

世界科普巨匠经典译丛·第一辑

世界十大科普巨匠之一
别莱利曼系列
学习数理化的最佳
课外读物

青少年 科普图书馆

中国科学院院士 **叶叔华、郑时龄** 郑重推荐

● 一部比故事更有趣，比童话更神奇，比游戏更具吸引力的趣味科学启蒙书 ●

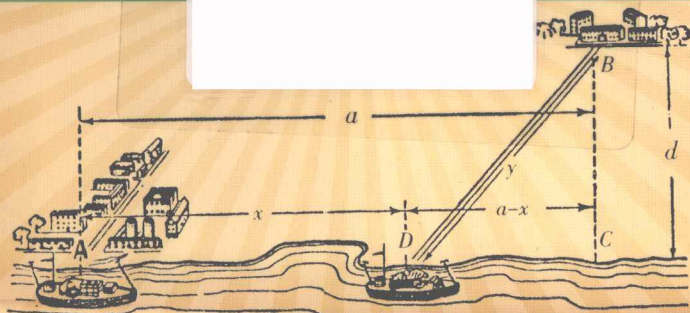
INTERESTING
ALGEBRA

趣味

代数学

(苏)别莱利曼/著

杨和胜/译



上海科学普及出版社

青少年 科普图书馆

世界科普巨匠经典译丛·第一辑

INTERESTING ALGEBRA

趣味

代数学

(苏) 别莱利曼 / 著 杨和胜 / 译

上海科学普及出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

趣味代数学 / (苏) 别莱利曼著; 杨和胜译. - 上海: 上海科学普及出版社,
2013.10

(世界科普巨匠经典译丛·第一辑)

ISBN 978-7-5427-5826-2

I. ①趣… II. ①别… ②杨… III. ①代数 - 普及读物 IV. ①O15-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 173918 号

责任编辑: 李 蕾

世界科普巨匠经典译丛·第一辑

趣味代数学

(苏) 别莱利曼 著 杨和胜 译

上海科学普及出版社

(上海中山北路 832 号 邮编 200070)

<http://www.pspsh.com>

各地新华书店经销 北京德美印刷厂

开本 787×1092 1/12 印张 16 字数 192 000

2013 年 10 月第 1 版 2013 年 10 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5427-5826-2 定价: 24.80 元

本书如有缺页、错装或损坏等严重质量问题
请向出版社联系调换

第1章 乘方和乘方的应用

1.1 认识乘方	2
1.2 天文学上的数字	3
1.3 地球质量是空气质量的多少倍	4
1.4 常温下的燃烧	5
1.5 理想中的天气变化	6
1.6 带密码的保险柜	7
1.7 有车牌号的自行车	8
1.8 用2累乘会出现什么情况	8
1.9 神奇的触发器	10
1.10 利用触发器进行计算	13
1.11 象棋到底有多少种棋局	15
1.12 自动弈棋机	16
1.13 三个2求最大值	18
1.14 三个3求最大值	19
1.15 三个4求最大值	19

1.16 三个相同的数求最大值	20
1.17 四个1求最大值	21
1.18 四个2求最大值	21

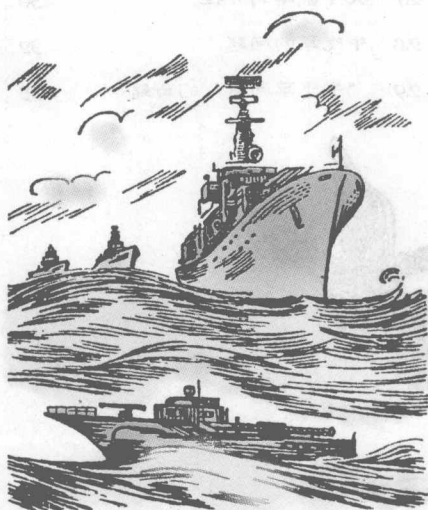
第2章 代数语言的相关知识

2.1 学习列方程	24
2.2 通过方程了解刁藩都的一生	25
2.3 拖着行李的马和骡子	26
2.4 四兄弟各有多少钱	26
2.5 鸟和鱼	27
2.6 两家之间的距离	29
2.7 关于割草的方程	30
2.8 牛吃草的问题	32
2.9 “牛吃草问题”的母题	35





2.10	时针和分针的对调问题	36
2.11	时针和分针的重合问题	39
2.12	猜数游戏	39
2.13	意料之外, 情理之中	42
2.14	年龄的倍数问题	43
2.15	方程中的奥秘	44
2.16	理发馆	45
2.17	无轨电车	46
2.18	过河问题	48
2.19	铁罐中的咖啡	48
2.20	元旦晚会	50
2.21	侦察船	50
2.22	自行车赛场	52
2.23	摩托车赛事	53
2.24	汽车的平均速度	55
2.25	用计算机解方程	56

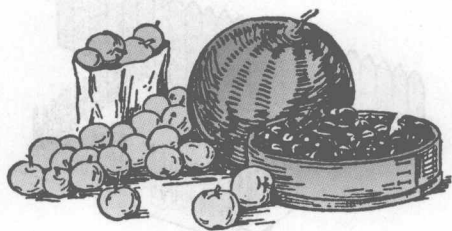


第3章 代数在算术中的应用

3.1	乘法的速算	66
3.2	末位是 1、5、6 的数	69
3.3	末位是 25 和 76	70
3.4	无限长的数	70
3.5	补差	73
3.6	能够被 11 整除的数	74
3.7	汽车的车牌号	76
3.8	能够被 19 整除的数	78
3.9	苏菲·热门定理	79
3.10	合数数列	80
3.11	质数的个数	82
3.12	已知的最大质数	82
3.13	非常重要的计算	83
3.14	有时算术比代数更简单	86

第4章 刁藩都方程的应用

4.1	买衬衣	88
4.2	商店中的账目盘点	91
4.3	买邮票问题	93
4.4	买水果问题	95



4.5 猜生日游戏	96
4.6 买鸡问题	98
4.7 求解二次方程	100
4.8 这是什么方形	101
4.9 成双成对的两位数	102
4.10 勾股数	103
4.11 求解三次方程	107
4.12 费马定理	110

第5章 开方

5.1 了解乘方的逆运算	114
5.2 两个数比较大小	115
5.3 一眼就能看出答案	116
5.4 开方中的滑稽剧	116

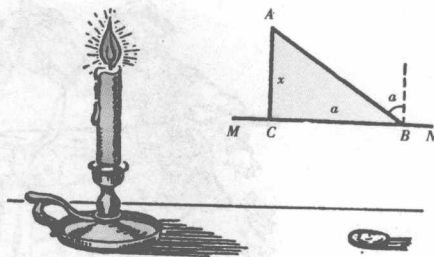
第6章 二次方程的应用

6.1 握手问题	120
6.2 有多少只蜜蜂	120
6.3 猴子的数量	121
6.4 方程的全面性	122
6.5 欧拉发明的习题	124

6.6 扬声器	126
6.7 天体的引力	127
6.8 画中的难题	130
6.9 三个连续的整数	132

第7章 最大值和最小值的应用

7.1 两列火车	134
7.2 站点的位置	136
7.3 修路问题	138
7.4 乘积的最大值	139
7.5 和的最小值	142
7.6 方梁	143
7.7 两块土地	144
7.8 风筝	145
7.9 建房	146
7.10 圈地	147
7.11 最大的侧面	149
7.12 漏斗的容量	151
7.13 蜡烛和硬币	152



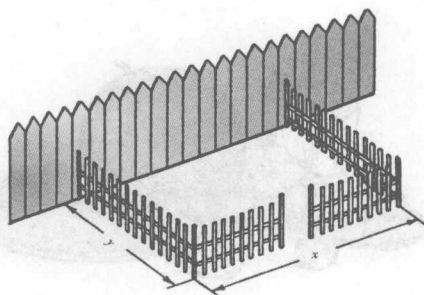


第8章 级数的相关知识

8.1 最早的级数	156
8.2 用方格纸表示级数	157
8.3 提水浇菜园	158
8.4 喂鸡问题	159
8.5 挖土队	160
8.6 卖苹果	162
8.7 买马	163
8.8 受伤军人得到的抚恤金	165

第9章 对数

9.1 对数的相关知识	168
9.2 四分之一平方表	169
9.3 对数表的发展	170
9.4 特殊的对数表	171
9.5 神奇的速算专家	172



9.6 对数在饲料中的应用	174
9.7 对数在音乐中的应用	175
9.8 对数在恒星和噪音中的应用	176
9.9 对数在照明中的应用	178
9.10 富兰克林的遗嘱	179
9.11 不断增长的资金	181
9.12 无理数 e	182
9.13 对数中的滑稽剧	184
9.14 三个二表示任意正整数	185



第1章



乘方和乘方的应用



1.1

认识乘方

代数和算术不同，它不仅有加减乘除这四种运算，还有乘方及乘方的两种逆运算。因此，代数又称为“有着七种运算的算术”。

我们的话题就从乘方开始说起。这种运算是怎么产生的呢？毋庸置疑，绝对与我们的实际生活有关。大家想一下，我们在计算面积或者体积的时候，不可避免地会用到平方或者立方（也就是二次方或者三次方）。另外，万有引力、静电作用和磁性作用，以及光和声的强弱都和距离的平方成反比。行星围绕恒星的旋转周期和行星与旋转中心的距离之间也是乘方的关系，即旋转周期的平方和中心距离的立方是正比关系。

通过上面的例子，大家也许会认为，在生活中我们只会用到平方和立方，但事实并非如此。例如，工程师在计算材料的强度时，经常会用到四次方；在计算蒸馏管的直径时，会用到六次方；研究水流的冲击力时，也会使用六次方。假如存在两条河，一条河中水流的速度是另一条河水流速度的3倍，那么，水流较快的河水对河床石头的冲击力就是水流较慢河水的 3^6 倍，也就是729倍。

在研究炽热物体（如白炽灯的灯丝）的亮度和温度的关系时，会用到更高次方的乘方。在白热的情况下，物体亮度增加的速度将是温度（这里所说的温度指“绝对温度”，从 -273°C 算起）增加速度的12次方倍；赤热的情况下，前者是后者的30次方倍。也就是说，如果物体的温度从2 000K升高到4 000K，那么，亮度将是原来的 2^{12} 倍，即4 000多倍。这种关系在电灯泡的制作过程中有着重要的意义，以后我们将会详细讲解。

①有关这方面的详细介绍见《趣味力学》第九章。



1.2 天文学上的数字

宇宙的观察者在研究天文学时，经常会碰到巨大的数字，这些数字通常被称为“天文数字”，它们只有一位或者两位的有效数字，后面是一大串零，写起来很不方便，尤其在计算的时候。例如，地球到仙女星的距离是：

95 000 000 000 000 000 000千米

在进行天文学方面的计算时，通常不会使用千米这么大的单位，而是用厘米表示两个天体之间的距离。于是，上面的数字就变成了：

9 500 000 000 000 000 000 000 000厘米

恒星的质量写起来更大，尤其是用克来表示的时候。太阳的质量用克来表示是：

1 983 000 000 000 000 000 000 000 000 000克

显然，用这么大的数字进行计算不仅麻烦，而且容易出错。况且，还有很多比我们列举的大得多的数字。

因此，引入乘方是十分必要的。因为数字1后面那一大串的零正好是10的某次方。例如：

$$100=10^2, 1\,000=10^3, 10\,000=10^4, \text{等等。}$$

上面所列举的巨大数字可以转化成下面的形式：

$$\text{第二个数字 } 95 \times 10^{23}; \text{ 第三个数字 } 1\,983 \times 10^{30}$$

这样做不仅便于书写，计算时也不容易出错。例如，计算第二个数与第三个数的乘积时，先计算出 $95 \times 1\,983 = 188\,385$ ，再计算 $10^{23+30} = 10^{53}$ 就行了，也就是：

$$95 \times 10^{23} \times 1\,983 \times 10^{30} = 188\,385 \times 10^{53}$$

这样，当然比写带着一长串零的数字相乘简单得多，计算也容易，结果的



书写也比写53个零要方便，而且不容易出错。因为在书写几十个零的时候，只要少写或者多写一个，结果就是错误的。

1.3

地球质量是空气质量的多少倍

把巨大的数字转化成乘方，不仅书写简单，而且容易计算。下面，我们来计算地球的质量是地球周围空气质量的多少倍。

大家都知道，地球表面每平方厘米的大气压约为1千克，即每平方厘米的地球表面要支撑1千克的大气柱。地球周围的空气就好像是由无数个大气柱组成，地球的表面积有多大，就有多少个这样的大气柱，大气层的重量就是多少千克。查阅一下资料，我们知道地球的表面积是51 000万平方千米，即 51×10^3 平方千米。

接下来，我们把平方千米转换成平方厘米。我们知道，1千米=1 000米，1米=100厘米，即1千米= 10^5 厘米，1平方千米= 10^{10} 平方厘米。因此，地球的总面积是：

$$51 \times 10^3 \times 10^{10} = 51 \times 10^{17} \text{ 平方厘米}$$

所以，包围着大气的总质量是 51×10^{17} 千克。

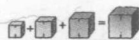
因为地球的质量是 6×10^{21} 吨，转换为千克是：

$$6 \times 10^{21} \times 10^3 = 6 \times 10^{24} \text{ 千克}$$

要求出地球的质量是地球周围空气质量的多少倍，两者相除就可以了：

$$6 \times 10^{24} \div (51 \times 10^{17}) \approx 10^6$$

所以，地球的质量是它周围大气质量的100万倍。



1.4

常温下的燃烧

木柴和煤在高温下才会燃烧，这是众所周知的事实。其实，碳元素和氧元素在任何温度下都会发生化合反应，只是在高温下反应激烈（参与反应的分子数目多），在常温及低温下反应缓慢（参与反应的分子数目少），人们观察不到而已。通过化学反应速度的定律可以知道：温度降低 10°C ，反应的速度（参与反应的分子数目）就会降低一半。

下面，我们把这个定律应用到木柴和氧的化合反应上，也就是观察木柴的燃烧过程。假设火焰的温度是 600°C ，1秒钟可以燃烧掉1千克木柴。那么，火焰的温度为 20°C 时，多长时间才可以燃烧掉1千克木柴呢？这时，温度降低了 580°C ，反应速度就会降低 2^{58} 倍。也就是说，在 20°C 的温度下，燃烧掉1千克木柴需要 2^{58} 秒。

那么， 2^{58} 秒是多少年呢？不用计算 2^{58} 等于多少，也不用借助对数表，利用下面的方法，我们可以算出大概值：

$$2^{10}=1\,024\approx 10^3$$

因此，

$$2^{58}=2^{60-2}=2^{60}\div 2^2=\frac{1}{4}\times 2^{60}=\frac{1}{4}\times (2^{10})^6\approx \frac{1}{4}\times 10^{18}$$

即，大约是百万万万秒的四分之一。一年的时间约是3 000万秒，也就是 3×10^7 秒，所以：

$$\left(\frac{1}{4}\times 10^{18}\right)\div (3\times 10^7)=\frac{1}{12}\times 10^{11}\approx 10^{10}$$

也就是100亿年，这就是1千克木柴在 20°C 下燃烧完所需要的时间。因此，木柴和煤在常温下也可以燃烧，只是需要的时间是高温时的几百亿倍。



1.5

理想中的天气变化

题

我们假设天气的变化只有阴天和晴天两种，在这种条件下，有不同天气变化的星期数是多少呢？

我们觉得星期数应该不多，两个月肯定能包括一个星期中阴天和晴天的各种组合；之后，出现的天气组合就会和前面的重复。

我们的想法是否正确呢？下面，我们就来计算一下，这种条件下会出现多少种不同的组合。这时，又会用到乘方的计算。

首先，我们看一下1周内晴天和阴天的各种组合。

解

1周的第一天有晴天和阴天两种情况，那么，1周前两天的天气变化情况就是这样的：

晴天和晴天

晴天和阴天

阴天和晴天

阴天和阴天

两天内天气变化的种类是 2^2 种。那么，三天内呢？第三天的两种天气可以和前两天的情况任意组合，因此三天内的变化种类是 $2^2 \times 2 = 2^3$ 。

以此类推，四天内的天气变化的种类是 2^4 ，五天是 2^5 ，1周就是 $2^7 = 128$ 。

因为1周内的天气变化情况是128种，128个星期有 $7 \times 128 = 896$ 天，也就是说896天之后，再出现的一个星期的天气组合肯定会和前面的某一种相同。当然，重复的情况可能会出现得更早，但896是一个期限，这个期限一过，重复就是必然的。反过来说也对，两年多（两年零166天，即896天）的时间里，每个星期的天气变化可能都不相同。

1.6

带密码的保险柜

题 某一机关内发现了一个很久之前遗留下来的保险柜，找到了钥匙，但遗失了密码。保险柜上有5个环，每个环上有36个字母，密码是5个环上的字母组成的一个单词。为了打开保险柜，决定逐一去对环上的字母，每对一个组合需要3秒钟。请问：10个工作日能打开这个保险柜吗？

解 我们来计算一下，这些字母一共有多少种组合。

第一个环上的36个字母可以和第二个环上的36个字母任意组合，两个字母组合的种类是：

$$36 \times 36 = 36^2$$

第三个环上的36个字母又可以和上面的每一种情况进行组合，因此3个环上字母的组合种类是：

$$36^2 \times 36 = 36^3$$

由此可知，4个环上字母组合的种类是 36^4 ，5个环就是 36^5 ，也就是60 466 176种。

由于每对一个组合需要3秒钟的时间，对完全部的组合需要的时间是：

$$3 \times 60\,466\,176 = 181\,398\,528 \text{ 秒}$$

转换成小时是50 000多个，一个工作日按8个小时计算，需要约6 300个工作日，约20年的时间。

这就是说，10个工作日内打开保险柜的可能性只有 $\frac{1}{630}$ ，显然打开的几率是很小的。

1.7

有车牌号的自行车

题

以前，自行车也有车牌号，这个号码由六位数字组成。在自行车这个行业，有一件众所周知的事情，“8”是一个倒霉的数字。有个人想买一辆自行车，希望车牌号上的每一位数都不是倒霉的数字“8”。在路上他一直安慰自己，数字是由0~9组成的，碰上8的几率只有十分之一，我不会这么倒霉的。大家想一下，他判断的正确吗？

解

车牌号一共有999 999个，从000 001~999 999。我们来计算一下，“幸运”的车牌号有多少个。第一位上有9个“幸运”数字，也就是除去8的所有数字。第二位上也有9个“幸运”数字。因此，前两位上“幸运”数字的组合是 $9 \times 9 = 9^2$ 个。第三位上的9个“幸运”数字可以和上面的每一种情况进行组合，所以前三位上的“幸运”组合是 $9 \times 9^2 = 9^3$ 个。

以此类推，六位数字的“幸运”组合是 9^6 个。不过，这里面包括了000 000这个空号，应该减去。因此，自行车的“幸运”车牌号有 $9^6 - 1 = 531\,440$ 个，大约占了所有车牌号的53%，而不是买车人希望的90%。

如果车牌号是由七位数字组成的，那么，“倒霉”的车牌号要比“幸运”的车牌号还多，请大家自己去计算一下。

1.8

用2累乘会出现什么情况

2是一个很小的数字，如果用来累乘，就会迅速增大。国际象棋发明人的故事是一个经典，更是一个家喻户晓的例子。现在，我们来看一些大家不

熟悉的事例。

题 一个草履虫每隔27小时分裂一次，假如以此繁衍的后代都能存活，想要繁殖后草履虫的体积和太阳的体积一样大，需要分裂多少次，又需要多长时间呢？

已知：一个草履虫分裂40次后，所占的体积是1立方米；太阳的体积是 10^{27} 立方米。

解 问题可以归纳为，1立方米要用2累乘多少次，才可以变成 10^{27} 立方米这么大的体积。由于 $2^{10} \approx 1\,000$ ，因此 10^{27} 可以写成：

$$10^{27} = (10^3)^9 \approx (2^{10})^9 = 2^{90}$$

也就是说，一个草履虫分裂40次后，再分裂90次，它的体积就和太阳的体积一样大。如果从开始算起，一共需要分裂130次。我们可以算出，最后一次分裂发生在第147天。

曾经，有一个微生物学家研究草履虫，亲自观察了一个草履虫分裂了8061次。你来算一算，如果这些草履虫能够全部存活，最后的体积是多大呢？

前面的问题也可以反过来问：

假如把太阳平均分成两半，再把其中的一半平分成两半，一直分下去，平分多少次后得到的太阳粒子和一个草履虫的体积一样大呢？

虽然你已经知道了答案是130次，还是会因为这个数字而惊讶不已，它实在太小了。

再来看一个类似的例子：

把一张纸对折后剪开，得到的半张纸再对折剪开，一直这样剪下去，裁剪多少次后得到的纸张和原子一样大？

假设一张纸的重量是1克，原子的重量是 10^{-24} 克。因为 10^{24} 可以用近似值 2^{80} 来代替，答案显然是80次，而不是大家所认为的成百上千万次。



1.9

神奇的触发器

有一种电子装置叫触发器，由两个电子管（类似于收音机的电子管）组成。电流在触发器中通过时只能通过其中的一个电子管，左边的电子管或者右边的电子管。触发器上有四个接触点，其中两个用来从外部输入短暂的电信号（脉冲），另外两个输出触发器的应答脉冲。外部输入电信号的那一瞬间，触发器会发生翻转；原来导通的电子管关闭，电流通过另一个电子管。当右边的电子管关闭，左边的电子管导通时，触发器就会输出应答脉冲。

连续输入几个电信号，触发器会怎样工作呢？我们依据右边的电子管来判断触发器的状态：电流通过右边的电子管时，触发器处于“状态1”；电流不通过右边的电子管时，触发器处于“状态0”。

假如触发器开始是状态0，也就是电流不通过右边的电子管（图1-1）。第一个电信号通过后，电流就会通过右边的电子管，触发器发生翻转，变成状态1。这时，触发器不输出应答脉冲，因为电流通过左边的电子管时才输出应答脉冲。

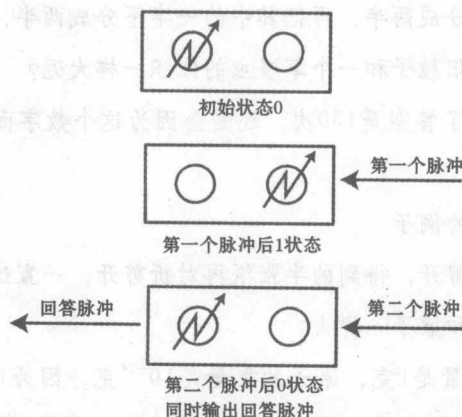


图 1-1