大学物理
学习指导与题解

郭　龙　罗中杰　魏有峰　主编

清华大学出版社

大学物理

学习指导与题解

郭　龙　罗中杰　魏有峰　主编

清华大学出版社
北　京

内容简介

本书涵盖了大学物理(工科类)的基本内容,包括力学、电磁学、热学、振动与波、光学、近现代物理基础等.每章由知识概要、典型题解、巩固练习三部分组成.知识概要力求对所对应章节的理论线条、知识点的提取、概念的描述准确无误;典型题解力求经典而独特,从整体着手,期望为举一反三埋下伏笔;巩固练习包含思考题、填空题和计算题,从思维理解训练到习题分析实战训练来提高学生对大学物理基础知识的理解和掌握.

本书可供工科院校师生使用,也可作为其他非物理专业及成人自学考试的教辅用书.

版权所有,侵权必究.侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

大学物理学习指导与题解/郭龙,罗中杰,魏有峰主编.--北京:清华大学出版社,2015
ISBN 978-7-302-41490-2

Ⅰ.①大… Ⅱ.①郭… ②罗… ③魏… Ⅲ.①物理学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O4

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第215738号

责任编辑:邹开颜
封面设计:常雪影
责任校对:赵丽敏
责任印制:李红英

出版发行:清华大学出版社
网　　址:http://www.tup.com.cn,http://www.wqbook.com
地　　址:北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**:100084
社 总 机:010-62770175　　**邮　　购**:010-62786544
投稿与读者服务:010-62776969,c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈:010-62772015,zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者:清华大学印刷厂
经　　销:全国新华书店
开　　本:185mm×260mm　　**印　　张**:22.25　　**字　　数**:541千字
版　　次:2015年9月第1版　　**印　　次**:2015年9月第1次印刷
印　　数:1~4200
定　　价:38.00元

产品编号:066166-01

编 委 会

主编：郭　龙　罗中杰　魏有峰

编委：杨　勇　何开华　王希成

吕　涛　陈　刚　程永进

张光勇　龙光芝　汤型正

韩艳玲　陈琦丽　万　森

前言

大学物理课程是高等工科院校一门重要的基础理论课程，它以物理学基础知识为主要内容，其内容的层进性决定了其在培养学生逻辑思维能力以及自主学习能力中的作用和地位. 然而，不少工科大学生在学习大学物理课程中普遍感到物理学内容繁杂、概念繁多、公式复杂且理解不易，在做题过程中感到束手无策，认为物理难学. 如何才能学好物理学呢？厚积薄发、举一反三似乎是放之四海而皆准的学习教条.

本书将配合大学物理课程从物理学基础知识的逻辑性和层进性来引导学生"厚积薄发"和"举一反三". 在对大学物理知识概述和例题解析的过程中，注重对相应章节知识的主线的提炼（基本问题剖析）以及对相应题解的思路点拨. 我们期望帮助学习者深入理解和掌握大学物理的基本概念、基本物理规律，进一步培养和提高学习者发现问题、分析问题和解决问题的能力，充分发挥大学物理学作为一门重要基础课程所起的作用.

全书按知识模块共分为 21 章，基本涵盖了大学物理的全部内容，包括力学、电磁学、热学、振动与波、光学、近现代物理基础等. 每一章节包含知识概要、典型题解和巩固练习三大部分. 知识概要力求做到概念、规律描述和理解的精准性；典型题解既体现了大学物理学的基本思想，又具有举一反三、启迪智慧、提高学习者解决实际问题的能力；巩固练习是对典型题解的深化，难易适中，为学习相应知识点提供练习和检查学习效果，以便查漏补缺. 总之，本书注重物理知识的系统性和递进性，注重培养学生的学习思维方式的转变，着眼于培养学习者的自主学习能力.

本书是各位编者结合多年的教学实践和研究而共同编写的一本大学物理学习教辅教材. 本书在编写过程中参考了若干现有的教材和教辅材料，为本书的顺利编写以及自有体系的形成提供了不菲的帮助，难以逐一指明，在此一并表示感谢！

由于编者水平所限，书中定有不妥甚至错误之处，诚望读者批评指正.

编　者

2015 年 7 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目录

第1章 质点运动学

一、知识概要

本章基本内容：如何描述物体的运动状态？在运动学中，物体的运动状态是用位矢随时间的变化（运动学方程）来描述的. 而物体位矢变化快慢则用速度来描述，运动速度的变化快慢则用加速度来描述. 通过位矢、速度和加速度等物理概念的引入，加深对物体运动的相对性、瞬时性和矢量性等基本性质的认识.

1. 物质运动的绝对性与运动描述的相对性

世界是物质的，物质是运动的，运动是物质的根本属性和存在方式. 从哲学的意义看来，运动是绝对的，而在自然界中，描述物体的运动又是相对的. 通常所说的物体静止，是指该物体相对于选定的参照物而言的. 所选参照物不同，对同一物体运动的描述形式也不同，这称为运动描述的相对性. 运动与静止的关系是符合辩证统一规律的.

2. 参考系

参考系为描述物体运动而选定的作为参照的物体系统. 参考系的选取是任意的. 恰当地选择参考系有助于对运动的简约描述，如地心说与日心说之争.

3. 坐标系

坐标系为固定于参考系之上的度量系统（为一套完备积），用于定量描述运动物体的空间位置. 常用的坐标系有直角坐标系、柱坐标系、极坐标系、球坐标系和自然坐标系等. 恰当地选择坐标系有助于研究运动问题的简化.

4. 质点

质点是对物体抽象描述的理想模型，这是大学物理研究物体运动的理想模型之一. 在大学物理学习过程中一般都可将物体的运动看作质点的运动，除非特别指出该物体不能看作质点. 其忽略了物体的形状、大小等次要因素对研究物体运动的影响. 一个物体是否可抽象为质点取决于该物体的形状、大小等因素是否对物体的运动描述产生重要影响.

5. 位矢（位置矢量）

位矢为描述质点空间位置的物理量. 如图 1.1 所示，质点 P 的位矢是指从坐标原点指向该质点当前所在位置的有向线段，用矢量描述为

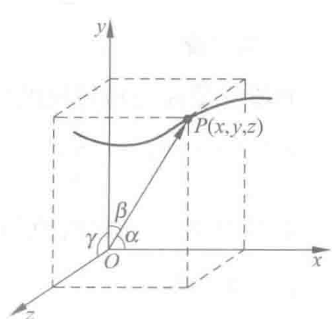

图 1.1

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

大小：

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

方向：

$$\cos\alpha = \frac{x}{r},\quad \cos\beta = \frac{y}{r},\quad \cos\gamma = \frac{z}{r}$$

6. 运动学方程和轨道方程

运动学方程指运动质点位置(位矢)随时间变化的关系式,它是描述质点运动的核心方程.

直角坐标系下运动学方程的矢量式：

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$

分量式：

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t)$$

轨道方程描述物体运动在空间留下的轨迹(痕迹).求解过程中将运动学方程中的时间因子 t 消去即得轨道方程：$f(x,y,z)=0$.

7. 位移矢量

如图 1.2 所示,位移矢量描述物体 t 时刻由 A 点经时间间隔 Δt 运动到 B 点而引起的物体位矢的增量：

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$$

位移的合成遵循矢量运算的平行四边形法则.

位移和路程的区别是：若始末位置定,位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 为单值,而路程 Δs 为多值,即 $|\Delta\boldsymbol{r}| \neq \Delta s$.

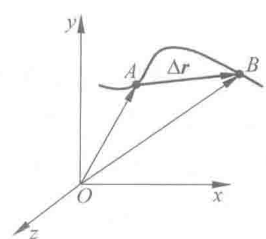

图 1.2

8. 速度

速度是描述物体运动快慢的物理量,即单位时间内物体位矢的增量.

平均速度：$\bar{\boldsymbol{v}} = \dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$；平均速率：$\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

一般情况下,$|\bar{\boldsymbol{v}}| \neq \bar{v}$.

瞬时速度(通常所说的速度)：$\boldsymbol{v} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$

瞬时速率：$v = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$

9. 加速度

加速度是描述物体速度变化快慢的物理量,即单位时间内速度的增量.

平均加速度：$\bar{\boldsymbol{a}} = \dfrac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$

瞬时加速度(通常所说的加速度)：$\boldsymbol{a} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$

在直角坐标系下,

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}$$

注意区分平均速度和瞬时速度，平均加速度和瞬时角速度. 在处理问题过程中，除非特别说明分析物体运动的平均速度和平均加速度，一般指分析物体运动的瞬时速度(速度)和瞬时加速度(加速度).

10. 运动学中的两类基本问题——这是本章学习的重点

已知物体的运动学方程求物体的速度和加速度(微分)，求位移(矢量差)和求轨迹方程(消去时间因子 t)；

已知物体的加速度求其速度和运动学方程(积分)，这里需要已知物体运动的初始条件. 初始条件的形式一般为：t_0 时刻运动物体所处的位矢 $\boldsymbol{r}_0$ 及其速度 $\boldsymbol{v}_0$.

11. 自然坐标系下平面曲线运动的描述

任意曲线可视为有许多弯曲程度不同的小圆弧组成，各圆弧都对应其相应的圆、圆心和半径，分别称为曲率圆、曲率中心和曲率半径 ρ. 曲率半径越小，说明曲线弯曲程度越大，$\dfrac{1}{\rho}$称为曲率. 质点在曲线上某点 P 的运动可看作该质点在 P 点所在处的曲率圆上的运动，如图 1.3 所示.

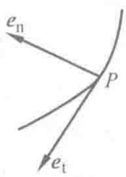

图 1.3

自然坐标系是建立在质点运动轨道上的坐标系. 自然坐标系的两个单位矢量为切向单位矢量和法向单位矢量. 切向单位矢量定义为质点所在点的轨迹的切线方向，其正方向规定为该质点在此处的速度方向；法向矢量定义为垂直于该点的切向单位矢量而指向曲线凹侧的单位矢量.

在自然坐标系中，质点的速度沿着切线方向(称为线速度)：$\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\tau$，加速度可分解为切向加速度 $\boldsymbol{a}_t$ 和法向加速度 $\boldsymbol{a}_n$.

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{a}_t=a_n\boldsymbol{n}+a_t\boldsymbol{\tau}$$

其中，$a_n=\dfrac{v^2}{\rho}$，$a_t=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

12. 圆周运动——最简单的曲线运动

描述圆周运动时，可引入角位置 θ，角位移 $\Delta\theta$，角速度 ω 和角加速度 β 等角量.

角位置：$\theta=\dfrac{s}{R}$，角位移：$\Delta\theta=\dfrac{\Delta s}{R}$

角速度：$\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$，角加速度：$\beta=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$

描述圆周运动的速度一般采用线速度来描述. 线速度大小为质点沿圆周运动的速率 $v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，方向沿着轨迹的切线方向.

线速度和角速度之间的关系：$v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=R\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=R\omega$

切线加速度与角加速度之间的关系：$a_t=\beta R$

13. 相对运动(伽利略变换——绝对时空观)

$$\boldsymbol{r}_{A对O}=\boldsymbol{r}_{A对O'}+\boldsymbol{r}_{O'对O}$$
$$\boldsymbol{v}_{A对O}=\boldsymbol{v}_{A对O'}+\boldsymbol{v}_{O'对O}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\boldsymbol{a}_{A对O} = \boldsymbol{a}_{A对O'} + \boldsymbol{a}_{O'对O}$$

二、典型题解

解题思路点拨：在求解质点运动问题过程中，首要考虑的是坐标系的选取和构建，这归因于我们描述物体运动的相对性和分析问题的简易性. 然后对质点运动进行分解分析和整体分析相结合. 最后，恰当地理解其所涉及的物理量，分别对分解分析和整体分析利用恰当的物理规律构建方程，寻求数学解决方案. 在本章中，重点考虑的物理量有位矢、位移、速度和加速度；方程为运动学方程和轨迹方程.

例 1.1 已知某人从原点出发，20s 内向东 30m，又 10s 内向南 10m，再 10s 向西北 18m，如图 1.4 所示. 试求：

(1) 合位移的大小和方向；

(2) 求各分位移的平均速度、合位移的平均速度及全路程的平均速率.

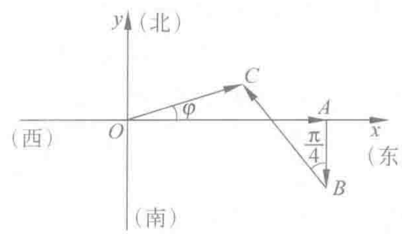

图 1.4

解 (1) 合位移(重点考察矢量加法运算的平行四边形法则或三角形法则)

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 30\boldsymbol{i} + (-10)\boldsymbol{j} + 18\left(-\cos\frac{\pi}{4}\boldsymbol{i} + \sin\frac{\pi}{4}\boldsymbol{j}\right) = 12.27\boldsymbol{i} + 2.73\boldsymbol{j}$$

合位移的大小 $\quad |\overrightarrow{OC}| = \sqrt{12.27^2 + 2.73^2} = 17.48(\text{m})$

合位移的方向 $\quad \varphi = \arctan\dfrac{2.73}{12.27} = 8$(东偏北)

(2) 平均速度和平均速率(区分物理量矢量和标量运算的差别，以及在运算过程中物理量之间的对应关系)

$$\overline{\boldsymbol{v}_1} = \frac{\overrightarrow{OA}}{t_1} = \frac{30}{20}\boldsymbol{i} = 1.5\boldsymbol{i}(\text{m/s})$$

$$\overline{\boldsymbol{v}_2} = \frac{\overrightarrow{AB}}{t_2} = \frac{-10}{10}\boldsymbol{j} = -1.0\boldsymbol{j}(\text{m/s})$$

$$\overline{\boldsymbol{v}_3} = \frac{\overrightarrow{BC}}{t_3} = \frac{18\left(-\cos\frac{\pi}{4}\boldsymbol{i} + \sin\frac{\pi}{4}\boldsymbol{j}\right)}{10} = \left(-\frac{9\sqrt{2}}{10}\right)\boldsymbol{i} + \frac{9\sqrt{2}}{10}\boldsymbol{j}(\text{m/s})$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{\overrightarrow{OC}}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{17.27\boldsymbol{i} + 2.73\boldsymbol{j}}{40} = 0.43\boldsymbol{i} + 0.07\boldsymbol{j}(\text{m/s})$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{30 + 10 + 18}{t_1 + t_2 + t_3} = 1.45(\text{m/s})$$

例 1.2 已知一质点在 xOy 平面内运动，运动方程为 $x=2t, y=19-2t^2$. 求：

(1) 质点的运动轨道，并绘图；

(2) 第 1s 到第 2s 质点的平均速度；

(3) 质点的速度和加速度；

(4) 在什么时刻位置矢量恰好和速度矢量垂直？这时它们的 x, y 分量各是多少？

(5) 什么时刻质点离原点最近？并算出这一距离.

解　(1)(轨迹方程为由于质点运动而在空间留下的痕迹，与时间无关，因此，只需消去运动学方程中的时间因子即可.)

已知质点运动方程

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 19 - 2t^2 \end{cases}$$

消去时间 t，得

$$y = 19 - \frac{1}{2}x^2$$

轨道为顶点(0,19)的抛物线，如图 1.5 所示.

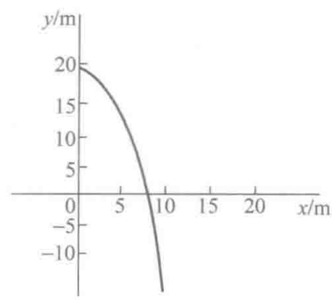

图　1.5

(2)(这里考察对平均速度概念的理解，注意物理量的对应关系. 例如本问题中第 1s 到第 2s 时间段 Δt 所对应的位移 $\Delta \boldsymbol{r}$.)

位矢 $\boldsymbol{r}=2t\boldsymbol{i}+(19-2t^2)\boldsymbol{j}$，第 1s 到第 2s 的平均速度

$$\bar{v} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{r}(2)-\boldsymbol{r}(1)}{2-1} = 2\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j}$$

大小　$$|\bar{\boldsymbol{v}}| = \sqrt{2^2+6^2} = 6.32(\text{m/s})$$

方向　$$\varphi = \arctan\frac{-6}{2} = -71.6°(x\text{ 方向偏}-y)$$

(3)(这里考察对速度概念的理解，可理解为质点运动位矢对时间的微分.)

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} = 2\boldsymbol{i} - 4t\boldsymbol{j}\,(\text{m/s})$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = (-4)\boldsymbol{j}\,(\text{m/s}^2)$$

(4)(考察两物理矢量之间的乘积特殊运算关系：两矢量点积为零意味着这两个矢量相互垂直；两矢量叉积为零意味着这两个矢量相互平行.)

$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}=0$，即

$$[2t\boldsymbol{i} + (19-2t^2)\boldsymbol{j}]\cdot(2\boldsymbol{i} - 4t\boldsymbol{j}) = 0$$

解得　$$t=0\text{s},\quad t=3\text{s},\quad t=-3\text{s(舍去)}$$

$t=0$s 时，有　$$\begin{cases} x=0 \\ y=19\text{m} \end{cases}\qquad \begin{cases} v_x=2\text{m/s} \\ v_y=0 \end{cases}$$

$t=3$s 时，有　$$\begin{cases} x=6\text{m} \\ y=1\text{m} \end{cases}\qquad \begin{cases} v_x=2\text{m/s} \\ v_y=-12\text{m/s} \end{cases}$$

(5)(极值问题：利用数学微积分求极值方法. 若求某一物理量的极值，且该物理量是另一变量的函数(例如 $r(t)$)，则直接求该物理量对变量的一阶微分等于零的方程即可.)

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(2t)^2+(19-2t^2)^2}$$

令　$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{8t+2(19-2t^2)(-4t)}{2r} = 0$$

解得

$$t=0,\quad t=3\text{s},\quad t=-3\text{s(舍去)}$$

经判断知 $t=3\text{s}$ 时，r 有极小值且 $r_{\min}=6.08\text{m}$.

例 1.3 一质点的曲线运动方程为 $x=R\cos\omega t, y=R\sin\omega t$，式中 R,ω 为常数. 求质点对坐标系的矢径、轨道方程、速度、加速度、切向加速度和法向加速度.

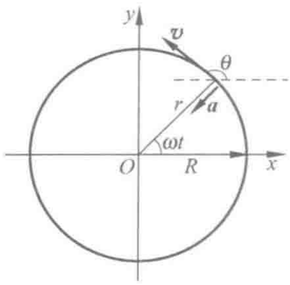

图 1.6

解 如图 1.6 所示，取直角坐标系 xOy.

(1) 位置矢量

$$\boldsymbol{r}=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}=(R\cos\omega t)\boldsymbol{i}+(R\sin\omega t)\boldsymbol{j}$$

$$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2}=R$$

$$\tan\varphi=\frac{y}{x}=\frac{R\sin\omega t}{R\cos\omega t}=\tan\omega t$$

(2) 轨道方程为

$$x^2+y^2=R^2(\cos^2\omega t+\sin^2\omega t)=R^2$$

此轨道是一圆周线.

(3)
$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=(-R\omega\sin\omega t)\boldsymbol{i}+(R\omega\cos\omega t)\boldsymbol{j}$$

$$v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{R^2\omega^2\sin^2\omega t+R^2\omega^2\cos^2\omega t}=R\omega$$

$$\tan\theta=\frac{v_y}{v_x}=\frac{R\omega\cos\omega t}{-R\omega\sin\omega t}=-\cot\omega t$$

解得 $\theta=\omega t+\frac{\pi}{2}$，说明 $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{r}$.

(4) $\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=(-R\omega^2\cos\omega t)\boldsymbol{i}+(-R\omega^2\sin\omega t)\boldsymbol{j}=-\omega^2\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 反向.

$$a=|\boldsymbol{a}|=R\omega^2$$

(5) 切向加速度和法向加速度(考察自然坐标系中加速度概念的理解，以及该加速度与质点运动的速率以及运动半径之间的关系.)

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0,\quad a_n=\frac{v^2}{R}=R\omega^2$$

上式说明：加速度不改变大小，仅改变方向.

例 1.4 长度为 a 的梯子 AB 静靠在垂直墙 OA 上，如图 1.7 所示. 若以匀速率 v_0 拉动梯脚 B.

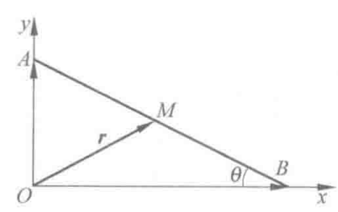

图 1.7

(1) 证明梯子中点所描述的运动轨道是以 O 点为中心，半径为$\frac{a}{2}$的圆弧.

(2) 求梯脚 B 离墙的距离为 $b(b<a)$ 的瞬间，梯子中点的速度和速率.

解 (1)(该问实则求点 M 的轨迹方程，只需求出点 M 的运动方程即可；要求点 M 的运动方程，只需求出点 M 的位矢(点 M 的坐标).)

设 $\boldsymbol{r}$ 为 AB 中点 M 的位置矢量，则

$$\overrightarrow{OB}=a\cos\theta\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OA}=a\sin\theta\boldsymbol{j}$$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=a\cos\theta\boldsymbol{i}-a\sin\theta\boldsymbol{j}$$

$$r = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}a(\cos\theta \boldsymbol{i} + \sin\theta \boldsymbol{j})$$

所以 $|\boldsymbol{r}| = \frac{1}{2}a$，即 M 点的运动轨迹是圆心在 O 点，半径为 $\frac{1}{2}a$ 的圆弧.

(2)（注意速度和速率的概念区别）

中点 M 的速度

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}a(\cos\theta \boldsymbol{i} + \sin\theta \boldsymbol{j})\right] = \frac{1}{2}a\left(-\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}\right)$$

对梯脚 B 的速度 v_B，有

$$v_B \boldsymbol{i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{OB} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a\cos\theta \boldsymbol{i}) = -a\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}$$

$$v_B = -a\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, \quad 即 \quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\frac{v_B}{a\sin\theta} = \frac{-v_B}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

在 B 离墙的距离为 b 的瞬间，

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

因此，所求 M 点的速度

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}v_B\left(\boldsymbol{i} - \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}\boldsymbol{j}\right)$$

速率
$$v = |\boldsymbol{v}| = \frac{a v_B}{2\sqrt{a^2 - b^2}}$$

例 1.5　高为 h 的平台上，有一质量为 m 的小车，用绳子跨过滑轮，在地面上以匀速度 v_0 向右拉动，如图 1.8 所示. 求当绳端 A 距平台距离为 x 时，小车的速度和加速度.

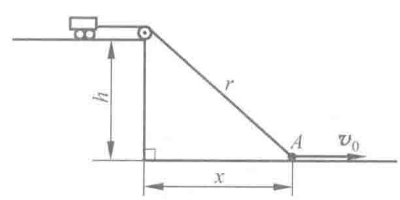

图　1.8

解　由图 1.8 可知

$$r^2 = h^2 + x^2$$

两边对时间 t 求导，得

$$2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v$，即为小车的速度. $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0$，所以小车的速度

$$v = \frac{x}{r}v_0 = \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}}v_0$$

小车的加速度

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{v_0^2 h^2}{(h^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

例 1.6　一质点由静止开始做直线运动，初始加速度为 a_0，其后加速度均匀增加，每经过 s 秒增加 a_0. 求质点的速度和位移.

解　由题意可知，加速度和时间的关系为 $a = a_0 + \frac{a_0}{s}t$，代入加速度定义 $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，分离变

量并积分有

$$\int_0^v \mathrm{d}v = \int_0^t \left(a_0 + \frac{a_0}{s}t\right)\mathrm{d}t$$

故质点速度

$$v = a_0 t + \frac{a_0}{2s}t^2 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

由此知

$$\int_0^x \mathrm{d}x = \int_0^t \left(a_0 t + \frac{a_0}{2s}t^2\right)\mathrm{d}t$$

故质点位移

$$x = \frac{a_0}{2}t^2 + \frac{a_0}{6s}t^3$$

例 1.7 大炮以 v_0 的初速率从山脚向仰角为 α 的斜坡发射时，若要射程最大，求瞄准角应满足的条件(不计空气阻力).

解 如图 1.9 所示，选取适当坐标系，可写出如下运动方程：

$$x = v_0 t\cos\theta - \frac{1}{2}gt^2\sin\alpha \qquad (1)$$

$$y = v_0 t\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2\cos\alpha \qquad (2)$$

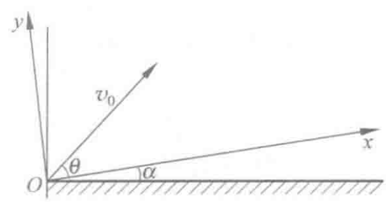

图 1.9

令(2)式中 $y=0$，解得 $t=\dfrac{2v_0\sin\theta}{g\cos\alpha}$，即完成射程所需时间. 将其代入(1)式，得

$$x = v_0\cos\theta\,\frac{2v_0\sin\theta}{g\cos\alpha} - \frac{1}{2}g\sin\alpha\left(\frac{2v_0\sin\theta}{g\cos\alpha}\right)^2 = \frac{2v_0^2}{g\cos^2\alpha}[\cos(\theta+\alpha)\sin\theta]$$

令

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \frac{2v_0^2}{g\cos^2\alpha}[-\sin(\theta+\alpha)\sin\theta + \cos(\theta+\alpha)\cos\theta] = \frac{2v_0^2}{g\cos^2\alpha}\cos(2\theta+\alpha) = 0$$

解得

$$2\theta+\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad 2\theta+\alpha = \frac{3\pi}{2}(\text{舍去})$$

即当 θ 满足 $\theta=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}$ 时，射程最大.

例 1.8 一质点从静止出发沿半径 $R=3\mathrm{m}$ 的圆周运动，已知切向加速度 $a_t=3\mathrm{m/s^2}$. 求：

(1) 经多长时间总加速度恰好与半径成 45°角?

(2) 上述时间内质点经过的路程和角位移.

解 由题意知 $t=0, v_0=0, a_t=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=3$，故有

$$\int_0^v \mathrm{d}v = \int_0^t 3\mathrm{d}t$$

得

$$v=3t$$

则质点的法向加速度

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{9t^3}{3} = 3t^2$$

所以质点总加速度

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_t = 3t^2\boldsymbol{n} + 3\boldsymbol{\tau}$$

（1）总加速度与半径成 45°角时，$a_n=a_t$，即 $3t^2=3$，故 $t=1\text{s}$ 时总加速度恰好与半径成 45°角.

（2）由速率定义 $v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，且 $t=0, s=0$，有

$$\int_0^s \mathrm{d}s=\int_0^t 3t\mathrm{d}t$$

解得

$$s=\frac{3}{2}t^2$$

当 $t=1\text{s}$ 时，质点经过的路程 $s=\frac{3}{2}\times 1^2=1.5(\text{m})$，角位移 $\Delta\theta=\frac{s}{R}=\frac{1.5}{3}=0.5(\text{rad})$.

例 1.9　如图 1.10 所示，在湖面上以 3m/s 的速度向东行驶的 A 船上，看到 B 船以 4m/s 的速度从北面驶近 A 船.求：

（1）在湖岸上看，B 船速度如何？

（2）如果 A 船的速度为 6m/s(方向不变)，在 A 船上看 B 船的速度又为多少？

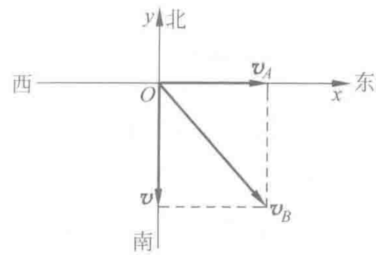

图　1.10

解　（1）A 船相对于岸的速度 $\boldsymbol{v}_A=3\boldsymbol{i}\text{m/s}$，$B$ 船相对于 A 船的速度 $\boldsymbol{v}=(-4)\boldsymbol{j}\text{m/s}$，用 $\boldsymbol{v}_B$ 表示 B 船相对于岸的速度，依据速度合成规律，有

$$\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_A=3\boldsymbol{i}+(-4)\boldsymbol{j}$$

故

$$v_B=|\boldsymbol{v}_B|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5(\text{m/s})$$

$\tan\theta=\frac{-4}{3}$，$\theta=53.1°$，即方向为东偏南 53.1°.

（2）依题意 $\boldsymbol{v}_{A'}=6\boldsymbol{i}\text{m/s}$，此时 A 船上看 B 船的速度

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_B-\boldsymbol{v}_{A'}=[3\boldsymbol{i}+(-4)\boldsymbol{j}]-6\boldsymbol{i}=(-3)\boldsymbol{i}+(-4)\boldsymbol{j}$$

故

$$v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5(\text{m/s})$$

$\tan\theta=\frac{-4}{-3}$，$\theta=53.1°$，即方向为西偏南 53.1°.

例 1.10　一质点作半径为 R 的圆周运动，其运动方程为 $\theta=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}t^2$，求其角加速度及切向加速度.

解　（本题考查圆周运动的角量描述以及角量和线量关系.）

已知质点运动方程 $\theta=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}t^2$，可求其角速度 ω 为

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=t$$

其角加速度为

$$\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=1$$

由切向加速度与角加速度关系 $a_t=R\beta$，可得

$$a_t=R$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com