21世纪应用型本科院校规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

主编 刘大瑾

南京大学出版社

21世纪应用型本科院校规划教材

高等数学

主　编　刘大瑾
副主编　白路锋　王晓春
编　者　王　娅　叶建兵　刘明颖　李文涛
　　　　张文彬　周海林　谌文超

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 / 刘大瑾主编. -- 南京 : 南京大学出版社,2015.7

21 世纪应用型本科院校规划教材

ISBN 978-7-305-15374-7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①高等数学一高等学校一教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 129941 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮　编 210093
出 版 人 金鑫荣

丛 书 名 21 世纪应用型本科院校规划教材
书　　名 高等数学
主　　编 刘大瑾
责任编辑 吴　华　　编辑热线 025-83596997

照　　排 南京南琳图文制作有限公司
印　　刷 丹阳市兴华印刷厂
开　　本 787×1092 1/16 印张 24 字数 614 千
版　　次 2015 年 7 月第 1 版 2015 年 7 月第 1 次印刷
印　　数 1～3 000
ISBN 978-7-305-15374-7
定　　价 49.00 元

网址：http://www.njupco.com
官方微博：http://weibo.com/njupco
官方微信号：njupress
销售咨询热线：(025) 83594756

前　　言

高等数学是高等院校理工科、经济管理学科等专业的重要基础课，也是相关学科专业的学生学习与研究其他后续数学课程和专业课程必不可少的工具. 随着我国高等教育逐步由“精英教育”向“大众教育”转变，高校教育目标也倾向于为社会培养具有实践能力和创新精神的专门人才，作为传统学科的高等数学进行改革和新的探索也成为必然. 为此，编者根据“高等数学课程教学基本要求”，汲取近年来高等数学教学改革的成果及一线教师多年的教学经验，编写了这本《高等数学》.

在本书的编写宗旨方面，既注重学生基础知识的培养，也着力于学生思考、分析和解决问题能力的培养，力求做到基础性、严谨性、实用性、可读性的和谐统一.

首先，以往使用的众多教材有偏重于演绎论证、逻辑推理及用纯数学的语言描述等问题，显得过于抽象，学生易产生畏难情绪. 本书在不影响教材系统性和严谨性的前提下，适当地淡化了数学的抽象化色彩，形象具体，条理清晰，简洁流畅. 其次，学习的最终目的是应用. 本书在有关的章节从学生熟悉的问题入手，引入实例，以培养学生“用已知解决未知”的能力. 此外，针对生源的层次不一样，知识背景亦不尽相同的情况，我们在习题的选编上，不仅选题新颖，而且难度适中，附有参考答案，以方便师生参阅，充分满足个性化的教学需求.

本教材共分十一章，主要内容包括极限与连续、导数与微分、导数的应用、定积分、不定积分、常微分方程、级数、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、曲线积分与曲面积分等. 考虑到定积分和不定积分的关系，第 4 章将定积分调整到不定积分之前进行讲解.

本书由刘大瑾任主编，白路锋、王晓春任副主编. 参加本书编写还有(以姓氏笔画为序)：王娅、叶建兵、刘明颖、李文涛、张文彬、周海林、谌文超.

限于编者水平，书中难免有不当之处，恳请广大读者不吝指出.

编　者

2015 年 5 月

目　　录

第 1 章

函数与极限

函数是数学中最重要的基本概念之一，是现实世界中量与量之间的依存关系在数学中的反映. 在这一章中，我们将在中学已有的知识的基础之上，进一步阐明函数的一般定义. 函数是变量与变量之间的一种对应关系，高等数学以变量为研究对象，极限方法是研究变量的一种基本方法；连续是函数的一种重要性态，是极限方法的一个重要应用.

1.1 函数的有关概念

函数的概念与基本初等函数的性质和图形在中学已经学过，本节只是中学内容的复习、总结与提高.

常用的一些符号：

“$\forall$”表示“任给”或“一切”，例如 $\forall x \geqslant 0$ 表示“一切非负实数 x”；

“$\exists$”表示“存在”、“找到”；

实数集——$\mathbb{R}$；一切自然数的集合——$\mathbb{N}$；一切整数的集合——$\mathbb{Z}$；

一切有理数的集合——$\mathbb{Q}$；推出——$\Rightarrow$；当且仅当——$\Leftrightarrow$.

1.1.1 数轴上的区间，点的邻域

由于变量的特征总是体现在一定的范围内，而这个一定的范围一般用区间来表示，下面我们就介绍区间和邻域这些表达函数取值范围的一些常用概念.

1. 数轴上的区间

区间为一类数集. 设 a,b 为两个实数，且 $a<b$.

(1) 数集 $\{x \mid x\in\mathbb{R}, a<x<b\}$ 称为开区间，记作 (a,b)，即 $(a,b)=\{x \mid x\in\mathbb{R}, a<x<b\}$，如图 1-1 所示.

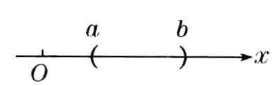

图 1-1

(2) 数集 $\{x \mid x\in\mathbb{R}, a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，记作 $[a,b]$，即 $[a,b]=\{x \mid x\in\mathbb{R}, a\leqslant x\leqslant b\}$，如图 1-2 所示.

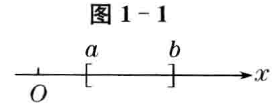

图 1-2

(3) 数集 $\{x \mid x\in\mathbb{R}, a<x\leqslant b\}$，$\{x \mid x\in\mathbb{R}, a\leqslant x<b\}$ 称为半开半闭区间，分别记作 $(a,b]$，$[a,b)$，即 $(a,b]=\{x \mid x\in\mathbb{R}, a<x\leqslant b\}$，$[a,b)=\{x \mid x\in\mathbb{R}, a\leqslant x<b\}$.

说明：上述这些区间称为有限区间，数 $b-a$ 称为区间长度.

(4) 无限区间：

$[a,+\infty)=\{x|x\in\mathbb{R},a\leqslant x<+\infty\}$，$(a,+\infty)=\{x|x\in\mathbb{R},a<x<+\infty\}$，
$(-\infty,b)=\{x|x\in\mathbb{R},-\infty<x<b\}$，$(-\infty,b]=\{x|x\in\mathbb{R},-\infty<x\leqslant b\}$.

2. 点的邻域

为了研究函数的局部性质，也就是小范围内的性质，常常要用到邻域的概念.

定义 1-1 设 a 是一个实数，δ 为正数，称数集 $\{x||x-a|<\delta\}$ 为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即 $U(a,\delta)=\{x||x-a|<\delta\}$，如图 1-3所示.

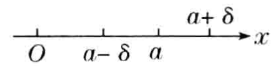

图 1-3

例如，$|x-5|<\frac{1}{2}$，即以点 $a=5$ 为中心，以 $\frac{1}{2}$ 为半径的邻域，也就是开区间(4.5,5.5).

数集 $\{x|0<|x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的去心的 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}$.

例如，$0<|x-1|<2$，即为以点 $a=1$ 为中心，半径为 2 的空心邻域 $(-1,1)\cup(1,3)$.

为了方便，有时把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为 a 的左 δ 邻域，把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域.

1.1.2 映射

民间有这样一句话，“一叶落而知天下秋”，用树叶的飘落来反映季节的变化，这就是树叶飘落和季节之间建立了一种对应关系.更一般的，现实生活中，常常要用到用一种事物的变化来研究另外一种事物的变化，而映射概念就是对这样一种现实问题的数学抽象.

定义 1-2 设 X,Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对于 X 中每一个元素 x，按照法则 f，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的映射，记为

$$f:X\to Y \text{ 或 } y=f(x),$$

其中，$D_f=X$ 称为 f 的原象集，$R_f=\{f(x)|x\in X\}$ 称为 f 的象集，即 $R_f=f(X)$，$R_f\subset Y$.

对于映射的概念我们需要强调以下几点：

(1) 映射是有方向的，A 到 B 的映射与 B 到 A 的映射往往不是同一个映射.

(2) 映射要求对于集合 A 中的每一个元素，在集合 B 中都有它的象，并且这个象是唯一确定的.这种集合 A 中元素的任意性和在集合 B 中对应元素的唯一性是映射的重要性质，缺一不可.

(3) 映射允许集合 A 中不同的元素在集合 B 中有相同的象，即映射可以是“多对一”或“一对一”，但不能是“一对多”.

定义 1-3 设 f 是集合 X 到集合 Y 的映射，若 $R_f=Y$，即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的象，则称 f 为 X 到 Y 上的映射或满射；若对 X 中任意两个不同的元素 $x_1\neq x_2$，它们的象 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为 X 到 Y 上的单射；若 f 既是单射，又是满射，则称 f 为一一映射(或双射).

【例 1-1】 设 $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$，对每个 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，$f(x)=\sin x$.这里 f 是一个映射，其定义域 $D_f=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，值域 $R_f=[-1,1]$.容易验证 f 既是单射，又是满射，因此是一一映射.

【例1-2】 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，对每个 $x\in\mathbb{R}$，$f(x)=x^2$. 显然，f 是一个映射，f 的定义域 $D_f=\mathbb{R}$，值域 $R_f=\{y\mid y\geqslant 0\}$，它是 $\mathbb{R}$ 的一个真子集. 对于 R_f 中的元素 y，除 $y=0$ 外，它的原象不是唯一的. 如 $y=4$ 的原象就有 $x=2$，$x=-2$ 两个. 容易验证，f 既不是单射，又不是满射.

映射又称为算子. 根据集合 X,Y 的情形，在不同的数学分支中，映射有不同的惯用名称. 例如，从非空数集 X 到数集 Y 的映射又称为 X 上的泛函，从非空集 X 到它自身的映射又称为 X 上的变换，从实数集(或其子集) X 到实数集 Y 的映射通常称为定义在 X 上的函数.

1.1.3 函数的定义

1. 函数的概念

在日常生活中，有两个常见的量：一种量的值是固定的，称为常量；一种量可以取不同的值，称为变量. 函数研究的就是变量之间的对应关系.

首先，我们来看下面的两个例子：

【例1-3】 自由落体运动中，下落的距离 S 和时间 t 是变量，它们有如下关系：$S=\frac{1}{2}gt^2$，$t\in[0,T]$.

【例1-4】 用一边长为 a 的正方形铁皮做一个高为 x 的无盖小盒，设其容积为 V，$V=x\times(a-2x)^2$，$0<x<\frac{a}{2}$.

在以上两例中，关系式 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 反映了 S 与 t 之间的一种依存关系，关系式 $V=x\times(a-2x)^2$ 反映了 V 与 x 之间的一种依存关系，这种变量之间的依存关系就称为函数.

下面我们介绍函数的定义.

定义1-4 设 x 和 y 是两个变量，D 是一给定的数集。如果对 $\forall x\in D$，变量 y 按照一定的法则总有唯一确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$.

数集 D 叫做这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量. 函数 f 在点 x 的函数值，记为 $f(x)$，全体函数值的集合称为函数 f 的值域，记作 $f(D)$，即

$$f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}.$$

当自变量 x 取值 x_0 时，与 x_0 对应的变量 y 的数值 y_0 称为函数在点 x_0 处的函数值，即 $y_0=f(x_0)$.

若 $x_0\in D_f$，则称 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 有定义或 $f(x_0)$ 存在，称 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 有定义.

集合 $W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域. 例1-3、例1-4的值域分别为：$W_1=[0,\frac{1}{2}gT^2]$，$W_2=\left(0,\frac{2a^3}{27}\right]$.

对于函数的定义我们给出以下几点说明：

(1) 对 $\forall x\in D$，按照一定的法则只有一个 y 值与之对应，则称函数 $y=f(x)$ 为单值函数，否则称函数 $y=f(x)$ 为多值函数. 如函数 $y=x^2$ 为单值函数，函数 $x^2+y^2=r^2$ 为多值函数.

(2) 函数的三要素：定义域、对应关系(对应法则)、值域. 其中决定性要素是定义域、对

应关系(对应法则).

若函数 $y=f(x)$ 有实际意义,按照实际意义来确定定义域.若函数 $y=f(x)$ 没有实际意义,这时定义域是指与唯一确定的实数值的因变量对应的自变量的全体数值组成的集合.

特别要注意的一点是若函数的定义域和对应关系(对应法则)相同,则为同一函数.

【例 1-5】 求函数 $y=x^2,y=\sqrt{1-x},y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域和值域.

解 函数 $y=x^2$ 的定义域和值域分别为 $(-\infty,+\infty),[0,+\infty)$;

函数 $y=\sqrt{1-x}$ 的定义域和值域分别为 $(-\infty,1],[0,+\infty)$;

函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域和值域分别为 $[-1,1],[0,1]$.

【例 1-6】 求狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1 & x\text{ 是有理数};\\0 & x\text{ 是无理数}\end{cases}$ 的定义域和值域.

解 定义域和值域分别为 $(-\infty,+\infty),\{0,1\}$.

【例 1-7】 线性函数 $y=f(x)=kx$ 其函数关系就是我们熟知的正比关系,其图形是一条直线.

【例 1-8】 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{16-x^2}+\ln\sin x$; (2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{3-x^2}}+\arcsin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$.

解 (1) 由所给函数知,要使函数 y 有定义,必须满足两种情况,偶次根式的被开方式大于等于零或对数函数符号内的式子为正,可建立不等式组,并求出联立不等式组的解,即

$$\begin{cases}16-x^2\geqslant 0;\\ \sin x>0.\end{cases}$$

推得
$$\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4;\\ 2n\pi<x<(2n+1)\pi,n=0,\pm1,\pm2,\cdots.\end{cases}$$

此不等式组的公共解为 $-4\leqslant x<-\pi$ 与 $0<x<\pi$,所以函数的定义域为 $[-4,-\pi)\cup(0,\pi)$.

(2) 由所给函数知,要使函数有定义,必须分母不为零且偶次根式的被开方式非负,反正弦函数符号内的式子绝对值小于等于 1,可建立不等式组,并求出联立不等式组的解,即

$$\begin{cases}\sqrt{3-x^2}\neq 0;\\ 3-x^2>0;\\ \left|\dfrac{x}{2}-1\right|\leqslant 1.\end{cases}$$

推得
$$\begin{cases}-\sqrt{3}<x<\sqrt{3};\\ 0\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$$

即 $0\leqslant x<\sqrt{3}$,因此,所给函数的定义域为 $[0,\sqrt{3})$.

函数由解析式给出时,其定义域是使解析式子有意义的一切实数.**为此求函数的定义域时应遵守以下原则:**

(1) 反三角函数 $\arcsin x,\arccos x$,要满足 $|x|\leqslant 1$;

(2) 分段函数的定义域是各段定义域的并集;

(3) 求复合函数的定义域时,一般是外层向里层逐步求.

2. 函数的特性

(1) 函数的有界性.

定义 1-5　设函数 $f(x)$的定义域为 D,区间 $X\subset D$.

① 如果存在正数 M,使得 $\forall x\in X$,都有$|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$在区间 X 上有界.

② 如果存在常数 M_1,使得 $\forall x\in X$,都有 $f(x)\leqslant M_1$,则称函数 $f(x)$在区间 X 上有上界.

③ 如果存在常数 M_2,使得 $\forall x\in X$,都有 $f(x)\geqslant M_2$,则称函数 $f(x)$在区间 X 上有下界.

若函数 $f(x)$在区间 I 内有界,则称 $f(x)$在区间 I 内为有界函数.图像在直线 $y=-M$ 与 $y=M$ 之间,如图 1-4 所示.

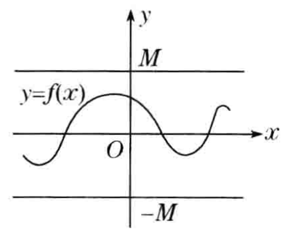

图 1-4

例如,函数 $y=\sin x$,对于$(-\infty,+\infty)$内的任一 x,都有$|\sin x|\leqslant 1$ 成立,所以 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界,而函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在$(1,5)$内有界,但在$(0,1)$内无界.

(2) 函数的单调性.

定义 1-6　若对任意 $x_1,x_2\in(a,b)$,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $y=f(x)$是区间(a,b)上的单调增加函数;当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $y=f(x)$是区间(a,b)上的单调减少函数,单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数,若函数 $y=f(x)$是区间(a,b)上的单调函数,则称区间(a,b)为单调区间.

单调增加的函数的图像表现为自左至右是单调上升的曲线,如图 1-5 所示;单调减少的函数的图像表现为自左至右是单调下降的曲线,如图 1-6 所示.

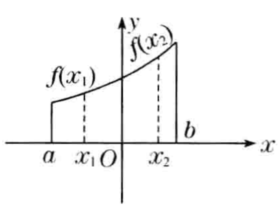

图 1-5

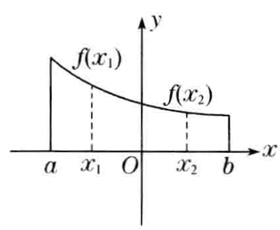

图 1-6

例如,函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内不是单调函数,但在区间$(-\infty,0)$内单调减少,在区间$(0,+\infty)$内单调增加.

又如函数 $y=\tan x$ 在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$内单调增加,它是一个单调函数.

(3) 函数的奇偶性.

定义 1-7　设函数 $f(x)$的定义域为 D,关于原点对称(即若 $x\in D$,则有$-x\in D$).

① 如果对于任意 $x\in D$,$f(-x)=f(x)$恒成立,则称函数 $f(x)$为偶函数.

② 如果对于任意 $x\in D$,$f(-x)=-f(x)$恒成立,则称函数 $f(x)$为奇函数.

既不是奇函数也不是偶函数的函数,称为非奇非偶函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称,如图 1-7 所示;奇函数的图形关于原点对称,如图 1-8 所示.

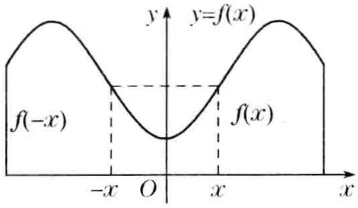

图 1-7

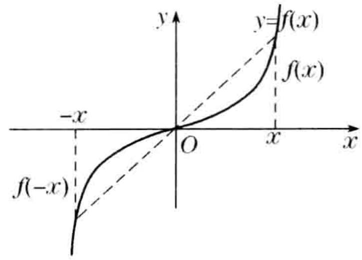

图 1-8

例如,容易验证 $f(x)=x^3$ 是奇函数,$f(x)=x^2$ 是偶函数,$y=\sin x+\cos x$ 是非奇非偶函数.

(4) 函数的周期性.

定义 1-8 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在一个不为零的数 l,使得对于任一 $x\in D$,有 $(x\pm l)\in D$,且 $f(x\pm l)=f(x)$ 恒成立,则称函数 $f(x)$ 为周期函数,数 l 称为函数 $f(x)$ 的周期.

显然当 l 为函数 $f(x)$ 的一个周期时,则 $\pm l,\pm 2l,\pm 3l,\pm 4l,\cdots$ 也都是 $f(x)$ 的一个周期,通常我们所说的周期函数的周期是指最小正周期,在每一个周期内的图像是相同的.

例如,函数 $y=\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数,函数 $y=\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数.

3. 反函数和复合函数

(1) 反函数.

定义 1-9 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 W,如果对于 $\forall y\in W$,D 上有唯一的 x 与 y 对应,这个数值适合关系 $f(x)=y$,从而得到一个以 y 为自变量,x 为因变量的函数,称为函数 $y=f(x)$ 的反函数,记为 $x=\varphi(y)$,$x=f^{-1}(y)$.

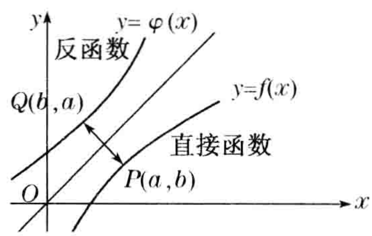

图 1-9

函数与反函数的图像关于 $y=x$ 对称,如图 1-9 所示.

例如,函数 $y=\sin x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 的反函数为 $x=\arcsin y(-1\leqslant y\leqslant 1)$. 又例如,$y=x^3$,$x\in\mathbb{R}$,则 $x=\sqrt[3]{y}=y^{\frac{1}{3}}$,$y\in\mathbb{R}$. $y=f(x)$ 的反函数为 $x=f^{-1}(y)$,但 $y=f^{-1}(x)$ 也称为 $y=f(x)$ 的反函数,如 $y=\sqrt[3]{x}$ 也称为 $y=x^3$ 的反函数.

(2) 复合函数.

实际问题中经常出现这样的情形:在某变化过程中,第一个量依赖于第二个量,而第二个量又依赖于第三个量,实际上,第一个量可由第三个量来确定,这实际上就是一种复合函数的问题.

定义 1-10 设 $y=f(u)$ 定义域为 D_1,$u=g(x)$ 定义域为 D_2,而且 $g(D_2)\subset D_1$,则

$$x\in D_2\rightarrow u=g(x)\in D_1\rightarrow y=f(u)$$

$$y=f[g(x)].$$

$y=f[g(x)]$ 称为由 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 复合而成的复合函数,记为

$$f\circ g(x)=f[g(x)].$$

复合函数也可以描述为：设 y 是 u 的函数，即 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数，即 $u=g(x)$，且 $g(x)$的值域全部或部分在 $f(u)$的定义域内，那么 y 通过 u 而得到 x 的函数 $y=f(u)=f[g(x)]$叫做 x 的复合函数，u 叫做中间变量.

$g(D_2)\subset D_1(g(D)\subset D_f)$为 f 与 g 可以复合的条件，如 $y=\arcsin u$ 与 $u=x^2+2$ 不能复合.

有时，$y=f(u)$与 $u=g(x)$复合的定义域可能是 $u=g(x)$的定义域的一部分，如 $y=\arcsin u$ 与 $u=x^3$ 复合得 $y=\arcsin x^3$，定义域为$[-1,1]$，为 $u=x^3$ 的定义域$(-\infty,+\infty)$的一部分.

两个以上的函数也可以进行复合运算，并且满足结合律，即 $f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$，但是一般复合运算不满足交换律，即 $f\circ g\neq g\circ f$.

复合函数的中间变量不止一个，有的复合函数的中间变量可以有两个或更多个，例如，$y=\sin u, u=\cos v, v=\ln x$，则 $y=\sin[\cos(\ln x)]$是经过中间变量 u 和 v 复合而成的.

1.1.4　函数的三种表示方法

中学时已经学过表示函数的方法有三种：图像法、表格法、解析法(公式法)，这里只作简要介绍.

(1) 图像法. 用函数的图形来表示函数的方法称为函数的图像表示方法，简称图像法. 这种方法直观性强并可观察函数的变化趋势，但根据函数图形所求出的函数值准确度不高且不便于作理论研究.

(2) 表格法. 将自变量的某些取值及与其对应的函数值列成表格表示函数的方法称为函数的表格表示方法，简称表格法. 这种方法的优点是查找函数值方便，缺点是数据有限、不直观、不便于作理论研究.

(3) 公式法. 用一个(或几个)公式表示函数的方法称为函数的公式表示方法，简称公式法，也称为解析法. 这种方法的优点是形式简明，便于作理论研究与数值计算，缺点是不如图像法来得直观.

在用公式法表示函数时经常遇到下面几种情况：

① **分段函数**. 在自变量的不同取值范围内，用不同的公式表示的函数，称为分段函数. 如

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x<0; \\ x^2 & 0\leqslant x<2; \\ \ln x & 2\leqslant x\leqslant 5 \end{cases}$$

就是一个定义在区间$(-\infty,5]$上的分段函数.

值得强调的是分段函数是用几个公式合起来表示的一个函数，而不是表示几个函数.

② **用参数方程确定的函数**. 用参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t); \\ y=\psi(t) \end{cases}(t\in I)$$

表示变量 x 与 y 之间的函数关系，称为用参数方程确定的函数. 例如，函数

$$y=\sqrt{1-x^2}\quad (x\in[-1,1])$$

可以用参数方程$\begin{cases} x=\cos t; \\ y=\sin t \end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant \pi)$表示.

③ **隐函数.** 如果在方程 $F(x,y)=0$ 中，当 x 在某区间 I 内任意取定一个值时，相应地，总有满足该方程的唯一的 y 值存在，则称方程 $F(x,y)=0$ 在区间 I 内确定了一个隐函数. 例如方程 $e^x+xy-1=0$ 就确定了变量 y 与变量 x 之间的函数关系.

注意 能表示成 $y=f(x)$(其中 $f(x)$ 仅为 x 的解析式)的形式的函数，称为显函数. 把一个隐函数化成显函数的过程称为**隐函数的显化.** 例如，$e^x+xy-1=0 \quad (x\neq 0)$可以化成显函数 $y=\frac{1-e^x}{x}$. 但有些隐函数却不可能化成显函数，例如，$e^x+xy-e^y=0$.

1.1.5 初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数，这些函数在中学的数学课程中都已经学过，这里仅对这些函数的性质作简要的复习.

首先来介绍基本初等函数及其性质.

1. 常数函数

$y=C$(C 为常数)(如图 1-10).

这是所有函数中最简单的一类，对于所有的 x，它始终取同一个值，定义域为实数域.

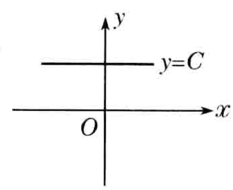

图 1-10

2. 幂函数

$y=x^\alpha (\alpha\neq 0)$.

性质 1-1 $y=x^\alpha$ 的定义域随 α 值不同而异，但不论 α 值是多少，它在$(0,+\infty)$内总是有定义的.

当 $\alpha>0$ 时，$y=x^\alpha$ 在$(0,+\infty)$是增函数；当 $\alpha<0$ 时，$y=x^\alpha$ 在$(0,+\infty)$是减函数.

3. 指数函数

$y=a^x (a>0,a\neq 1)$(如图 1-11).

定义域：$(-\infty,+\infty)$，值域：$(0,+\infty)$，当 $a=e$ 时，$y=e^x$.

运算性质有：① $a^{x_1}\cdot a^{x_2}=a^{x_1+x_2}$；② $(ab)^x=a^x\cdot b^x$；③ $(a^x)^p=a^{xp}$.

4. 对数函数

$y=\log_a x (a>0,a\neq 1)$(如图 1-12).

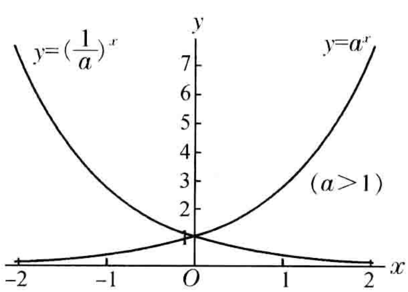

图 1-11

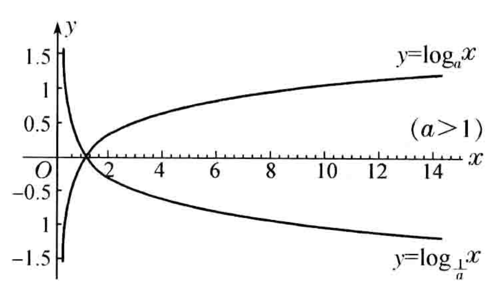

图 1-12

定义域：$(0,+\infty)$，值域：$(-\infty,+\infty)$，当 $a=\mathrm{e}$ 时，$y=\ln x$.

运算性质有：① $\log_a(x_1x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2$，$\log_a(x_1/x_2)=\log_a x_1-\log_a x_2$；

② $\log_a x^b=b\log_a x$；

③ $\log_a x=\log_b x/\log_b a$；

④ $a^{\log_a x}=x$.

5. 三角函数

三角函数包括：

正弦函数：$y=\sin x$，余弦函数：$y=\cos x$；

正切函数：$y=\tan x$，余切函数：$y=\cot x$；

正割函数：$y=\sec x$，余割函数：$y=\csc x$.

常用三角公式：

$\sin(-x)=-\sin x$，$\cos(-x)=\cos x$.

同角的三角函数的关系：

① $\sin^2 x+\cos^2 x=1$；② $\tan x=\sin x/\cos x=1/\cot x$；③ $\tan x\cdot\cot x=1$；

④ $1+\tan^2 x=\sec^2 x$；⑤ $1+\cot^2 x=\csc^2 x$；⑥ $\sin x\cdot\csc x=1$；

⑦ $\cos x\cdot\sec x=1$.

两角之和或差的三角函数：

① $\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y$；② $\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$.

倍角和半角的三角函数：

① $\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x$；② $\cos 2x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$.

三角函数的和与差：

$\sin x+\sin y=2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$；$\sin x-\sin y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$；

$\cos x+\cos y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$；$\cos x-\cos y=-2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$.

三角函数的乘积：

$\sin x\cdot\sin y=\dfrac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$；$\cos x\cdot\cos y=\dfrac{1}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)]$；

$\sin x\cdot\cos y=\dfrac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$；$\cos x\cdot\sin y=\dfrac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]$.

6. 反三角函数

反正弦函数：$y=\arcsin x$，定义域：$[-1,1]$，值域：$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

反余弦函数：$y=\arccos x$，定义域：$[-1,1]$，值域：$[0,\pi]$.

反正切函数：$y=\arctan x$，定义域：$(-\infty,+\infty)$，值域：$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

反余切函数：$y=\operatorname{arccot} x$，定义域：$(-\infty,+\infty)$，值域：$(0,\pi)$.

在高等数学里，相对于基本初等函数而言，更多的是遇到初等函数的问题. 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算所构成，并可用一个式子表示的函数称为**初等函数**.

例如，$y=2\sin x+3\cos x$，$y=\cos(\sin x)$，$y=\sin(\ln x)+x^2$.

在初等函数的定义中，明确指出是用一个式子表示的函数，若一个函数必须用几个式子表示（如分段函数），则它就不是初等函数，例如，

$$f(x)=\begin{cases}x & x>0;\\ \sin x & x\leqslant 0\end{cases}$$

就不是初等函数，称为非初等函数.

1.1.6 建立函数关系举例

为了解决应用问题，先要给问题建立数学模型，即建立函数关系，为此要明确问题中的因变量和自变量；再根据题意建立等式，从而得出函数关系；然后确定函数的定义域，求应用问题中的函数的定义域，除函数的解析式外，还要考虑变量在实际问题中的含义. 下面我们通过几个实例来介绍如何建立函数关系，为以后运用微积分解决实际问题打一些基础.

用函数思想解决几何（如平面几何、立体几何及解析几何）问题，这是常常出现的数学本身的综合运用问题.

【例 1－9】 如图 1－13 所示，一动点 P 自边长为 1 的正方形 $ABCD$ 的顶点 A 出发，沿正方形的边界运动一周，再回到 A 点. 若点 P 的路程为 x，点 P 到顶点 A 的距离为 y，求 A，P 两点间的距离 y 与点 P 的路程 x 之间的函数关系式.

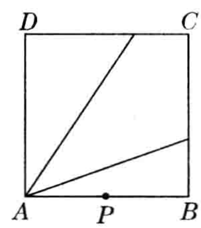

图 1－13

解 (1) 当点 P 在 AB 上，即 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$AP=x$，也就是 $y=x$.

(2) 当点 P 在 BC 边上，即 $1<x\leqslant 2$ 时，$AB=1$，$AB+BP=x$，$BP=x-1$，根据勾股定理，得 $AP^2=AB^2+BP^2$，所以

$$y=AP=\sqrt{1+(x-1)^2}=\sqrt{x^2-2x+2}.$$

(3) 当点 P 在 DC 边上，即 $2<x\leqslant 3$ 时，$AD=1$，$DP=3-x$. 根据勾股定理，得 $AP^2=AD^2+DP^2$，所以

$$y=AP=\sqrt{1+(3-x)^2}=\sqrt{x^2-6x+10}.$$

(4) 当点 P 在 AD 边上，即 $3<x\leqslant 4$ 时，有 $y=AP=4-x$，所以所求的函数关系式为

$$y=\begin{cases}x & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ \sqrt{x^2-2x+2} & 1<x\leqslant 2;\\ \sqrt{x^2-6x+10} & 2<x\leqslant 3;\\ 4-x & 3<x\leqslant 4.\end{cases}$$

【例 1－10】 已知 A，B 两地相距 150 公里，某人开汽车以 60 公里/小时的速度从 A 地到达 B 地，在 B 地停留一小时后再以 50 公里/小时的速度返回 A 地，将汽车离开 A 地的距离 x 表示为时间 t 的函数.

解 根据题意：

(1) 汽车由 A 到 B 行驶 t 小时所走的距离 $x=60t(0\leqslant t\leqslant 2.5)$；

(2) 汽车在 B 地停留 1 小时，则汽车离开 A 地的距离 $x=150(2.5<t\leqslant 3.5)$；

(3) 由 B 地返回 A 地，则汽车离开 A 地的距离 $x=150-50(t-3.5)=325-50t(3.5<t\leqslant 6.5)$. 总之