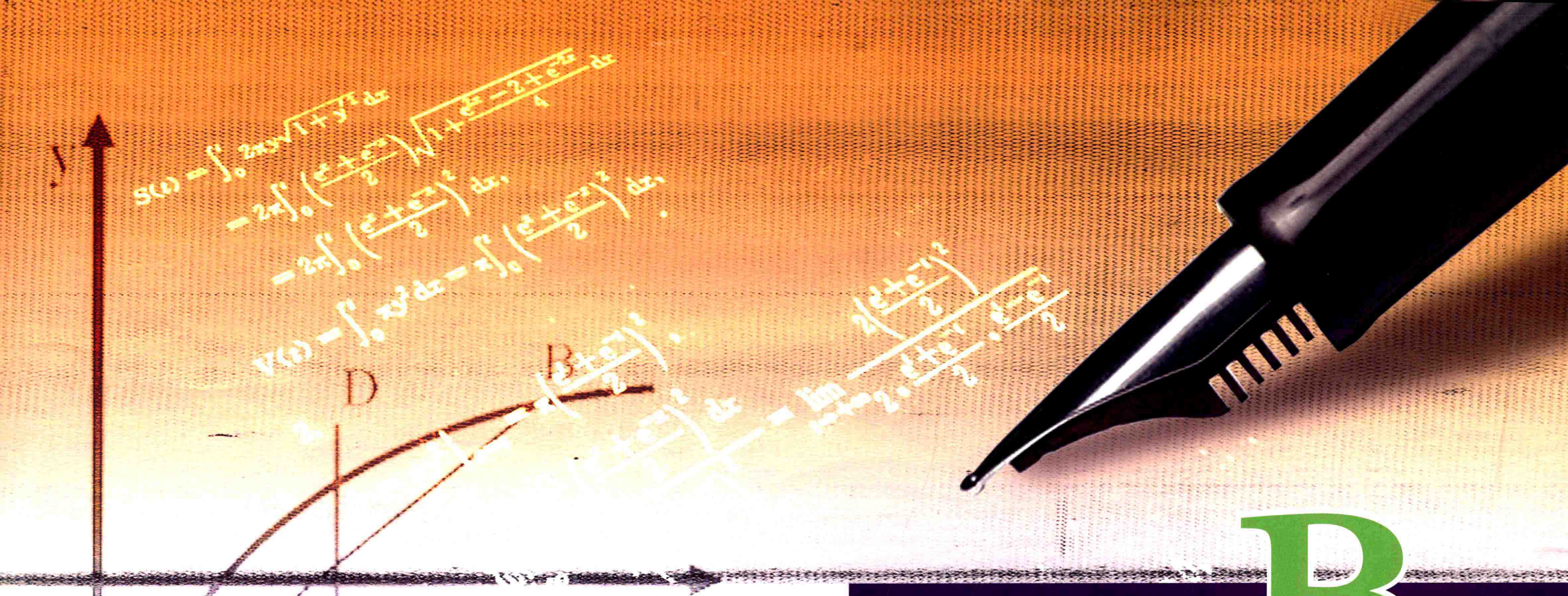

# 高等数学 练习册 B

邹杰涛 段利霞 张智勇 张 杰 编

清华大学出版社

# 高等数学B

# 练习册

邹杰涛 段利霞 张智勇 张杰 编



清华大学出版社
北京

## 内 容 简 介

本练习册是依据高等学校理工类和经管类各专业对高等数学课程的教学要求而编写的，内容上体现了教学的基本要求，满足这些专业所要达到的必备知识点。全书共12章，涉及的主要内容有函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线曲面积分和无穷级数。通过本练习册的学习可以帮助读者更好地理解基本概念，把握重点。本练习册可作为读者学习高等数学课的同步练习或习题使用，还可以作为大专院校非数学专业高等数学课程的参考资料。



**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学练习册. B / 邹杰涛等编. --北京：清华大学出版社，2015
ISBN 978-7-302-41136-9

I. ①高… II. ①邹… III. ①高等数学–高等学校–习题集 IV.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 183393 号

**责任编辑**：刘 颖
**封面设计**：常雪影
**责任校对**：王淑云
**责任印制**：李红英

**出版发行**：清华大学出版社
**网　　址**：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
**地　　址**：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
**社 总 机**：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
**投稿与读者服务**：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
**质 量 反 馈**：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
**印 刷 者**：三河市君旺印务有限公司
**装 订 者**：三河市新茂装订有限公司
**经　　销**：全国新华书店
**开　　本**：420mm×297mm　　**印　张**：10.25　　**字　　数**：195 千字
**版　　次**：2015 年 9 月第 1 版　　**印　　次**：2015 年 9 月第1次印刷
**印　　数**：1～3500
**定　　价**：20.00 元

产品编号：066382-01

# 前　言

高等数学的主要内容是微积分. 从 17 世纪中叶牛顿、莱布尼茨的奠基性工作至今，微积分学已经逐步发展成为一门逻辑严密、系统完整的学科. 它不仅是其他诸多数学分支的重要基础，而且在自然科学、社会科学的众多领域都有广泛应用，成为处理有关连续变量问题最有力的数学工具. 基于此，高等数学已经成为高等院校理工科类、管理类等许多专业的一门重要的公共基础课.

在本练习册的编写过程中，我们充分注意到近几年来中学数学教学内容的改革，力争在初等数学与高等数学教学内容的衔接部分做到拾遗补漏，以便大一学生顺利进入高等数学的学习状态. 在内容的取舍上，我们坚持以面向高等院校理工科类专业和科技发展的需要为原则，舍弃了难度较大的习题，增加了一些对于基本知识点概念理解和应用的题型，还精选了一些概念性强、方法有代表性、难度适中的练习题，方便读者迅速掌握各章的基本知识点. 在体系编排上，既注意体现数学课程循序渐进、由浅入深的特点，又尽可能对体系合理优化安排，避免繁琐复杂的推理证明. 每一章后附自测题，每学期习题后附期末样题，以便同学们平时自测和复习.

本练习册是北方工业大学公共数学教学团队集体智慧的结晶，以它作为学生同步学习的作业已经实践了多年，几经修改，最终由邹杰涛教授、段利霞副教授和张智勇副教授执笔编写，张杰教授最后统稿.

本书既可以作为高等院校理工科类、经管类各专业本、专科（高职）的高等数学课程的同步练习，也可以作为各类成人教育或者相关专业人员高等数学课程的辅导用书.

编者

2015 年 6 月于北方工业大学

# 目　　录

# 第 1 章作业题一（极限概念与运算）

## 一、选择与填空题

1. 已知数列$\{x_n\}=\left\{\left[1+(-1)^n\right]^n\right\}$，则(　　).

   A. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$　　B. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq\infty$ 但$\{x_n\}$无界

   C. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$　　D. $\{x_n\}$发散但有界

2. 设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$均为非负数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有(　　).

   A. $a_n<b_n$，对任意$n$成立　　B. $b_n<c_n$，对任意$n$成立

   C. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$不存在　　D. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在

3. 从$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$不能推出(　　).

   A. $f(x_0-0)=1$　　B. $f(x_0+0)=1$　　C. $f(x_0)=1$　　D. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-1]=0$

4. $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=1$是$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=1$的(　　).

   A. 必要条件　　B. 充分条件

   C. 充要条件　　D. 既非充分也非必要条件

5. 当$x\to\infty$时，$\dfrac{\pi}{2}-\arctan x$是(　　).

   A. 趋于 0　　B. 趋于$\infty$　　C. 有界变量　　D. 无界变量

6. 函数$f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$在点$x$=0 处(　　).

   A. 有定义且有极限　　B. 无定义但有极限

   C. 有定义但无极限　　D. 无定义且无极限

7. 当$x\to 0$时，函数$f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$的极限是(　　).

   A. 1　　B. $-1$　　C. 0　　D. 不存在且不是无穷大

8. 若$f(x)-k=\alpha$，其中$k$是常数，当$x\to x_0$时，$\alpha\to 0$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=$______________.

9. 已知数列$\{x_n\}=\left\{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots\sqrt{2}}}}\right\}$($n$重根号)，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$______________.

10. 函数$f(x)$在点$x_0$处左、右极限存在且相等是$f(x)$在点$x_0$处极限存在的______________条件.

## 二、计算题

1. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+4n+3}{2n^2}$.

2. 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+2}{7x^3+x-5}$.

3. 求$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)$.

4. 求$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

5. 设$f(x)=\begin{cases}e^x, & x\leqslant 0,\\ ax+b, & x>0,\end{cases}$求$f(0+0)$，$f(0-0)$；若$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$，求$b$.

6. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2n^2}+\dfrac{2}{2n^2}+\cdots+\dfrac{n}{2n^2}\right)$.

7. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$ $(|a|<1,|b|<1)$.

8. 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$.

9. 求 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{2+x}-2}{\sqrt{3x+3}-3}$.

10. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})$.

11. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求 $a$， $b$ 的值.

12. 讨论函数 $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$，当 $x\to1$ 时，极限是否存在？

三、证明题

设 $P(x)$是多项式函数，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)-x^3}{x^2}=2$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{P(x)}{x}=1$. 证明 $P(x)=x^3+2x^2+x$.

# 第 1 章作业题二（无穷小的比较、重要极限、函数的连续性）

一、选择与填空题

1. 当 $x \to 0$ 时，$x^k$ 与 $x+x^2+x^3$ 是等价无穷小，则 $k=$ (　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

2. 若当 $x \to x_0$ 时，$\alpha(x)$、$\beta(x)$ 都是无穷小，则当 $x \to x_0$ 时，下列表示式中哪一个不一定是无穷小 (　　).

A. $|\alpha(x)|+|\beta(x)|$　　B. $\alpha^2(x)+\beta^2(x)$　　C. $\ln[1+\alpha(x)\cdot\beta(x)]$　　D. $\dfrac{\alpha^2(x)}{\beta(x)}$

3. 当 $x \to 0$ 时，函数 $e^{x^2}-\cos x$ 是 $x^2$ 的 (　　).

A. 高阶无穷小　　B. 低阶无穷小

C. 同阶但不等价无穷小　　D. 等价无穷小

4. 函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处有定义是 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处连续的 (　　).

A. 必要但不充分　　B. 充分不必要　　C. 充分必要　　D. 无关条件

5. 下列结论正确的是 (　　).

A. 若 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处有定义且极限存在，则 $f(x)$ 在 $x_0$ 处必连续

B. 若 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处连续，$g(x)$ 在点 $x_0$ 处不连续，则 $f(x)+g(x)$ 在点 $x_0$ 处必不连续

C. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 点 $x_0$ 处都不连续，则 $f(x)+g(x)$ 在点 $x_0$ 处必不连续

D. 若 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处连续，$g(x)$ 在点 $x_0$ 处不连续，则 $f(x)\cdot g(x)$ 在点 $x_0$ 处必不连续

6. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x<0,\\ x+2, & x>0\end{cases}$ 在分段点 $x=0$ 处 (　　).

A. 函数有定义且极限存在　　B. 函数无定义且极限不存在

C. 极限存在且连续　　D. 极限存在但不连续

7. 函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论 $f(x)$ 的间断点，其结论为 (　　).

A. 不存在间断点　　B. 存在间断点 $x=-1$　　C. 存在间断点 $x=0$　　D. 存在间断点 $x=1$

8. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n^3}\cos n!}{9n+2015}=$________________.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\sin x\right)=$________________.

10. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x+2c}\right)^x=4$，则 $c=$________________.

11. 若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}=1$，则 $f(1)=$________________..

二、计算题

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin 2x}$.

2. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

3. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\arcsin x\cdot(e^x-1)}$.

4. 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot x}$.

5. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n}\right)$.

6. 求 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi}{2}x$.

7. 求函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{x^2+5x-6}$ 的间断点，并判断间断点的类型.

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+1}{2^{\frac{1}{x}}-1}+\dfrac{\arcsin ax}{x}, & x<0,\\ 3, & x=0\\ \dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}+\dfrac{\ln(1+bx)}{x}, & x>0,\end{cases}$，求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左、右极限，并讨论要使函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$a,b$ 应取何值？

三、证明题

1. 设数列 $\{x_n\}(x_n\leqslant 1)$ 由递推式 $x_{n+1}=\dfrac{1}{5}(2x_n+3)$ $(n=1,2,\cdots)$ 确定，其中 $x_1>0$. 证明：极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求该极限.

2. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)$. 证明：在 $[0,a]$ 上至少存在一点 $x$，使 $f(x)=f(x+a)$.

# 第2章作业题一（导数概念、求导法则）

一、选择与填空题

1. $f(x)$在$x_0$处可导，是$f(x)$在$x_0$处连续的(　　)条件.

A. 必要非充分　　B. 充分非必要

C. 充分必要　　D. 无关条件

2. $f(x)$在$x_0$处的左右导数都存在且相等是$f(x)$在点$x_0$处可导的(　　)条件.

A. 必要非充分　　B. 充分非必要

C.充分必要　　D. 无关条件

3. 设$f(x)$对任意$x$满足等式$f(1+x)=af(x)$，且有$f'(0)=b$，其中$a,b$为非零常数，则(　　).

A. $f(x)$在$x=1$处不可导　　B. $f(x)$在$x=1$处可导，且$f'(1)=a$

C. $f(x)$在$x=1$处可导，且$f'(1)=b$　　D. $f(x)$在$x=1$处可导，且$f'(1)=ab$

4. 在函数$f(x)$和$g(x)$的定义域上的一点$x_0$，下述说法正确的是(　　).

A. $f(x)$，$g(x)$至少其一不可导，则$f(x)+g(x)$不可导

B. $f(x)$，$g(x)$均不可导时必有$f(x)+g(x)$不可导

C. $f(x)$，$g(x)$只有其一不可导，则$f(x)g(x)$必不可导

D. $f(x)$，$g(x)$均不可导时，$f(x)g(x)$有可能可导

5. 设$f(x), g(x)$均在$(-\infty,+\infty)$内可导，且$f(x)g(x)=1$，则$\dfrac{f'(x)}{f(x)}+\dfrac{g'(x)}{g(x)}=$(　　).

A. 0　　B. 1　　C. $-1$　　D. 不能确定

6. 设$f(x)$是可导函数，且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线斜率为(　　).

A. $-1$　　B. $-2$　　C. 1　　D. 2

7. 设$f(x)$在$x_0$处可导，则

$\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$______________，　$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=$______________.

8. 曲线$y=x-\ln x$在点____________处具有水平切线.

9. 设$y=x\log_2 x+\ln 3$，则$y'=$____________.

10. 已知$y=f(x^3)$,$f(x)$为可导函数，则$y'=$______________________________.

二、计算题

1. 求函数$f(x)=x|x|$在$x=-1$处的导数.

2. 设$f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$，求$f'(0)$.

3. 设$\varphi(x)$在$x=a$处连续，$f(x)=(x-a)\varphi(x)$，求$f'(a)$.

4. 设$y=x\ln x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，则$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$.

5. 设$y=\dfrac{x}{4^x}$，求$y'$.

6. 设 $y = x\arctan x - \ln\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$，求 $y'$.

7. 设 $y = \sec^2 3x$，求 $y'$.

8. 设 $y = \left(\arcsin\dfrac{x}{2}\right)^3$，求 $y'$.

9. 设 $y = (\cot x)^x$，求 $y'$.

10. 设方程 $e^{xy} + y^2 = \cos x$ 确定 $y$ 是 $x$ 的函数，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

11. 在下列各题中，设 $f(u)$ 为可导函数，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

(1) $y = f(\sin^2 x) + \sin f^2(x)$.

(2) $y = f(e^x)e^{f(x)}$.

12. 设 $f(1-x) = xe^{-x}$ 且 $f(x)$ 可导，求 $f'(x)$.

13. 求曲线 $\begin{cases} x = 1+t^2, \\ y = t^3 \end{cases}$ 在 $t=2$ 处的切线和法线方程.

三、证明题

证明：函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，但不可导.

# 第 2 章作业题二（高阶导数与微分）

一、选择与填空题

1. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内为奇函数且在 $(0,+\infty)$ 内有 $f'(x)>0, f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内是(　　).

A. $f'(x)<0$ 且 $f''(x)<0$　　B. $f'(x)<0$ 且 $f''(x)>0$

C. $f'(x)>0$ 且 $f''(x)<0$　　D. $f'(x)>0$ 且 $f''(x)>0$

2. 设函数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 与二阶导数 $f''(x)$ 存在且均不为零，其反函数为 $x=\varphi(y)$，则 $\varphi''(y)=$(　　).

A. $\dfrac{1}{f''(x)}$　　B. $-\dfrac{f''(x)}{[f'(x)]^2}$　　C. $\dfrac{[f'(x)]^2}{f''(x)}$　　D. $-\dfrac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$

3. 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x)=\left[f(x)\right]^2$，则当 $n$ 为大于 2 的正整数时，$f^{(n)}(x)=$(　　).

A. $n\left[f(x)\right]^{n+1}$　　B. $n!\left[f(x)\right]^{n+1}$　　C. $\left[f(x)\right]^{2n}$　　D. $n!\left[f(x)\right]^{2n}$

4. 设 $y=f(u)$ 是可微函数，$u$ 是 $x$ 的可微函数，则 $\mathrm{d}y=$(　　).

A. $f'(u)u\mathrm{d}x$　　B. $f'(u)\mathrm{d}u$　　C. $f'(u)\mathrm{d}x$　　D. $f'(u)u'\mathrm{d}u$

5. 如果函数 $y=f(x)$ 可微，则 $\mathrm{d}y$ (　　).

A. 与 $\Delta x$ 无关　　B. 为 $\Delta x$ 的线性函数

C. 当 $\Delta x\to 0$ 时是 $\Delta x$ 的高阶无穷小　　D. 当 $\Delta x\to 0$ 时是 $\Delta x$ 的等价无穷小

6. $f(x)$ 在点 $x_0$ 处可导，是 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处可微的(　　)条件.

A. 必要非充分　　B. 充分非必要　　C. 充分必要　　D. 无关条件

7. 设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处可微，$\Delta x$ 是自变量在 $x_0$ 处的改变量，$\Delta y$ 是函数相应改变量，当 $\Delta x\to 0$ 时，则(　　).

A. $\Delta y-\mathrm{d}y$ 与 $\Delta x$ 是等价无穷小量　　B. $\Delta y-\mathrm{d}y$ 与 $\Delta x$ 是同阶但非等价无穷小量

C. $\Delta y-\mathrm{d}y$ 是比 $\Delta x$ 较高阶的无穷小量　　D. $\Delta y-\mathrm{d}y$ 是比 $\Delta x$ 较低阶的无穷小量

8. 设 $y=x^n+\mathrm{e}^x$，则 $y^{(n+1)}=$(　　).

A. $(n+1)!+\mathrm{e}^x$　　B. $(n+1)!+n\mathrm{e}^x$　　C. $\mathrm{e}^x$　　D. 0

9. 设 $y=\cos x^2$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$____________；$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}(x^2)}=$____________；$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$____________.

10. 设 $y=\mathrm{e}^{\sqrt{\sin 2x}}$，则 $\mathrm{d}y=$____________________$\mathrm{d}(\sin 2x)$.

二、计算题

1. 设 $y=\ln\cos x$，求 $y''$.

2. 设 $y=\mathrm{e}^{\csc 2x}$，求 $\mathrm{d}y$.

3. 设函数 $y=f(x)$ 可导，且 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$，求 $\mathrm{d}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

4. 已知 $y=x\ln(\sin 3x)$，求 $\mathrm{d}y$.

5. 设函数 $y=(x^3+1)^{-1}$，求二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

6. 函数 $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c, & x<0, \\ \ln(1+x), & x\geqslant 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处有二阶导数，试确定参数 $a,b,c$ 的值.

7. 已知 $y=f(x^2)$，$f(x)$ 二阶可导，求 $y'$，$y''$.

8. 设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=t-\arctan t \end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

9. 设 $y=f(x)$ 是由方程 $x^3-y^3-6x-3y=0$ 所确定的隐函数，求 $y''$ 及 $y''\big|_{x=2}$.

10. 设 $y=\mathrm{e}^x(x^2-1)$，求 $y^{(24)}$.

11. 计算 $\sqrt[6]{65}$ 的近似值.

# 第 3 章作业题一（中值定理与洛必达法则）

一、选择与填空题

1. 设 $y=f(x)$ 在 $(a,b)$ 内可导，$x,x+\Delta x$ 是 $(a,b)$ 内的任意两点，则 (　　).

   A. $\Delta y=f'(x)\Delta x$　　B. 在 $x,x+\Delta x$ 之间恰有一点 $\xi$，使 $\Delta y=f'(\xi)\Delta x$

   C. 在 $x,x+\Delta x$ 之间至少存在一点 $\xi$，使 $\Delta y=f'(\xi)\Delta x$

   D. 在 $x,x+\Delta x$ 之间的任一点 $\xi$，均有 $\Delta y=f'(\xi)\Delta x$

2. 下列条件不能使 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用拉格朗日中值定理的是 (　　).

   A. 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导　　B. 在 $[a,b]$ 上可导

   C. 在 $(a,b)$ 内可导，且在 $a$ 点右连续，$b$ 点左连续　　D. 在 $(a,b)$ 内有连续的导数

3. $y=\ln\sin x$ 在闭区间 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上满足罗尔定理的全部条件，则使定理结果成立的 $\xi=$ (　　).

   A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{2\pi}{3}$　　C. $\frac{5\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

4. 下列函数在给定区间上满足罗尔定理条件的是 (　　).

   A. $f(x)=\frac{3}{2x^2+1}$，$[-1,1]$　　B. $f(x)=xe^{-x}$，$[0,1]$

   C. $f(x)=\begin{cases}x+2, & x<1,\\ 1, & x\geqslant 1,\end{cases}$ $[-1,1]$　　D. $f(x)=|x|$，$[-1,1]$

5. 函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 在［0，$e-1$］上满足拉格朗日定理中的数值 $\xi$ 是 (　　).

   A. e　　B. $e-1$　　C. $e-2$　　D. 1

6. 能用洛必达法则求下列极限的是 (　　).

   A. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x-1}{x^2+3x-4}$　　B. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\ln x}{x\ln x}$　　C. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$　　D. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

7. 设 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$，则方程 $f'(x)=0$ 有__________个实根.

二、计算题

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$.

2. 求 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1+\cos\pi x}{x^2-2x+1}$.

3. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+3x^2)}{\ln(3+x^4)}$.

4. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^2\ln x$.

5. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\cot x}$.

6. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}=a\neq 0$，求数 $a$.

三、计算题

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$.　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\csc x}{4x}-\frac{\cos^3 x}{4x\sin x}\right)$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{(\arcsin x)^2}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0+0}(\cot x)^{\sin x}$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$.

(6) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\tan x)^{2\cos x}$.

2. 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$.

四、证明题

1. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=1$，$f(1)=\dfrac{1}{e}$. 证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=-e^{-\xi}$.

2. 设$f(x)$是$[a,b]$上的正值可微函数. 证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得$\ln\dfrac{f(b)}{f(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}(b-a)$.

3. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续$(0<a<b)$，在$(a,b)$内可导，证明：存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$.

# 第 3 章作业题二（泰勒公式及函数的单调性、凹凸性、导数应用）

一、选择与填空题

1. 设 $f(x)$ 在点 $x_0$ 可导，则 $f'(x_0)=0$ 是 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处取得极值的(　　).

A. 必要条件　　B. 充分条件　　C. 充要条件　　D. 无关条件

2. 设 $f(x)$ 在点 $x_0$ 有二阶导数，则 $f''(x_0)\neq 0$ 是 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处取得极值的(　　).

A. 必要条件　　B. 充分条件　　C. 充要条件　　D. 无关条件

3. 设 $f(x)$ 在点 $x_0$ 有二阶导数，则 $f''(x_0)=0$ 是 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 拐点的(　　).

A. 必要条件　　B. 充分条件　　C. 充要条件　　D. 无关条件

4. 设函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，且 $f(0)=f'(0)=0$, 则下列结论不正确的是(　　).

A. $b=c=0$　　B.当 $a>0$ 时，$f(0)$ 为极小值

C. 当 $a<0$ 时，$f(0)$ 为极大值　　D. 当 $a\neq 0$ 时，$(0,f(0))$ 为拐点

5. 已知 $f(x)$ 对一切 $x$ 满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$. 若 $f'(x_0)=0$（$x_0\neq 0$），则(　　).

A. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值　　B. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

C. $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

D. $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，且 $(x_0,f(x_0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

6. 曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ (　　).

A. 没有渐近线　　B. 仅有水平渐近线

C. 仅有铅直渐近线　　D. 既有水平渐近线，又有铅直渐近线

7. 下列命题哪一个是正确的(　　).

A. 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处有切线，则 $f'(x_0)$ 存在

B. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值一定是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个极大值

C. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的极大值必定大于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的所有极小值

D. 若 $f(x)$ 在 $x_0$ 可导，$g(x)$ 在 $x_0$ 不可导，则 $f(x)+g(x)$ 在 $x_0$ 必定不可导

8. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内可导，且 $f'(0)=0,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{\sin x}=-\dfrac{1}{2}$，则 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极________________值.

9. 曲线 $y=\dfrac{x}{(1-x^2)^2}$ 的渐近线共有________________条.

10. 设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$，则 $f'(0),f'(1),f(1)-f(0)$ 的大小顺序为________________.

二、计算题

1. 求函数 $y=xe^x$ 的 $n$ 阶拉格朗日型余项及佩亚诺型余项麦克劳林展开式.

2. 求 $f(x)=x^2e^{-x}$ 的单调区间与其图形的凹凸区间及拐点.

3. 已知函数 $y=\dfrac{x}{(1-x^2)^2}$，求：(1) 函数的增减区间及极值；(2) 函数图形的凹凸区间及拐点.

4. 已知函数 $y=\dfrac{x}{(1-x^2)^2}$. (1) 求函数图形的渐近线；(2) 作出函数的图形.

5. 求曲线 $y=\ln\sec x$ 在点 $(x,y)$ 处的曲率及曲率半径.

三、应用题

1. 做一个上端开口的圆柱形容器，它的容积是 $V$ ($V$ 为常数)，壁厚忽略不计，问容器底面半径为多少时，才能使所用的材料最省？

2. 在曲线段 $y=x^2$ $(0<x<8)$ 上求一点 $M$，使得由曲线在 $M$ 点的切线与直线 $x=8, y=0$ 所围成的三角形的面积最大.

四、证明题

1. 证明不等式：$\tan x > x-\dfrac{1}{3}x^3\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$. 证明：在 $(-1,1)$ 内存在一点 $\xi$，使得 $f'''(\xi)=3$.