浙大优学

全解中考数学压轴题

QUANJIE ZHONGKAO SHUXUE YAZHOUTI

李静文 编著

解:(1)当 $m=3$ 时,$y=-x^2+6x$,

令 $y=0$,得 $-x^2+6x=0$,

$\therefore x_1=0, x_2=6$.

$\therefore A(6,0)$.

$\because P(1,m)$,

$\therefore x_B=x_P=1$.

又$\because$抛物线的对称轴为直线 $x=3$,点 B,C 关于对称轴对称,

$\therefore BC=4$.

(2)如图 6-16,过点 C 作 $CH\perp x$ 轴于点 H,

由已知得$\angle ACP=\angle BCH=90°$,

$\therefore \angle ACH=\angle PCB$.

又$\because \angle AHC=\angle PBC=90°$,

$\therefore \triangle ACH \backsim \triangle PCB$.

$\therefore \dfrac{BC}{CH}=\dfrac{BP}{AH}$.

$\because x_B=x_P=1, P(1,m)$,

$\therefore B(1,2m-1)$.

$\therefore BP=m-1$.

又$\because$点 B,C 关于对称轴 $x=m$ 对称,

$\therefore BC=2(m-1), C(2m-1,2m-1)$,则 $H(2m-1,0)$.

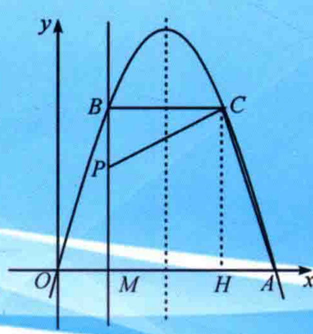


图 6-16

怎么想、想什么

一定要注意读题。本题中哪个点在哪个函数图像上,一定要看仔细

第一步　作垂线 双直角

“倾斜”直角为$\angle PCA$

第二步　证相似

第三步　成比例

利用与坐标轴垂直的边成比例

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

全解中考数学压轴题

李静文　编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

全解中考数学压轴题. 李静文编著. 一杭州:浙江大学出版社,2015.1(2015.3 重印)
ISBN 978-7-308-14341-7

Ⅰ.①全… Ⅱ.①李… Ⅲ.①中学数学课—初中—题解—升学参考资料 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 011272 号

全解中考数学压轴题

李静文 编著

责任编辑 王同裕
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)
(网址: http://www.zjupress.com)
排 版 杭州星云光电图文制作有限公司
印 刷 浙江省良渚印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 9.25
字 数 249 千
版 印 次 2015 年 1 月第 1 版 2015 年 3 月第 2 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-14341-7
定 价 28.00 元

浙江大学出版社发行部联系方式:0571—88925591;http://zjdxcbs.tmall.com

前　言

基础题决定能否上高中，压轴题决定上什么高中。

多数同学在解压轴题时常常不知如何下手，有时感觉答案难以读懂，有时感觉解析犹如天书。许多有志冲击重点高中的同学花费了大量精力在压轴题上，但始终没有找到解题的规律，使压轴题成为了学之难成、弃之可惜的鸡肋。如果你也深有同感，就让本书来帮你寻找解决难题的规律。

本书的压轴题既包括解答题的最后两题，又包括选择题、填空题的最后一题。各种类型的题目看似相对独立，实则联系紧密。比如在函数方面，二次函数出现在解答题最后一题的概率要远大于反比例函数；而反比例函数多在选择题、填空题的压轴题中出现，但二次函数的解题过程如设未知数等能力可在反比例函数中加以锻炼。在做题过程中，我们同样发现二次函数的辅助线作法，也就是老师口中的“K”型可以用旋转的思想来解释。这样，一些常见的压轴题便从一座座城堡变为多米诺骨牌，同学们可以在学习本书时举一反三、触类旁通，为你们的学习减轻压力，节约时间。

本书不仅教给大家具体的解题方法，同时也希望同学们能培养解题习惯。很多同学做题效率低，多是因为图、题混乱，本书在折叠章节中将具体指导大家在图形上该怎样标、标什么。希望通过本书能使同学们在遇到不会的题时知道心如何想，笔如何下。书中如有不当之处，欢迎广大师生批评指正，不胜感激。

目　录

第一章　反比例 …… (1)
基本图形与解题步骤 …… (1)
例 1　2009 山东泰安第 12 题(3 分) …… (4)
例 2　2012 山东德州第 8 题(3 分) …… (5)
例 3　2013 四川内江第 11 题(3 分) …… (6)
例 4　2009 福建宁德第 18 题(3 分) …… (7)
例 5　2014 浙江湖州第 15 题(4 分) …… (7)
例 6　2011 浙江宁波第 18 题(3 分) …… (8)
例 7　2014 浙江衢州、丽水第 16 题(4 分) …… (9)
例 8　2013 浙江桐乡市文理科基础调研第 9 题(3 分) …… (10)
例 9　2013 浙江宁波第 18 题(3 分) …… (11)
例 10　2011 浙江丽水第 16 题(4 分) …… (12)
第二章　旋转类型一 …… (14)
基本图形与解题步骤 …… (14)
例 1　2012 浙江义乌第 23 题(10 分) …… (15)
例 2　2012 辽宁铁岭第 25 题(12 分) …… (16)
例 3　2012 辽宁阜新第 21 题(12 分) …… (18)
例 4　2013 四川自贡第 23 题(12 分) …… (19)
例 5　2013 河南第 22 题(10 分) …… (20)
第三章　旋转类型二 …… (23)
基本图形与解题步骤 …… (23)
例 1　2013 浙江衢州第 22 题(10 分) …… (23)
例 2　2012 辽宁丹东第 25 题(12 分) …… (24)
例 3　2014 江苏南通第 26 题(10 分) …… (26)
同类题参考　2013 湖南湘潭第 24 题(8 分) …… (27)
例 4　2014 辽宁沈阳第 24 题(12 分) …… (27)
第四章　旋转类型三 …… (29)
基本图形 …… (29)
例 1　2012 四川成都第 20 题(10 分) …… (29)
例 2　2012 湖北天门第 23 题(10 分) …… (30)
例 3　2013 浙江杭州第 23 题(10 分) …… (32)
例 4　2013 内蒙古呼和浩特第 23 题(9 分) …… (34)
同类题参考　2012 贵州第 10 题(3 分) …… (35)

第五章　旋转的变形与构造 …… (36)
例 1　2014 浙江绍兴第 23 题(12 分) …… (36)
同类题参考　2013 四川达州第 24 题(9 分) …… (37)
同类题参考　2012 宁夏第 23 题(8 分) …… (38)
例 2　2013 北京第 24 题(8 分) …… (38)
例 3　2014 山西第 10 题(3 分) …… (39)
例 4　2014 浙江台州第 9 题(3 分) …… (40)
例 5　2014 浙江衢州、丽水第 10 题(3 分) …… (40)
例 6　2011 年嵊州市重点高中提前招生第 13 题(12 分) …… (41)
例 7　2011 广东深圳第 12 题(3 分) …… (42)
例 8　2014 河南第 22 题(10 分) …… (43)
第六章　动点预备 …… (46)
预备一:动点问题中辅助线的作法——双直角与三直角 …… (46)
预备二:k 与特殊角 …… (48)
预备三:k 与直线的位置关系 …… (49)
例 1　2013 浙江台州第 23 题(12 分) …… (50)
例 2　2011 浙江绍兴第 24 题(12 分) …… (51)
例 3　2012 浙江温州第 24 题(14 分) …… (53)
例 4　2014 浙江绍兴第 24 题(14 分) …… (55)
例 5　2012 浙江义乌第 24 题(12 分) …… (57)
第七章　动点＋等腰三角形 …… (59)
基本图形 …… (59)
例 1　2012 浙江杭州第 9 题(3 分) …… (61)
例 2　2012 江苏扬州第 27 题(12 分) …… (62)
例 3　2011 浙江台州第 24 题(14 分) …… (64)
例 4　2011 浙江衢州第 24 题(12 分) …… (66)
例 5　2014 浙江金华、义乌第 24 题(12 分) …… (68)
第八章　动点＋相似三角形 …… (71)
基本图形 …… (71)
例 1　2013 上海第 24 题(12 分) …… (72)
例 2　2014 青海西宁第 28 题(12 分) …… (73)
例 3　2012 湖北黄冈第 25 题(14 分) …… (75)
例 4　2011 浙江宁波第 26 题(12 分) …… (77)
例 5　2012 浙江湖州第 24 题(12 分) …… (79)
例 6　2014 浙江衢州、丽水第 24 题(12 分) …… (81)
第九章　动点＋直角三角形 …… (83)
例 1　2011 浙江温州第 24 题(14 分) …… (83)
例 2　2013 浙江衢州第 24 题(12 分) …… (84)
例 3　2013 浙江湖州第 24 题(12 分) …… (87)

第十章　折叠类型一 …… (91)
基本图形与解题步骤 …… (91)
例 1　2012 辽宁大连第 16 题(3 分) …… (93)
例 2　2012 福建南平第 10 题(4 分) …… (93)
例 3　2013 江苏苏州第 18 题(3 分) …… (94)
例 4　2013 江苏扬州第 27 题(12 分) …… (95)
例 5　2012 贵州遵义第 10 题(3 分) …… (96)
例 6　2012 浙江衢州第 23 题(12 分) …… (97)
第十一章　折叠类型二 …… (99)
例 1　2012 广西南宁第 25 题(10 分) …… (99)
例 2　2012 福建龙岩第 24 题(13 分) …… (100)
例 3　2014 浙江杭州第 10 题(3 分) …… (101)
例 4　2014 上海第 18 题(4 分) …… (102)
例 5　2012 广东第 21 题(9 分) …… (103)
第十二章　动点＋平行四边形 …… (105)
基本图形 …… (105)
例 1　2013 云南昆明第 23 题(9 分) …… (107)
例 2　2013 湖南湘潭第 26 题(10 分) …… (109)
例 3　2013 浙江嘉兴中考第 24 题(14 分) …… (111)
例 4　2013 浙江义乌第 24 题(12 分) …… (112)
例 5　2014 浙江温州第 24 题(14 分) …… (115)
第十三章　动点＋特殊平行四边形 …… (118)
例 1　2014 浙江湖州中考第 23 题(10 分) …… (118)
例 2　2012 山东烟台第 26 题(12 分) …… (119)
例 3　2011 江西第 24 题(10 分) …… (121)
例 4　2012 浙江嘉兴第 24 题(14 分) …… (123)
第十四章　动点＋圆 …… (126)
例 1　2014 湖南长沙第 26 题(10 分) …… (126)
例 2　2014 浙江湖州第 24 题(12 分) …… (128)
例 3　2013 浙江宁波第 26 题(14 分) …… (130)
第十五章　三角形中的线——几何题辅助线的作法 …… (133)
例 1　2011 内蒙古呼和浩特第 16 题(4 分) …… (133)
例 2　2011 湖北黄冈第 8 题(3 分) …… (134)
例 3　2011 浙江杭州第 16 题(4 分) …… (134)
例 4　2013 浙江桐乡模拟第 9 题(4 分) …… (135)
例 5　2013 新疆乌鲁木齐第 15 题(4 分) …… (136)
例 6　2014 黑龙江哈尔滨第 20 题(3 分) …… (137)
例 7　2014 安徽第 14 题(5 分) …… (137)

第一章 反比例

出题位置:选择、填空压轴题.

说明:数形结合的大题一般要让位给二次函数,所以反比例的难题一般为选择、填空压轴题.考点多由“k”的几何意义——面积而来.常见解法是作辅助线,利用面积关系进行推导,优点是计算简便,但考试时经常想不出.这里介绍一种更为实用的做法.首先请仔细看一看下面几个基本图形,这些基本图形不仅是本章的基础,同时也是数形结合大题的基础.

基本图形一:线段长度

(1)如图①,直线 l_1 上有 $A(4,2)$,$B(1,2)$,$C(-3,2)$,$D(-5,2)$四点,分别求线段 AB,BC,CD 的长度.

(2)如图②,直线 l_2 上有 $E(a,3)$,$F(b,3)$两点,求线段 EF 的长度.

(3)如图③,直线 l_3 上有 $M(3,m)$,$N(3,n)$两点,求线段 MN 的长度.

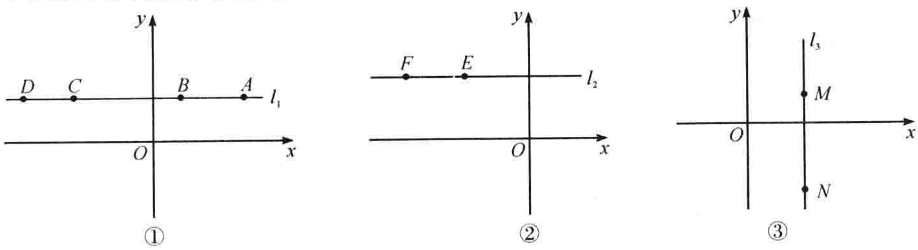


图 1-1

分析:大多数同学对第一问都可以一眼看出结果,但我请大家将这个过程放慢,思考下这些结果是如何通过坐标运算得到的,这样就能够分析出第二问、第三问的做法,不用再加什么绝对值了.

解:(1)$AB=4-1=3$;$BC=1-(-3)=4$;$CD=-3-(-5)=2$.

(2)$EF=a-b$.

(3)$MN=m-n$.

结论:①与坐标轴垂直的线段的长度:坐标相减.(横向线段→横坐标相减;纵向线段→纵坐标相减)

②(较大坐标)-(较小坐标).(“大数”-“小数”得到的值一定为正,与正负无关)

思考:

(1)如图①,$A(2,3)$,$B(5,7)$,求线段 AB 的长度.

(2)如图②,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,求线段 MN 的长度.

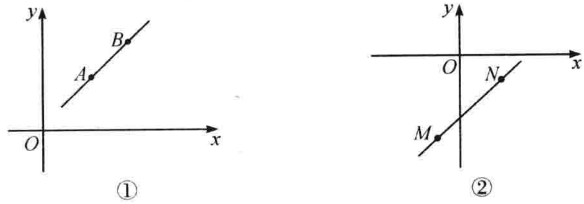


图 1-2

解:(1)如图1-3,过点B作x轴的垂线,过点A作y轴的垂线,相交于点C,

$AC=5-2=3$;$BC=7-3=4$,

$\therefore AB=\sqrt{4^2+3^2}=5$.

(2)$MN=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

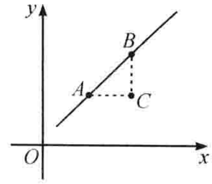


图1-3

结论:我们由(2)可以得到两点间距离公式.(此公式不必强行记忆,其本质为勾股定理)

基本图形二:中点

(1)如图①,直线l_1上有$A(4,2)$,$B(1,2)$,$C(-3,2)$,$D(-5,2)$四点,分别求出线段AB,BC,CD的中点坐标.

(2)如图②,直线l_2上有$E(a,3)$,$F(b,3)$两点,求出线段EF的中点坐标.

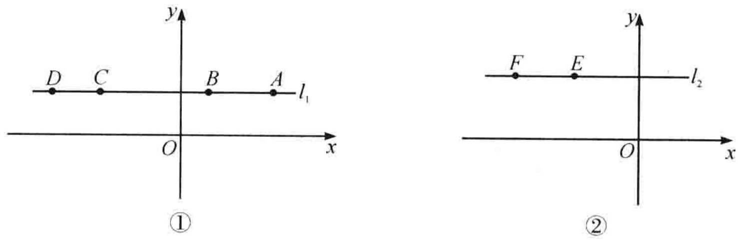


图1-4

解:(1)AB中点的横坐标为$\frac{4+1}{2}=2.5$,则AB中点的坐标为$(2.5,2)$;

BC中点的横坐标为$\frac{1+(-3)}{2}=-1$,则BC中点的坐标为$(-1,2)$;

CD中点的横坐标为$\frac{(-3)+(-5)}{2}=-4$,则CD中点的坐标为$(-4,2)$.

(2)EF中点的横坐标为$\frac{a+b}{2}$,则EF中点的坐标为$\left(\frac{a+b}{2},3\right)$.

结论:与坐标轴垂直的线段中点——坐标相加再除以2.(横向线段→横坐标相加除以2;纵向线段→纵坐标相加除以2,不论正负)

思考:

如图1-5,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,求线段MN的中点P的坐标.

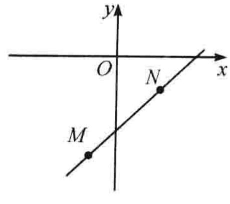


图1-5

解:$x_P=\frac{x_1+x_2}{2}$;$y_P=\frac{y_1+y_2}{2}$,则$P\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

基本图形三

如图 1-6，在直角坐标系中，点 $A(a,0)$，$AB\perp x$ 轴，交反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象于点 B，$BC\perp y$ 轴交直线 $y=-x+2$ 于点 C，求点 B，点 C 的坐标．(用含 a 的代数式表示)

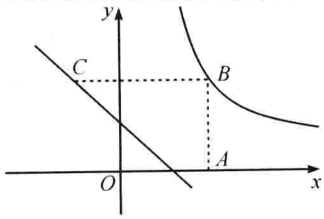


图 1-6

解：$\because AB\perp x$ 轴，

$\therefore x_A=x_B=a$，代入反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 得 $y_B=\frac{k}{a}$．

$\therefore B\left(a,\frac{k}{a}\right)$．

$\because BC\perp y$ 轴，

$\therefore y_B=y_C=\frac{k}{a}$，代入直线 $y=-x+2$ 解得 $x_C=2-\frac{k}{a}$．

$\therefore C\left(2-\frac{k}{a},\frac{k}{a}\right)$．

结论：在与 x 轴垂直的直线上，点的横坐标相同，在与 y 轴垂直的直线上，点的纵坐标相同．

解题步骤：

第一步→设点．用未知数表示点的坐标——从坐标轴上较小的点开始．

第二步→标其他点．如“基本图形三”，将图上其他点都用假设的未知数表示，并标在图上．

第三步→列方程．根据已知条件，一般是利用面积或将点的坐标代入解析式．

注：

设较小点：

如图 1-7，已知 A,B,C 三点在 x 轴上，且 $OA=AB=BC$．设点 $A(a,0)$，则 $B(2a,0)$，$C(3a,0)$；若设点 $C(b,0)$，则 $A\left(\frac{b}{3},0\right)$，$B\left(\frac{2b}{3},0\right)$，前者在计算上更为容易．

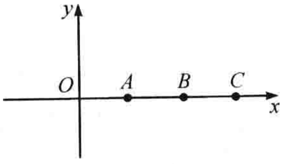


图 1-7

例 1 2009 山东泰安第 12 题(3 分)

如图 1-8,双曲线 $y=\frac{k}{x}(k>0)$经过矩形 $OABC$ 的边 BC 的中点 E,交 AB 于点 D.若梯形 $ODBC$ 的面积为 3,则双曲线的解析式为 ( )

A. $y=\frac{1}{x}$ B. $y=\frac{2}{x}$

C. $y=\frac{3}{x}$ D. $y=\frac{6}{x}$

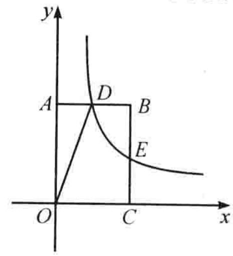


图 1-8

答案:B

解:设点 $C(a,0)$.

$\because BC\perp x$ 轴,

$\therefore x_C=x_E=x_B=a$.

$\because E$ 点在双曲线上,

$\therefore$ 代入得 $y_E=\frac{k}{a}$,则 $E\left(a,\frac{k}{a}\right)$.

$\because E$ 为 BC 中点,

$\therefore B\left(a,\frac{2k}{a}\right)$.

$\because AB\perp y$ 轴,

$\therefore y_D=y_B$,则 $y_D=\frac{2k}{a}$.

$\because$ 点 D 在双曲线上,

$\therefore$ 代入得 $x_D=\frac{a}{2}$,则 $D\left(\frac{a}{2},\frac{2k}{a}\right)$.

$\because$ 梯形 $ODBC$ 的面积为 3,

$\therefore \frac{1}{2}\cdot(x_B-x_D+x_C)\cdot y_B=3$.

代入得 $\left(a-\frac{a}{2}+a\right)\cdot\frac{2k}{a}\cdot\frac{1}{2}=3$,

解得 $k=2$.

怎么想、想什么

第一步→设点

从点 C 或点 E 开始为宜

第二步→标其他点

注意:在垂直于 x 轴的直线上,点的横坐标相同

注意:在垂直于 y 轴的直线上,点的纵坐标相同

第三步→列方程,条件为梯形面积

长度→坐标相减

多余的 a 被抵消

注意

①标点的顺序是$(C)\to E\to B\to D\to(A)$.

②在垂直于 x 轴的直线上,点的横坐标相同;在垂直于 y 轴的直线上,点的纵坐标相同.

③没用的未知数必然会被抵消.

此题若用面积法求解,推导过程如下:

连结 OE,OB.

$\because$ 点 D,E 在反比例函数的图象上,

$\therefore S_{\triangle AOD}=S_{\triangle COE}=\frac{k}{2}$.

$\because E$ 为 BC 的中点，

$\therefore S_{\triangle OCE}=\frac{1}{2}S_{\triangle OCB}$，则 $S_{\triangle OCE}=S_{\triangle AOD}=\frac{1}{4}S_{AOCB}$.

$\therefore S_{\triangle AOD}=\frac{1}{3}S_{DBCO}=\frac{1}{3}\times 3=1$.

$\therefore \frac{k}{2}=1$，则 $k=2$.

此种方法易做，但考试时未必能容易想到，请大家务必将第一种方法学会，为解难题做好准备.

引申

当标出图中的所有点之后，不论已知条件是“梯形 $ODBC$ 的面积”还是“$\triangle ADO$ 的面积”或其他面积都能解出 k 的值.

如将此题改为：

如图 1-8，双曲线 $y=\frac{k}{x}(k>0)$ 经过矩形 $OABC$ 的边 BC 的中点 E，交 AB 于点 D. 连结 DE，已知 $\triangle DBE$ 的面积为 3，则反比例函数的解析式为________.

解：前两步没有差别，点的坐标还是相同的，只有第三步列方程有区别.

$(x_B-x_D)\cdot(y_B-y_E)\cdot\frac{1}{2}=3$，

代入解得 $k=12$，即 $y=\frac{12}{x}$.

例 2 2012 山东德州第 8 题(3 分)

如图 1-9，两个反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 和 $y=-\frac{2}{x}$ 的图象分别是 l_1 和 l_2. 设点 P 在 l_1 上，$PC\perp x$ 轴，垂足为 C，交 l_2 于点 A；$PD\perp y$ 轴，垂足为 D，交 l_2 于点 B，则三角形 PAB 的面积为 ( )

A. 3　　B. 4

C. $\frac{9}{2}$　　D. 5

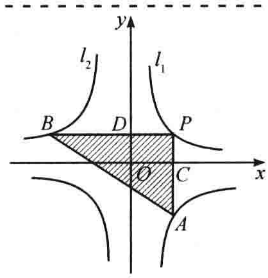


图 1-9

答案：C.

解：点 P 在 $y=\frac{1}{x}$ 上，则设 $P\left(a,\frac{1}{a}\right)$.

$\because PA\perp x$ 轴，

$\therefore x_A=x_P=a$.

$\because$ 点 A 在 $y=-\frac{2}{x}$ 上，

$\therefore$ 代入得点 A 的坐标为 $\left(a,-\frac{2}{a}\right)$.

$\because PB\perp y$ 轴，

$\therefore y_B=y_P=\frac{1}{a}$.

怎么想、想什么

第一步→设点

从 C 点或 P 点开始都可以

第二步→标其他点

∵点 B 在 $y=-\frac{2}{x}$ 上，则代入得 $x_B=-2a$.

∴点 B 的坐标是 $\left(-2a,\frac{1}{a}\right)$.

标点的顺序是(C)→P→A→B

$S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\cdot BP\cdot AP=\frac{1}{2}\cdot(x_P-x_B)\cdot(y_P-y_A)$,

代入得 $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}(a+2a)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a}\right)=\frac{9}{2}$.

第三步→列方程，条件为三角形面积

多余的 a 被抵消

例 3　2013 四川内江第 11 题(3 分)

如图 1-10，反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象经过矩形 $OABC$ 对角线的交点 M，分别与 AB，BC 交于点 D，E，若四边形 $ODBE$ 的面积为 9，则 k 的值为　　(　　)

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

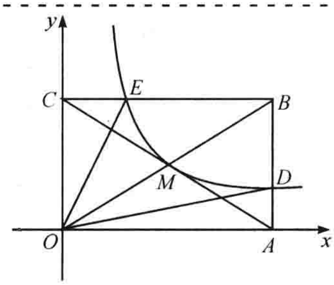


图 1-10

答案：C.

怎么想、想什么

解：设点 $A(a,0)$，则 $D\left(a,\frac{k}{a}\right)$.

第一步→设点
从点 A 或点 D 开始
第二步→标其他点

M 为矩形对角线的交点，则 $x_M=\frac{a}{2}$.

∵点 M 在函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上，

∴代入得点 M 的坐标是 $\left(\frac{a}{2},\frac{2k}{a}\right)$.

M 为 BO 的中点

∴点 B 的坐标是 $\left(a,\frac{4k}{a}\right)$.

∵$BC\perp y$ 轴，

∴$y_E=y_B=\frac{4k}{a}$，则 $E\left(\frac{a}{4},\frac{4k}{a}\right)$.

标点的顺序是(A)→M→B→E

$S_{ODBE}=S_{OABE}-S_{\triangle AOD}$

$=\frac{1}{2}\cdot(EB+OA)\cdot AB-\frac{1}{2}\cdot OA\cdot DA$

$=\frac{1}{2}\cdot(x_B-x_E+x_A)\cdot y_B-\frac{1}{2}\cdot x_A\cdot y_D$.

第三步→列方程
条件为四边形 $ODBE$ 的面积为 9

代入得 $S_{ODBE}=\frac{1}{2}\cdot\left(a-\frac{a}{4}+a\right)\cdot\frac{4k}{a}-\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{k}{a}=9$,

解得 $k=3$.

多余的 a 被抵消

例 4 2009 福建宁德第 18 题(3 分)

如图 1-11,已知点 A,B 在双曲线 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 上,$AC\perp x$ 轴于点 C,$BD\perp y$ 轴于点 D,AC 与 BD 交于点 P,P 是 AC 的中点,若△ABP 的面积为 3,则 $k=$________.

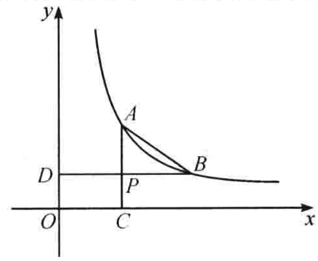


图 1-11

答案:12.

解:设 $C(a,0)$,

则点 $A\left(a,\frac{k}{a}\right)$.

∵点 P 为 AC 的中点,

$\therefore P\left(a,\frac{k}{2a}\right)$.

$\therefore y_B=\frac{k}{2a}$.

代入反比例函数得 $x_B=2a$,即 $B\left(2a,\frac{k}{2a}\right)$.

∵△ABP 的面积为 3,

$\therefore \frac{1}{2}\times AP\times BP=\frac{1}{2}\times\left(\frac{k}{a}-\frac{k}{2a}\right)\times(2a-a)=3$,

解得 $k=12$.

怎么想、想什么

第一步→设点

第二步→标其他点

中点公式

标点顺序:$C\to A\to P\to B$

第三步→列方程

条件为△ABP 的面积为 3

总结:诚然,这 4 道例题用面积推导也可做出,且计算较易.但考试时易算的方法未必易想,如果想不到,即使速度再快也没有意义.设未知数→标点坐标,只要将图中所有点标出,一般不用作辅助线或作很少的辅助线就可得出答案.这是一种比较扎实,需要勤于动笔的做法.

例 5 2014 浙江湖州第 15 题(4 分)

如图 1-12,在 Rt△OAC 中,O 为坐标原点,直角顶点 C 在 x 轴的正半轴上,反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 在第一象限的图象经过 OA 的中点 B,交 AC 于点 D,连结 OD.若△OCD∽△ACO,则直线 OA 的解析式为________.

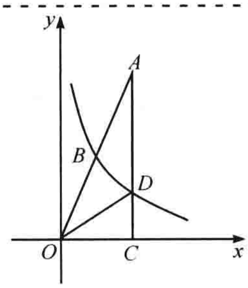


图 1-12

答案：$y=2x$.

解：点 D 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上，则设 $D\left(a,\frac{k}{a}\right)$，

$\therefore OC=a, CD=\frac{k}{a}$.

$\because \triangle OCD \backsim \triangle ACO$，则 $\frac{OC}{CD}=\frac{AC}{OC}$，

$\therefore$ 代入得 $AC=\frac{a^3}{k}$，则 $A\left(a,\frac{a^3}{k}\right)$.

由点 B 为 OA 的中点，则 $B\left(\frac{a}{2},\frac{a^3}{2k}\right)$.

代入 $y=\frac{k}{x}$ 得 $\frac{a}{2}\times\frac{a^3}{2k}=k$，

整理得 $a^4=4k^2$.

$\because a>0, k>0$，则 $a^2=2k$，$\therefore A(a,2a)$.

设直线 OA：$y=mx$，将点 A 代入得 $m=2$.

直线 OA 的解析式为 $y=2x$.

怎么想、想什么

第一步→设点

第二步→标其他点

第三步→列方程

条件为点在反比例函数的图象上，代入求得

例 6　2011 浙江宁波第 18 题（3 分）

如图 1-13，正方形 $A_1B_1P_1P_2$ 的顶点 P_1，P_2 在反比例函数 $y=\frac{2}{x}(x>0)$ 的图象上，顶点 A_1，B_1 分别在 x 轴、y 轴的正半轴上，再在其右侧作正方形 $P_2P_3A_2B_2$，顶点 P_3 在反比例函数 $y=\frac{2}{x}(x>0)$ 的图象上，顶点 A_2 在 x 轴的正半轴上，则点 P_3 的坐标为________.

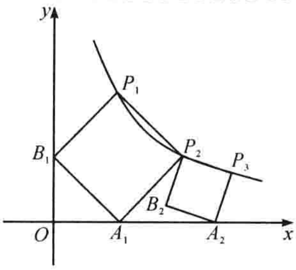


图 1-13

答案：$(\sqrt{3}+1,\sqrt{3}-1)$.

解：如图①，连结 P_1A_1，B_1P_2 交于点 M.

$\because$ 反比例函数的图象关于 $y=x$ 对称且正方形为轴对称图形，

$\therefore$ 此时正方形 $A_1B_1P_1P_2$ 关于 $y=x$ 对称.

$\therefore P_1A_1\perp x$ 轴，$P_1A_1=2B_1M$.

设 $P_1(a,2a)$，则 $P_2(2a,a)$，

代入反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 得 $a=\pm1$（负值舍去）.

$\therefore P_2(2,1)$.

如图②，

作 $P_2D\perp x$ 轴于点 D，$P_3E\perp x$ 轴于点 E，$P_3F\perp P_2D$ 于点 F，

$\because P_2P_3A_2B_2$ 为正方形，易证 $\mathrm{Rt}\triangle P_2P_3F\cong\mathrm{Rt}\triangle A_2P_3E$，

$\therefore P_3F=P_3E$.

怎么想、想什么

对称性

设点

作垂线

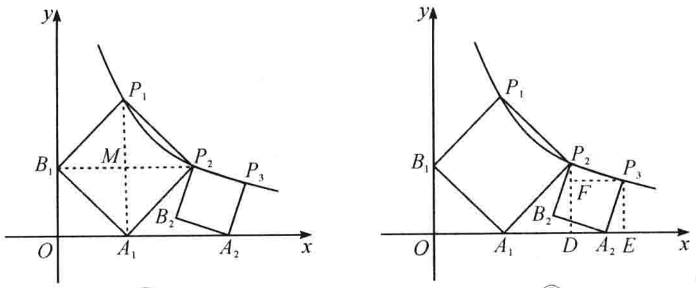
设 $P_3F=P_3E=b$，则 $P_3(b+2,b)$，

代入反比例 $y=\dfrac{2}{x}$ 解得 $b_1=-1+\sqrt{3}$；$b_2=-1-\sqrt{3}<0$（舍去）.

$\therefore P_3(\sqrt{3}+1,\sqrt{3}-1)$.

设点（此题需两次设点）

列方程，条件为点在反比例函数的图象上，代入求得



①　　②

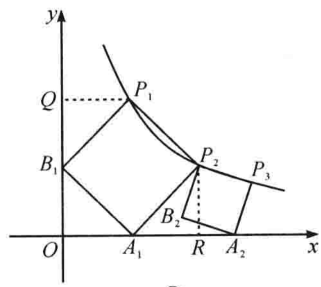
图 1-14

说明：P_2 点的坐标也可以这样解.

如图③，作 $P_1Q\perp y$ 轴于点 Q，$P_2R\perp x$ 轴于点 R.

设 $P_1\left(a,\dfrac{2}{a}\right)$，则 $QP_1=a$，$OQ=\dfrac{2}{a}$.

第一步→设点



③

$\because$ 四边形 $A_1B_1P_1P_2$ 为正方形，

易证 $\mathrm{Rt}\triangle P_1B_1Q\cong\mathrm{Rt}\triangle B_1A_1O\cong\mathrm{Rt}\triangle A_1P_2R$，

第二步→标其他点

$\therefore OB_1=P_1Q=A_1R=a$，$OA_1=B_1Q=P_2R=\dfrac{2}{a}-a$.

$\therefore$ 点 P_2 的坐标为 $\left(\dfrac{2}{a},\dfrac{2}{a}-a\right)$.

第三步→列方程

条件为点在反比例函数的图象上，代入求得

代入反比例函数的解析式得 $\dfrac{2}{a}\cdot\left(\dfrac{2}{a}-a\right)=2$，

解得 $a=-1$（舍去）或 $a=1$.

$\therefore P_2(2,1)$.

例 7　2014 浙江衢州、丽水第 16 题（4 分）

如图 1-15，点 E,F 在函数 $y=\dfrac{k}{x}(x>0)$ 的图象上，直线 EF 分别与 x 轴、y 轴交于点 A,B，且 $BE:BF=1:m$. 过点 E 作 $EP\perp y$ 轴于点 P，已知 $\triangle OEP$ 的面积为 1，则 k 的值是________，$\triangle OEF$ 的面积是________.（用含 m 的式子表示）

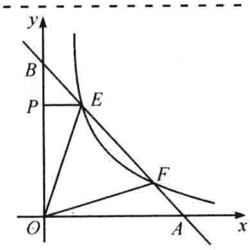


图 1-15

答案：2；$\frac{m^2-1}{m}$.

解：∵$S_{\triangle OEP}=1$，∴$k=2$.

如图 1-16，作 $FG\perp y$ 轴于点 G，交 OE 于点 H，作 $EK\perp HF$ 于点 K，设点 $E\left(a,\frac{2}{a}\right)$.

∵$BE:BF=1:m$，

∴$x_F=ma$，则 $F\left(ma,\frac{2}{ma}\right)$.

∵$E\left(a,\frac{2}{a}\right)$，$O(0,0)$，

∴直线 OE 的解析式为 $y=\frac{2}{a^2}x$.

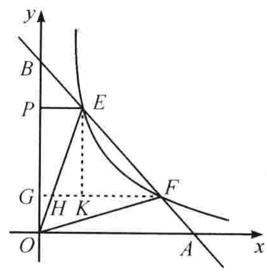


图 1-16

∵$y_H=y_G=y_F=\frac{2}{ma}$，

∴代入 $y=\frac{2}{a^2}x$ 得 $x_H=\frac{a}{m}$，则 $H\left(\frac{a}{m},\frac{2}{ma}\right)$.

$S_{\triangle EOF}=S_{\triangle EHF}+S_{\triangle OHF}=\frac{1}{2}\times HF\times EK+\frac{1}{2}\times HF\times OG=\frac{1}{2}\times HF\times(EK+OG)$，

代入得 $S_{\triangle EOF}=\frac{1}{2}\left(ma-\frac{a}{m}\right)\frac{2}{a}$，

化简得 $S_{\triangle EOF}=\frac{m^2-1}{m}$.

怎么想、想什么

第一步→设点

第二步→标其他点

第三步→列方程

多余的 a 被约掉

例 8 2013 浙江桐乡市文理科基础调研第 9 题(3 分)

如图 1-17，直线 $y=k_1x+2$ 与 x 轴、y 轴的正半轴分别相交于点 A，B，点 C，D 在线段 AB 上，以线段 CD 为一边作菱形 $CDEF$，点 F，E 分别在 x 轴、y 轴的正半轴上，若反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ 的图象经过点 D，$BD=CD$，则 $k_1\cdot k_2$ 等于 ( )

A. -1 B. $-\frac{4}{9}$ C. $-\frac{8}{9}$ D. -2

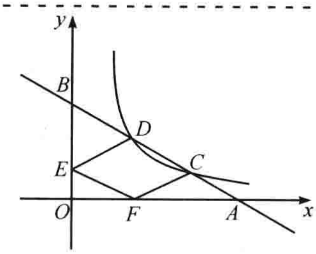


图 1-17

答案：C.

解：如图 1-18，连结 EC，

作 $DG\perp OB$ 于点 G，

∵四边形 $CDEF$ 为菱形，

∴$BD=CD=ED$，

∴$\angle BEC=90°$.

∵$\angle DEC=\angle FEC$，

∴$\angle DEB=\angle OEF$.

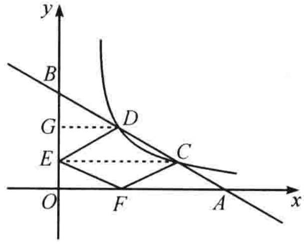


图 1-18

怎么想、想什么

直角三角形斜边上的中线长等于斜边的一半