{m+1}$$

求和可得

$$\sum_{i=1}^n x_i (x_0 + x_1 + \cdots + x_{i-1})^m <$$

$$\frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^n (y_i^{m+1} - y_{i-1}^{m+1}) =$$

$$\frac{1}{m+1} (y_n^{m+1} - y_0^{m+1}) =$$

$$\frac{1}{m+1}$$

右边的不等式可以同法证明.

熟悉定积分的人,可以构造出众多的这一类不等式,但是,为了能够让中学生在他们的知识和技巧范围内证出来,那就不是任选一个函数 f 都合适.在冬令

营那个试题中,函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,它在靠近 1 的地

方变为无穷大.积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 是非正常积分.不过,

当作变量代换 $x = \sin \theta$ 之后,积分便成为

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\theta$$

这时的被积函数是常数 1,它是最简单的函数了.这种考虑正提示了在离散的情形也用正弦函数来作变换.这就保证了至少有一种初等的方法可以奏效.

最后,提出三点注记:

1. 由于是对任何的自然数 n 以及任意的分割 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 都要求不等式成立,所以常数 $S_a^b(f)$ 在式(2)中不可以用更小的数来代替,在式(3)中不可以用更大的数来代替.也就是说,这个常数是最佳的.

2. 面积原理对于严格下降的函数也能适用,这时不等式(2)与(3)都应反向.建议读者对函数 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [0, 1]$ 作出两个不等式,并加以证明.

3. 数学上的技巧是不厌反复使用的,但是,戏法若泄漏了机关,那也就是只能玩一次.所以说,用同一种技巧来形成类似的试题,那意义就不大了.

当年中科大数学系的讲授体系有三条龙,分别是“华龙”(华罗庚)、“吴龙”(吴文俊)、“关龙”(关肇直).其中“华龙”积分是这样讲的:

§ 1 求面积

设 $c < a < b$, 求在 $x=a, x=b$ 之间, x 轴与曲线 (C)

$$y=f(x)$$

之间的面积. 为方便起见, 我们暂时假定曲线 (C) 在 x 轴的上方 (图 2).

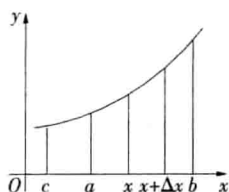


图 2

令 $F(x)$ 表示 c, x 之间及 x 轴与曲线 (C) 之间的面积, 令

$$M = \max_{x \leq t \leq x+\Delta x} f(t), m = \min_{x \leq t \leq x+\Delta x} f(t) \quad (1)$$

考虑面积大小显然有

$$m\Delta x \leq F(x+\Delta x) - F(x) \leq M\Delta x \quad (2)$$

也就是

$$m \leq \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \leq M \quad (3)$$

假定 $f(x)$ 是连续的, 由式 (3), 当 $\Delta x \rightarrow 0$, 可知 $F'(x)$ 存在, 且

$$F'(x) = f(x)$$

也就是

$$F(x) = \int f(x) dx + C$$

这个 C 是待定常数.

在 $x=a, x=b$ 之间的面积等于

$$F(b) - F(a)$$

我们就记之为

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b$$

这称为函数 $f(x)$ 的定积分, a, b 分别称为定积分的下限与上限.

例如, $f(x) = \lambda x^2$, 则在 $(0, x)$ 之间, 抛物线与 x 轴之间的面积等于

$$\int_0^x \lambda t^2 dt = \frac{\lambda x^3}{3}$$

如果曲线在 x 轴的下方, 这种方法所求出的数值是面积的值; 如果有一部分在 x 轴的上方, 一部分在 x 轴的下方, 我们所得出的积分值就是 x 轴上部的面积与 x 轴下部的面积的差.

例如, $f(x) = x^3$, 在 $(-a, a)$ 之间的定积分等于

$$\int_{-a}^a x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-a}^a = \frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{4} = 0$$

这并不是说面积等于 0. 因为从 0 到 a , 积分等于

$$\int_0^a x^3 dx = \frac{a^4}{4}$$

而从 $-a$ 到 0, 积分等于

$$\int_{-a}^0 x^3 dx = \frac{a^4}{4}$$

如果要求的是 x 轴与曲线 $y = x^3$ 之间及在 $-a$ 与 a 间的面积的绝对值, 应当是 $\frac{a^4}{2}$.

如果曲线是由若干个连续曲线所组成的, 我们也可以算出面积. 例如

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ x^3, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

则

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x^3 dx =$$

面积原理

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4}(2^4 - 1) =$$

$$\frac{1}{3} + \frac{15}{4} = 4\frac{1}{12}$$

例 1 求界于抛物线

$$y = ax^2 + bx + c$$

与 x 轴之间, 及距离是 h 的两个纵坐标之间的面积等于

$$\frac{h}{6}(y_1 + y_2 + 4y_0)$$

此处 y_1, y_2 是两端的纵坐标, y_0 是中点的纵坐标.

解 令左端的横坐标是 x_1 , 面积等于

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_1+h} (ax^2 + bx + c) dx = \\ & \frac{a}{3}((x_1+h)^3 - x_1^3) + \frac{1}{2}b((x_1+h)^2 - x_1^2) + ch = \\ & \frac{1}{3}ah(3x_1^2 + 3x_1h + h^2) + \frac{1}{2}bh(2x_1 + h) + ch = \\ & \frac{h}{6} \left[a(x_1+h)^2 + b(x_1+h) + c + ax_1^2 + bx_1 + c + \right. \\ & \left. 4a\left(x_1 + \frac{h}{2}\right)^2 + 4b\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + 4c \right] \end{aligned}$$

证毕.

例 2 椭圆的方程是

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

求椭圆面积(图 3).

解 椭圆的总面积等于椭圆在第一象限内面积的 4 倍, 即

$$S = 4 \int_0^a y dx = 4b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx =$$

$$\begin{aligned}
 & 4ab \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = \\
 & 2ab(t \sqrt{1-t^2} + \sin^{-1} t) \Big|_0^1 = \\
 & \pi ab
 \end{aligned}$$

例 3 计算在两条曲线

$$y = x^2, x = y^2$$

间的面积(图 4).

解 这两个方程的交点是 $(0,0)$, $(1,1)$, 因为在区间 $(0,1)$ 上

$$\sqrt{x} \geq x^2$$

由此所求的面积等于

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx - \int_0^1 x^2 dx = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

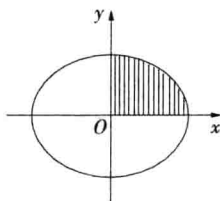


图 3

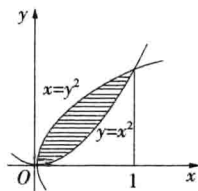


图 4

§ 2 定积分的概念

现在我们可以把定积分的概念抽象化. 如果

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

我们就定义

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

面积原理

为 $f(x)$ 由 a 到 b 的定积分.

我们假定 $a < b$, 并且假定在 a, b 中添上一批分点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

则由拉格朗日 (Lagrange) 公式得出

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{v=1}^n (F(x_v) - F(x_{v-1})) = \\ &= \sum_{v=1}^n (x_v - x_{v-1}) f(x'_v) \end{aligned}$$

这里 $x_v > x'_v > x_{v-1}$.

我们现在从任意的 $f(x)$ 出发, 考虑更一般的和

$$\sigma_n = \sum_{v=1}^n (x_v - x_{v-1}) f(\xi_v) \quad (1)$$

这里 ξ_v 是区间 (x_{v-1}, x_v) 中的任意一点. 我们的问题是当添入任意分点 x_v , 使

$$\lambda = \max_{v=1, 2, \dots, n} (x_v - x_{v-1}) \rightarrow 0$$

时, 对任意的 $\xi_v (x_{v-1} \leq \xi_v \leq x_v)$, σ_n 是否皆有相同的极限存在. 如果存在, 我们称之为 $f(x)$ 由 a 到 b 的定积分, 或称为黎曼 (Riemann) 定积分, 而 $f(x)$ 称为 Riemann 可积函数.

如果 $f(x)$ 不是有界的, 在式 (1) 中至少有一次没有意义. 因此现在我们所讨论的函数常假定它们适合于

$$m < f(x) < M$$

即存在有限的上、下界.

令

$$M_v = \overline{Bd} \int_{x_{v-1}}^{x_v} f(x), m_v = \underline{Bd} \int_{x_{v-1}}^{x_v} f(x)$$

分别表示 $f(x)$ 在区间 $[x_{v-1}, x_v]$ 中的上确界与下确界, 并以