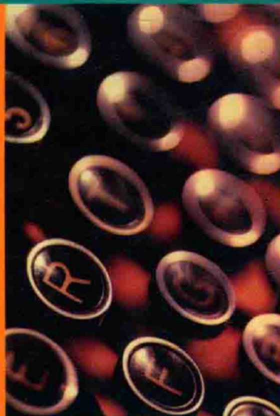
中学数学专题丛书

叶尧城 · 主编



高华文 编著

集合与简易逻辑

ZHONGXUE SHUXUE ZHUANTI CONGSHU

湖北教育出版社

5

中学数学专题丛书

叶尧城 主编

集合与简易逻辑

高华文 编著

5

湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

集合与简易逻辑/高华文编著 .—武汉:湖北教育出版社,2001

(中学数学专题丛书/叶尧城主编)

ISBN 7-5351-3161-1

Ⅰ.集… Ⅱ.高… Ⅲ.①集论-中学-教学参考资料 ②数理逻辑-中学-教学参考资料 Ⅳ.G634.663

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 085391 号

出版 发行:湖北教育出版社 武汉市青年路 277 号
网 址:http://www.hbedup.com 邮编:430015 传真:027-83619605
邮购电话:027-83669149

经 销:新 华 书 店
印 刷:湖北新华印务有限公司 (430034·武汉市解放大道 145 号)
开 本:787mm×1092mm 1/32 7 印张
版 次:2002 年 4 月第 1 版 2002 年 7 月第 2 次印刷
字 数:136 千字 印数:5 001-8 000

ISBN 7-5351-3161-1/G·2566 定价:9.00 元

总　序

随着素质教育的深入推进，需要我们在素质教育的理念与课堂教学之间架设一座桥梁，以便顺利地使素质教育进入主渠道。桥梁如何构建？改革教材成为了人们选择的突破口！当前，国家教育部教材审定委员会审定通过的几套教材正为愈来愈多的师生所选用，新教材在“为所有的学生打好共同基础”上将有所作为。然而，我国幅员辽阔，地区间的教育水平的差异大，个体间学习水平的差异大。如何真正地体现“以学生发展为本”，发展学生的个性特长，让他们在科学素质、创新意识和能力上有不同程度的提高，还需要通过特定的教学过程来完成，其中应有好的素材和高质量的课外读物（而非散见于市面上的“检测题”、“同步练习”、“习题集”等）。因此，我们数学教育工作者有义务、有责任向新世纪的中学生提供一套与新教材配套的课外读物，以专题讲座的形式，帮助学生了解知识的发生、发展过程，学会分析、解决问题的思想方法，深化、拓宽相关知识。

有鉴于此，我们组织了湖北省一批有丰富教学经验和教学研究工作经验的享受政府津贴的专家、特级教师和高级教师编写了这套《中学数学专题丛书》。丛书共有 18 个小册子，各册相对独立又相互联系，小册子的内容是与中学数学新教材相对应或相关的。它力求以生动简练的笔触，介绍一点数

学史料，有助于学生吸收各种不同的数学经验，理解各种不同的数学思想观点，体会数学的人文价值；着力反映知识的纵横联系，并以范例的形式予以说明；精选典型例题，揭示重难点，说明重在何处，难在哪里，如何理解，着重分析解题思路，阐释思想方法；选编与日常生活、生产及与其他学科相关的问题，引导学生重视数学的应用。各册都配备了一定数量的习题，供读者练习。对数学有浓厚兴趣的学生，可系统阅读，也可以根据个人的具体情况有选择性地使用。概括地讲，该套丛书具有如下特点：

1. **帮助学生夯实基础。**通过知识精讲、典例剖析、归纳小结，落实基础知识。

2. **帮助学生培养能力。**精选思想性强的综合题，启迪学生的思维，开阔学生的思路，落实数学思想方法的学习。

3. **引导学生关注应用。**精选密切联系生活实际和社会实践的应用题，促进学生养成用数学的意识。

4. **引导学生崇尚创新。**精选提问的方向不确定或答案不确定的探索性、开放性问题，培养学生的探究能力。

5. **引导学生走向成功。**选材涵盖了高考和全国数学联赛的内容和题型，有益于读者在高考和数学竞赛中创造佳绩，走向成功。

由于编写与新教材配套的课外读物对于我们是一种新的尝试，难免出现这样或那样的疏漏和不足，敬请读者提出批评和建议，以便再版时修改，使这套丛书成为受广大师生欢迎的中学数学课外读物。

叶尧城

2002年1月

目录

第一章 集合及其运算

集合概念及其基本理论,是近代数学最基本的内容之一.许多重要的数学分支,如数理逻辑、近世代数、实变函数、泛函分析、概率统计、拓扑学等,都建立在集合理论的基础上.此外,集合思想还广泛地渗透到自然科学的许多领域,集合术语在科技文章和科普读物中比比皆是.

本章介绍集合论的基本知识,它们都是学习集合论所必须熟悉的.其中包括:

基本概念.如集合、元素与关系"属于",并集、交集、差集与补集、全集与空集等.

基本运算.如并、交运算,包含关系等.

基本性质.如交换律、结合律、分配律、吸收律、摩尔根公式(反演律)等.

本章还将介绍集合论在中学数学中几个方面的应用.

§1.1 集合的概念

1. 集合的概念与表达

1.1 什么是集合

走进百货商场,各种货物琳琅满目,但顾客可以很顺利地找到自己想要的商品;我们去图书馆借书时,工作人员亦可迅速找到所需用的书;……,生活中这样的例子举不胜举,这究竟是什么原因呢?事实上,这里用到了一种数学方法,由于事物本身总是有共同特点的,因此往往可以进行分类.一些数学概念,也随着人们生活中的需要而不断产生和发展起来了.随着时间的推移,很多新生的数学思想又不断丰富着数学的宝藏,其中最新颖、最激动人心的一个概念,就是对集合论的研究.

集是怎么回事呢?就人们的日常生活经验而言,这似乎是不言自明的概念,它是指某些指定的"东西"集在一起.简单地说,一个集就是一群(或一类)事物.其实,"集合"作为人类对客观世界不同种类事物认识的一种反映,早就进入了人类的意识之中.早在19世纪末期,一个名叫格奥尔格·康托(Georg Cantor)的德国数学家试图解一个涉及到无限量研究的数学难题.其中包括这样一些问题:"整数究竟有多少?""在一个圆周上包含有多少个点?""一小时里有多少刹那的时光度过?""在1~2之间的数,比一根线上的点还多吗?"康托解决了以上的问题.他的工作标志着"集合"这个概念已在数学中诞生了.用康托的话,就是"把一定的并且彼此可以明确识别的事物——这种事物可以是直观的对象,也可以是思维的对象——放在一起,称为集合."集合是数学中最原始的概念之一,我们不能用其他更基本的概念来给它下定义,所以也把它叫做不定义的概念或原始概念.一般地,某些指定的对象集在一起就成为一个集合,也简称集.集合中的每个对象叫做这个集合的元

素.

例如,一个图书馆里所有的图书可以组成一个集合,其中每一本书就是这个集合的一个元素.所有自然数组成一个集合,每一个自然数都是它的元素.

1.2　集合的特性

由集合的概念可知,集合具有三个特性:确定性、互异性和无序性.

确定性:任意给定的一个对象,都可判定它是不是某一给定集合的元素.也就是说,任意给定的集合,都必须有明确的条件,由此条件可以判定某一对象是否是这一集合的元素.如:$\sqrt{2}$,它属于实数集,即$\sqrt{2}$为实数集的一个元素,但$\sqrt{2}$不是有理数集的元素.

互异性:一个给定集合的元素必须是互异的.也就是说,一个集合中的任何两个元素都应该是不相同的,相同的只能算作一个元素.因此,集合中的元素是不允许重复出现的.

无序性:在一个集合里,不考虑元素之间的顺序,如由1,2,3组成的集合与由2,1,3组成的集合表示同一集合.

1.3　集合的表示方法

在集合论中,当我们不涉及具体的对象时,一般用小写英文字母 $a,b,c,\cdots\cdots$ 表示元素,用大写英文字母 $A,B,C,\cdots\cdots$ 表示集合.当 a 是集合 A 的一个元素时,我们称 a 属于 A,记为 $a\in A$.否则称 a 不属于 A,记为 $a \notin A$(或 $a \bar{\in} A$).显然,任何一个具体元素 a 对一个具体的集合 A 而言,“属于”或“不属于”,二者必居其一.注意,一个集合的自身不能作为它的元

素,即 $A \notin A$,否则将导致逻辑上的矛盾.在集合论中,元素、集合及属于这三个概念,是最原始的概念,其他一切概念都是由此派生出来的.

数学中,把常用的数集用特定的字母表示.例如:

全体非负整数的集合通常简称非负整数集(或自然数集),记作 N,非负整数集内排除0的集,也称正整数集,表示成 N^* 或 N_+;

全体整数的集合通常简称整数集,记作 Z;

全体有理数的集合通常简称有理数集,记为 Q;

全体实数的集合通常简称实数集,记作 R.

集合的表示方法,常用的有列举法、描述法和图示法.

列举法:把集合中的元素一一列举出来,写在大括号内表示集合的方法.如果 M 是1至9的奇数集,那么就记为 $M=\{1,3,5,7,9\}$. 全体自然数组成的集合 N,记为 $N=\{1,2,3,4,\cdots\cdots\}$. 这种表示法,便于看出这个集合是由哪些元素组成的.

描述法:把集合中的元素的公共属性描述出来,写在大括号内表示集合的方法.如小于7的正数集表示为 $\{x\in R \mid 0<x<7\}$,或 $\{x\in R:0<x<7\}$,或 $\{x\in R;0<x<7\}$.一般地,设 $P(x)$ 是某一个(或一组)与元素 x 有关的条件,如果集合 M 是由全体满足这个(或这组)条件的元素 x 所组成,那么就记为 $M=\{x \mid P(x)\}$,有时也可以记为 $M=\{x:P(x)\}$ 或 $M=\{x;P(x)\}$.

这种表示法,还可以用大括号将说明元素性质的一句话括起来表示.如全体直角三角形组成的集合 G,可记为 $G=$

{直角三角形}.描述法便于看出集合中元素所具有的共同性质.

值得注意的是,有些集合的代表元素可能不用单个字母 x 来表示.例如,由直线 $2x+3y=1$ 上所有的点的坐标组成的集合,可记作 $\{(x,y) \mid 2x+3y=1\}$,此集合的代表元素是 (x,y),其中 x,y 都是实数,由于一般不致误解,所以通常无需注明"$x,y \in R$".在表示集合时,要防止把集合 $\{(1,2)\}$ 写成 $\{1,2\}$ 或 $\{x=1,y=2\}$ 之类的错误.

列举法与描述法各有优点,究竟用哪种方法,要视具体问题而定.有些集合,随便选用哪种表示方法都可以;有些集合,则只能用其中的一种表示方法.例如,集合 $\{x \in R \mid -1 < x < 1\}$ 不能用列举法来表示,而集合 $\{-5,0,7\}$ 不宜用描述法来表示.

图示法:为了便于直观,我们常常用平面上的一条封闭曲线所围成的图形来表示一个集合,这就是韦恩(Venn)图.例如,图 1-1-1 就是集合 $M=\{1,2,3,4\}$ 的图形.

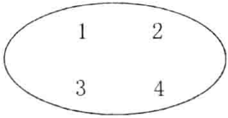


图 1-1-1

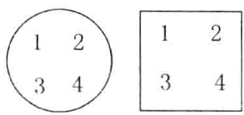


图 1-1-2

值得注意的是,这里图形的形状与集合的性质没有任何联系.这不是几何学的图形,而仅仅是把集合中的元素都包围在内(不是该集合的元素不包括在内)的直观表示.因此,这种表示法,与封闭曲线的形状无关.集合 $M=\{1,2,3,4\}$ 也可以表示成图 1-1-2.

例 1　判断下列各组对象能否描述为集合，为什么？并说明集合由哪些对象组成.

(1)"所有正方形"；

(2)"个子较高的人"；

(3)"很大的数的全体"；

(4)"大于 2 的所有整数"；

(5)"接近 0 的数的全体"；

(6)"离原点 O 的距离大于 2 的所有点".

分析　集合是一个不能定义的原始概念，其元素具有确定性，即对于集合 A 和某一对象 x，有一个明确的判断标准判定 $x \in A$，还是 $x \notin A$，二者必居其一，不能模棱两可.

解答　其中(1)、(4)、(6) 是集合；(2)、(3)、(5) 不是集合，因为它们的对象不确定. 集合的对象可以是数、点、图形、式子、人物等.

例 2　按要求表示下列集合：

(1) 用列举法表示 $A = \{(x,y) \mid 2x + y - 5 = 0, x \in N, y \in N\}$；

(2) 用描述法表示坐标平面内不在第一、三象限的点集.

分析　(1) A 中的元素是点，点的横纵坐标均属于 N，注意不要忽视元素的属性及其约束条件；(2) 中注意不要漏掉坐标轴上的点.

解答　(1) $A = \{(0,5),(1,3),(2,1)\}$

(2) $\{(x,y) \mid xy \leqslant 0\}$

例 3　设集合 A 中的元素为实数，且满足 $a \in A \Rightarrow \frac{1}{1-a}$

$\in A$ 且 $1 \notin A$

(1) 若 $2 \in A$，求 A；

(2) A 能否为单元素集？若能，把它求出来；

(3) 证明：若 $a \in A$，则 $1 - \frac{1}{a} \in A$.

分析 紧扣题设中的条件，熟悉符号语言与文字语言的相互转化，是解决本题的关键.

解答 (1) 由题意得，$\because 2 \in A$，$\therefore \frac{1}{1-2} = -1 \in A$

$\therefore \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} \in A \quad \therefore \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \in A$

$\therefore A = \{2, -1, \frac{1}{2}\}$

(2) 若 S 中有且仅有一个元素 a，则 $\frac{1}{1-a} \in S$，

$\therefore a = \frac{1}{1-a}$，即 $a^2 - a + 1 = 0$

$\because a \in R$，这不可能.

$\therefore A$ 不可能为单元素集.

(3) $\because a \in A \quad \therefore \frac{1}{1-a} \in A$

$\therefore \frac{1}{1-\frac{1}{1-a}} \in A$ 即 $1 - \frac{1}{a} \in A$.

例 4 以某些整数为元素的集合 P 具有以下性质：

(1) P 中的元素有正数，也有负数；

(2) P 中的元素有奇数,也有偶数;

(3) $-1 \notin P$;

(4) 若 $x,y \in P$,则 $x+y \in P$.

试判断数 0,2 与集合 P 的关系.

分析 此题条件较多,也许一时找不到突破口,我们可以从某一个或两个条件入手,设出 P 中的代表元素,然后结合其他性质,即可找到解决问题的途径.

解答 由(4)知,若 $x \in P$,则 $kx \in P(k \in N_+)$.

由(1)可设 $x,y \in P$,且 $x>0,y<0$.则

$xy \in P,-yx \in P$.故 $0 \in P$.

由(2)知 P 中必有正奇数,

设 $-2m,2n-1 \in P(m,n \in N_+)$,取适当的

$q \in N$,使 $q \cdot |-2m| > 2n-1$,则负奇数 $-2qm+(2n-1) \in P$,矛盾.故 $2 \notin P$.

2 有限集、无限集和空集

有些集的元素很多,要把这些元素都列出来,往往是一件非常麻烦的事.例如:列举你所在的城市的居民的集,或者小于800的自然数的集.这时,我们用这样一个“…”省略符号来表示一些省略掉的但本应列举出来的元素,如下式:

$$\{1,2,3,\cdots,798,799\}.$$

还有些集的元素数不完,例如:自然数集的元素就是数不完的.这时,我们说这个集有无限多个元素,并记为 $N=\{0,1,2,3,\cdots\}$.还有一种集合非常特殊,如一间教室里的人全出去了,要表示教室里的人所组成的集合,又应如何表示呢?

根据集合元素的多少,我们一般把集合分成有限集,无限集和空集.

一般地,含有有限个元素的集合叫做有限集.含有无限多个元素的集合叫做无限集.我们把不含任何元素的集合叫做空集,记作$\varnothing$.例如:$A = \{$某城市的居民$\}$是有限集,自然数集N是无限集,$B = \{x \in R \mid x^2 + 1 = 0\}$是空集.

我们试来比较两个无限集的元素.设$N = \{0,1,2,3,4,\cdots\}$为一切自然数的集,$E = \{0,2,4,6,8,\cdots\}$为一切偶自然数的集.在比较这两个集的时候,会出现什么情况呢?请看下面的一一对应关系:

$$\begin{array}{cccccccc} N = \{ & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & \cdots\}, \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ E = \{ & 0, & 2, & 4, & 6, & 8, & \cdots\}. \end{array}$$

我们看到了任何一个自然数都能与一个偶自然数对应.这表明偶自然数竟然会与自然数同样的多!这是惊人的,但也是容易理解的,因为自然数集的每个元素乘以2后,便成了偶数集.

有人曾经提出这样的问题:偶自然数既然包含在自然数之中,那么,偶自然数集的元素怎么会与自然数集的元素一样多呢?多年以来,这个问题曾使世界上的大数学家们大伤脑筋.德国大数学家格奥尔格·康托解决了这一难题.康托在他写的书里提出的无限集的概念成为他的集合理论的基础.康托证明无限集的一个显著特征是:无限集自身可与它的一部分成为一一对应关系.康托认为偶自然数集与自然数集的元素的个数是同样的多,尽管他的这个结论起初是难以接受的,

但是它的集的概念证明是符合逻辑的.

空集是一种特殊集合,0 是一个特殊的元素,那么空集与由 0 所组成的集合$\{0\}$是不是一回事呢?这里我们只需要利用定义即可判别.数 0 不是集合,$\{0\}$是含有一个元素 0 的集合,而$\varnothing$是不含任何元素的集合.所以$\varnothing$与$\{0\}$不是同一集合.同样的道理,{空集}或$\{\varnothing\}$均表示单元素集,与$\varnothing$也是有区别的.空集也可以用大括号$\{\ \}$来表示.空集的例子也非常多,如有四条边的三角形所组成的集合,集合$\{x \in N \mid x < 0\}$等等.

例 1 指出下面的集合 A 是由怎样性质的元素所组成的.如果是有限集,写出它的所有元素;如果是无限集,用图形把这个集合表示出来.

(1) 设 Z 是整数集,$A = \{n \mid \frac{n}{5} \in Z, |n| \leqslant 20\}$;

(2) $A = \{x \in R \mid -x^2 + 8x - 12 > 0\}$;

(3) $A = \{x \mid -x^2 + 8x - 12 > 0, x \in Z\}$;

(4) $A = \{x \in R \mid \mathrm{tg}x > 0 \text{ 且 } -x^2 - \frac{\pi}{2}x > 0\}$;

(5) $A = \{(x, y) \mid x^2 + (y-1)^2 \leqslant 1, y > 1\}$.

分析 先化简集合,然后利用定义进行判断.

解答 (1) 有限集,$A = \{0, 5, -5, 10, -10, 15, -15, 20, -20\}$;

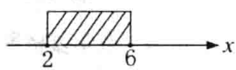


图 1-1-3

(2) 无限集,如图 1-1-3,

(3) 有限集,$A = \{3, 4, 5\}$;

(4) 空集,$A = \varnothing$;