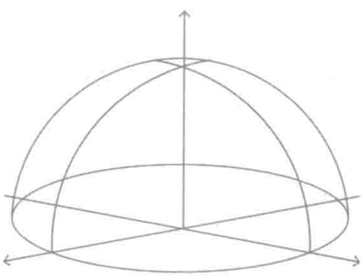
普通高等教育"十二五"规划教材

大学文科数学

刘早清　王湘君　主编



科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

大学文科数学

刘早清　王湘君　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书由一元微积分、多元微积分、微分方程及其应用、应用统计四部分组成. 一元微积分、微分方程及其应用、应用统计可适用于建筑、园林、规划、社会、社工、新闻、广电、广告、法学、哲学、外语、翻译（以下简称纯文科）等专业的大学文科数学课程教学，参考学时为 56～72 课时. 一元微积分、多元微积分、微分方程及其应用等适用于国商、英商、工管、行政等专业 80 左右课时的课程教学. 本书讲解详尽、简明实用、例题丰富、兼容性强，每章节后配有适量的习题并附有参考答案.

本书可供高等学校纯文科专业、经济管理各专业选用，也可供其他相关专业选用或供报考相关专业的硕士研究生的读者参考.

图书在版编目（CIP）数据

大学文科数学/刘早清，王湘君主编. 一北京：科学出版社，2015.7

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-03-045277-1

Ⅰ.大… Ⅱ.①刘…②王… Ⅲ.①高等数学一高等学校一教材

Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 176477 号

责任编辑：吉正霞　肖　婷/责任校对：董艳辉　孙寓明

责任印制：高　嵘/封面设计：蓝　正

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市首壹印务有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

开本：B5（720×1000）

2015 年 8 月第　一　版　印张：15

2015 年 8 月第一次印刷　字数：286 000

定价：32.00 元

普通高等教育“十二五”规划教材

《大学文科数学》编委会

主　编　刘早清　王湘君

编　委（以姓氏笔画为序）

王湘君　刘早清　岑利群

周少波　胡　勇　胡杨子

徐浩渊

前　言

本书是高等学校文科类大学数学教材，全书由一元微积分、多元微积分、微分方程及其应用、应用统计四部分组成.为了加强微积分及其应用与应用统计的教学内容，强化数学文化的熏陶，构建适合我校要求的大学文科数学体系，结合多年的教学实践经验，我们编写了这本大学文科数学教材.

全书共11章：第1章 函数、极限与连续；第2章 导数与微分；第3章 导数的应用；第4章 不定积分；第5章 定积分及其应用；第6章 空间曲面与曲线；第7章 多元函数及其微分法；第8章 二重积分；第9章 微分方程及其应用；第10章 数据的搜集与描述；第11章 概率论与统计推断初步.第1至第5章以及第10章、第11章可适用于建筑、园林、规划、社会、社工、新闻、广电、广告、法学、哲学、外语、翻译(以下简称纯文科)等专业的大学文科数学56～72课时的教学，而第1至第9章适用于国商、英商、工管、行政等专业80课时的教学.因国商、英商、工管、行政等专业后续数学与专业课程的学习需要，我们将必备的多元微积分(第6章、第7章、第8章)纳入大学文科数学教材体系，还加强了一元微积分基本理论和训练，扩充了微分方程的理论和应用.这些知识也是纯文科生在以后的学习和实际工作中需要扩充的大学数学知识的首选内容.对于纯文科专业，我们重组了教学内容.舍弃传统教材中的线性代数初步，优化了一元微积分，增加了应用统计学，目的是为了提高学生学习的积极性以及将来实际工作的需要.

大家知道，数学的应用在这几十年里发生了根本性的变化，数学已深入到几乎所有的领域.微积分的诞生加速了工业革命的进程，以现代数学理论为基础的经济学渗透到了社会的方方面面，除了这些传统的自然科学、工程学、经济学与管理学外，数学的思想和方法对其他的社会科学发展也已产生巨大的影响，比如在语言、历史学科中，产生了“数理语言学”、“计量史学”等以数学为工具研究语言、历史的新学科，数学在社会科学研究与发展中的作用越来越重要.因此，大学文科数学知识是文科生必备的基本素质，这些素质的核心内容就是培养文科学生的理性思维(抽象思维、逻辑论证思维等)以及定量解决实际问题的能力.本书将典型应用实例和部分经典数学建模方法融入教学内容，达到重点培养学生分析问题、解决问题的能力，提高学生的定量分析水平，激发他们的学习热情.

本书的内容是在经历了我校师生多次上下讨论和论证后确定下来的，在继承

我校大学文科数学传统的教学内容基础上，增加了多元微积分与应用统计. 为了更好地吸收讨论和论证阶段关于教材内容的组织与编写的有益的意见和建议，我们精心地组织和成立了编委会. 编委中既有长期从事不同层次、不同专业的高等数学和概率论与数理统计以及数学专业课的教学骨干，也有教学、科研均很优秀的中青年教师，还有两位教师在国外大学学习和工作了十多年. 编委多次获得各类教学成果与教学质量奖，主持或参加国家自然科学基金与省部级教改课题多项，发表教学论文(CSSCI)与学术论文(SCI)数十篇.

参编教师为岑利群(第 1 章)、徐浩渊(第 2 章)、周少波(第 3 章)、胡杨子(第 4 章)、刘早清(第 5 章、第 7 章、第 9 章)、胡勇(第 6 章、第 8 章)、王湘君、万婷(第 10 章、第 11 章). 初稿由刘早清、王湘君统稿，修改稿由刘早清定稿.

本书的编写得到了华中科技大学教学研究基金与教材建设基金的资助，还得到了很多同事、同行的帮助与科学出版社大力支持，在此对他们表示衷心的感谢.

限于作者的水平，书中难免有不妥与疏漏之处. 敬请广大专家、同行与读者指正.

编　者

2015 年 6 月于华中科技大学

目　录

第 1 章　函数、极限与连续

初等数学研究的主要是常量及其运算，而高等数学所研究的主要是变量及变量之间的依赖关系，函数正是这种依赖关系的体现.极限是研究变量之间依赖关系的基本方法之一.本章将在复习高中所学过的函数与极限概念的基础上，进一步介绍两个重要极限，无穷小与无穷大以及函数的连续性.

1.1　函　　数

在我们的日常生活和工作中，会遇到许多不同类型的量.例如，当天的气温、湿度，到商场购买商品的人数、某种商品的价格等.人们发现，这些量往往是变动的，即所谓的变量，并且有些是互相关联的.函数是变量之间关系的一种体现，是微积分学的主要研究对象.

1.1.1　集合及其运算

为了说明变动的量的变化范围，我们回顾一下中学数学中的集合概念.一定性质事物的总体叫做集合，组成这个集合的事物称为该集合的元素.一般用大写字母 A、B、C、… 表示集合，用小写字母 a、b、c、… 表示集合中的元素.

元素与集合之间的关系：$a \in A$ 或 $a \notin A$.

集合与集合的关系：$A \subset B$，$A \subseteq B$，$A = B$，$A \not\subset B$.

集合分为有限集、无限集、空集，空集用 $\varnothing$ 表示.

集合的运算主要有：

集合的并　　$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$

集合的交　　$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$

集合运算满足交换律、结合律、分配律等一系列性质.

元素都是实数的集合称为实数集，简称数集.常见的数集有：全体自然数的集合记为 $\mathbf{N}$；全体整数的集合记为 $\mathbf{Z}$；全体有理数的集合记为 $\mathbf{Q}$；全体实数的集合记为 $\mathbf{R}$.

区间是微积分中常用的实数集，它包括有限区间和无限(穷) 区间.

有限区间　设 a，b 为两个实数，且 $a < b$，数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 称为开区间，记为 (a,b)，即 $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$.类似地，有闭区间 $[a,b]$，半开半闭区间

$(a,b]$,$[a,b)$.

后面常用到下面两个特殊的有限区间.

以 x_0 点为中心,半径为 δ 的开区间称为点 x_0 的邻域,记为

$$N(x_0,\delta)=\{x \mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$$

其去心邻域,记为

$$\mathring{N}(x_0,\delta)=\{x \mid x_0-\delta<x<x_0 \quad \text{或} \quad x_0<x<x_0+\delta\}$$

无限(穷)区间　引入记号 $+\infty$(读作"正无穷大")及 $-\infty$(读作"负无穷大"),则可类似地表示无限(穷)区间.例如,

$$[a,+\infty)=\{x \mid a\leqslant x\},\quad (-\infty,b)=\{x<b\}$$

特别地,全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也可表示为无限(穷)区间 $(-\infty,+\infty)$.

1.1.2　常量与变量

在生产、科学实验过程中,常常会遇到各种不同的量,其中有些量在过程中不起变化,也就是保持一定数值的量,这种量叫做常量;还有一些量在过程中是变化着的,也就是可以取不同数值的量,这种量叫做变量.

一个量是否为变量与观察的过程有关.例如,重力加速度在同一地点是常量,在不同地点观测,则它是变量.又如,某商场内某种商品的价格在短期内是常量,而在较长时间内它会变化,是变量.因此常量和变量是相对的,它们在一定条件下可以相互转化.

1.1.3　函数的概念

定义 1.1.1　设 x 和 y 是两个变量,D 为一个非空实数集,如果对属于 D 中的每个 x,依照某个对应法则 f,变量 y 都有确定的数值与之对应,称 y 为 x 的**函数**.记为

$$y=f(x),x\in D \quad \text{或} \quad f:x\rightarrow y,x\in D$$

并称 x 为函数的**自变量**,y 称为**因变量**,数集 D 称为函数的**定义域**,函数 y 的取值范围 $W=\{y \mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的**值域**.

注 1.1.1　如果对于每一个 $x\in D$,都有且仅有一个 $y\in W$ 与之对应,则称这种函数为单值函数.如果对于给定 $x\in D$,有多个 $y\in W$ 与之对应,则称这种函数为多值函数.一个多值函数通常可看成是由一些单值函数组成的.本书中,若无特别的说明,所研究的函数都是指单值函数.

注 1.1.2　函数的定义域和对应法则称为函数的两个要素,而函数的值域一般称为派生要素,函数由定义域和对应法则确定.两个函数相同只要定义域相同和对应法则相同即可,与自变量、因变量的记号无关.

在函数 $y=f(x)$ 中,当 x 取定 $x_0(x_0\in D)$ 时,则称 $f(x_0)$ 为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值,有时记为 $f(x)\big|_{x=x_0}$.

在中学里我们已经学过，常用的函数表示法有解析法(又称公式法)、表格法和图像法. 本书所讨论的函数一般用解析法表示，有时还同时画出其图像，以便对函数进行分析研究.

下面我们来介绍一个常用的函数，在定义域的不同范围内，具有不同的解析表达式的函数称为**分段函数**.

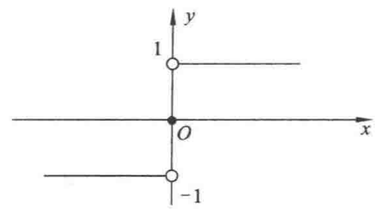


图 1.1.1

例 1.1.1　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

为分段函数. 它恰好表示自变量 x 的符号，定义域为$(-\infty,+\infty)$，如图 1.1.1 所示.

例 1.1.2　取整函数 $y=[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，如图 1.1.2 所示.

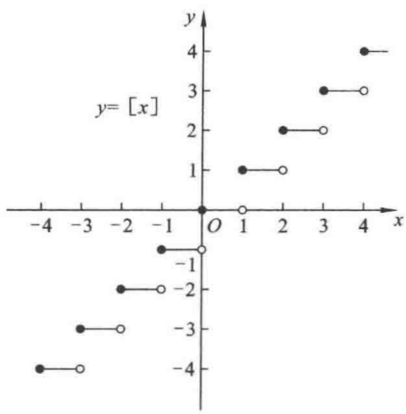


图 1.1.2

1.1.4　函数的简单性质

由于变量所在的实数域具有大小、正负对应和运算关系，通过对应的函数法则后这些关系可能保持或改变，依情况进行分类，从而得到下面几种具有特殊属性的函数类型.

1. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即 $x\in D$ 的充要条件是 $-x\in D$)，且对每个 $x\in D$，有

$$f(-x)=f(x)\ \ (f(-x)=-f(x))$$

则称 $f(x)$ 是**偶函数**(**奇函数**).

容易验证 $y=x^{\alpha}$，当 $\alpha=1,3$ 时为奇函数；当 $\alpha=2$ 时为偶函数. 它们的图形(图 1.1.3) 也不一样. 从几何上看，奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称.

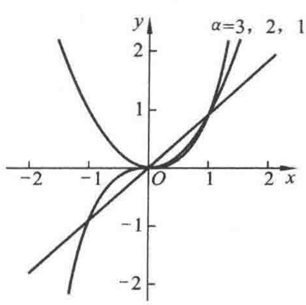


图 1.1.3

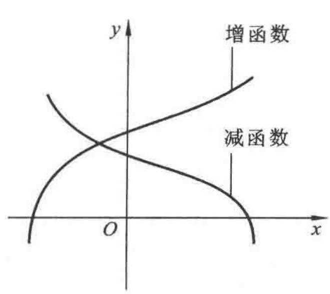


图 1.1.4

2. 函数的单调性

设 I 是函数 $f(x)$ 的定义域中的一个区间，若对该区间中的任意两个数 x_1，x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \ (f(x_1) \geqslant f(x_2))$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**（**单调减少**）；若函数值的不等式是如下的严格不等式：

$$f(x_1) < f(x_2) \ (f(x_1) > f(x_2))$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上**严格单调增加**（**严格单调减少**）.

从几何上看（图 1.1.4），区间 I 上单调增加（单调减少）的函数的曲线是沿着 x 轴的正向逐渐上升（下降）的.

区间 I 上严格单调增加，严格单调减少，单调增加或单调减少的函数统称为单调函数，而相应的区间 I 称为**单调区间**.

例如，函数 $y=x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上严格单调增加；函数 $y=x^2$ 在其定义区间 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调函数，但它在区间 $(-\infty,0)$ 上是严格单调减少函数，在区间 $(0,+\infty)$ 上是严格单调增加函数.

3. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 若存在正常数 T，使得对每个 $x \in D$，都有 $x \pm T \in D$，且

$$f(x+T)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**，称常数 T 为函数 $f(x)$ 的周期.

从几何上看（图 1.1.5），周期函数的图形可以看作是由一个基本周期区间 $[0,T_0]$ 上的图形经复制平移而来的.

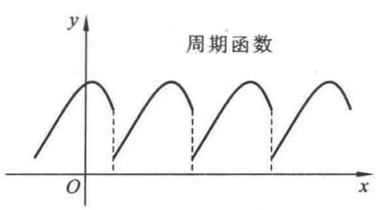


图 1.1.5

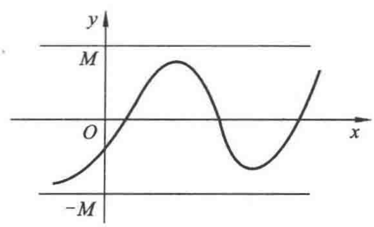


图 1.1.6

例如，$y=\sin x$ 及 $y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数，而 $y=|\sin x|$，$y=\cos^2 x$，是以 π 为周期的周期函数.

通常周期函数的周期是指其最小正周期，但并非每个周期函数都有最小正周期.

4. 函数的有界性

设 I 是函数 $f(x)$ 的定义域中的一个区间. 若有常数 M，使得对每个 $x \in I$，

恒有

$$f(x) \leqslant M \ (\text{或}\ M \leqslant f(x))$$

则说 M 是 $f(x)$ 在 I 上的一个**上界**(**下界**),或者说在 I 上 $f(x)$ 有上界(有下界).当 $f(x)$ 在 I 上既有上界又有下界时,说 $f(x)$ 是 I 上的**有界函数**,否则为**无界函数**.

从几何上看(图 1.1.6),有界函数的曲线 $y=f(x)$ 位于两条水平直线 $y=A$ 及 $y=B$ 之间.

例如,函数 $y=\sin x$ 及 $y=\cos x$ 均是其定义域上的有界函数,因为对所有的 x,都有 $|\sin x|\leqslant 1$,$|\cos x|\leqslant 1$ 成立.函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,2)$ 上是无界的,但是在区间 $(1,2)$ 上是有界的.

例 1.1.3　闭区间 $[a,b]$ 上的单调函数 $f(x)$ 是有界函数.

解　不妨设函数单调增加,对任意 $x\in[a,b]$,由于 $a\leqslant x\leqslant b$,故有 $f(a)\leqslant f(x)\leqslant f(b)$,这说明 $f(x)$ 是有界函数.

注 1.1.3　在学习函数特性的代数描述时,要注意相应的几何图形特征.

1.1.5　反函数

在研究变量之间的函数关系时,有时函数和自变量的地位会相互转换,于是就出现了反函数的概念.

定义 1.1.2　设函数 $y=f(x)$,定义域为 D,值域为 W.若对于 W 中的每一个 y 值,都可由 $y=f(x)$ 确定唯一的 x 值与之对应,则得到一个定义在 W 上的以 y 为自变量,x 为因变量的新函数,称为 $y=f(x)$ 的**反函数**,记为 $x=f^{-1}(y)$,并称 $y=f(x)$ 为直接函数.为了表述方便,通常将 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$.函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 1.1.4　求 $y=x^3+4$ 的反函数.

解　由 $y=x^3+4$ 得 $x=\sqrt[3]{y-4}$.然后交换 x 和 y,得 $y=\sqrt[3]{x-4}$,即 $y=x^3+4$ 的反函数为 $y=\sqrt[3]{x-4}$.

1.1.6　基本初等函数及其图像

1. 幂函数

形如

$$y=x^\alpha \ (\alpha\ \text{为实数})$$

的函数叫做幂函数.

幂函数的定义域与性质随 α 的不同而不同,但在 $(0,+\infty)$ 内总有定义,它的图像过点 $(1,1)$.若 $\alpha>0$,函数在 $(0,+\infty)$ 内单调增加;若 $\alpha<0$,函数在 $(0,+\infty)$ 内单调减少(图 1.1.7).

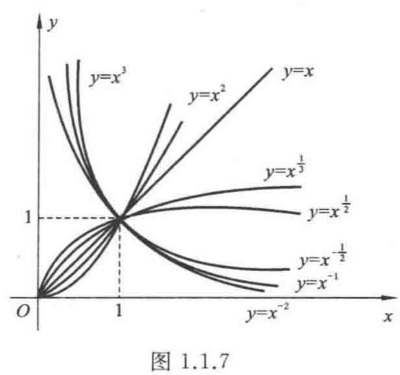


图 1.1.7