全国学前教育专业“十二五”系列规划教材

数学（下册）

尹明学 主编

南開大學出版社

全国学前教育专业“十二五”系列规划教材

数　学

（下册）

主　编　尹明学

副主编　贾桂青　王　华

南开大学出版社

天　津

图书在版编目(CIP)数据

数学．下册／尹明学主编．—天津：南开大学出版社，2013.10

全国学前教育专业"十二五"系列规划教材

ISBN 978-7-310-04294-4

Ⅰ.①数… Ⅱ.①尹… Ⅲ.①数学—幼儿师范学校—教材 Ⅳ.①01

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 211194 号

南开大学出版社出版发行

出版人：孙克强

地址：天津市南开区卫津路 94 号 邮政编码：300071

营销部电话：(022)23508339 23500755

营销部传真：(022)23508542 邮购部电话：(022)23502200

*

天津泰宇印务有限公司印刷

全国各地新华书店经销

*

2013 年 10 月第 1 版 2013 年 10 月第 1 次印刷

260×185 毫米 16 开本 13.5 印张 277 千字

定价：28.00 元

如遇图书印装质量问题，请与本社营销部联系调换，电话：(022)23507125

前　言

中等职业学校数学教材作为传承数学知识的载体，在推进素质教育、深化职业教育教学改革、提高学生综合素质、培养专业创新人才中有着举足轻重的地位。2010 年 7 月颁布的《国家中长期教育改革和发展规划纲要》把学前教育单独列为一章，提出了到 2020 年基本普及学前教育的目标。于是在大力发展学前教育的今天，为了培养合格的可持续发展的幼儿园教师，我们针对目前中等职业学校数学课程的教学实际，根据新课标，结合学生现状，经多方征求意见，反复调研论证，编写了这套《数学》教材.

本套数学教材共两册，适合作为三年制、“3+2”和五年一贯制学前教育专业教材，也可供中等职业学校使用.

本教材有如下特点：

①针对中等职业学校学生的数学知识结构，注重内容的系统性、基础性、应用性，注重理论联系实际.

②突出选择性．教材在内容和习题的安排上分为必修内容和选修内容（选修内容或选做题前面加*标注）.

本教材上、下两册共十二章，崔继海编写第一章至第四章，司明编写第五章，李秀梅编写第六章，尹明学编写第七章和第十二章，贾桂青编写第八章，王华编写第九章至第十一章。本教材策划、纲目和统稿工作由崔继海、尹明学完成.

由于编者水平有限，加之时间仓促，教材中错误和疏漏之处在所难免，恳请同行专家和读者在使用过程中予以批评指正。

编者

2013 年 5 月

目　录

第七章　数列、极限和数学归纳法

7.1　数列的概念

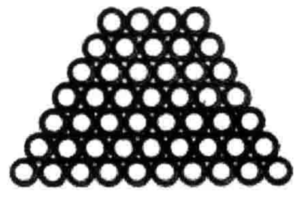

图 7-1

在现实生活和生产中，我们经常会遇到按照一定次序排列的一列数，请看下面的例子：

（1）图 7-1 表示堆放的钢管，共堆放了 7 层，自上而下各层的钢管数排列成一列数：

$$4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10. \qquad ①$$

（2）正整数 1，2，3，4，…的倒数依次排成一列数：

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots. \qquad ②$$

（3）一个细胞在一昼夜内分裂八次（一个分裂成两个），记录每次分裂后所得到的细胞的个数，并按其先后次序排成一列数：

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256. \qquad ③$$

（4）无穷多个 3 排成一列数：

$$3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots \qquad ④$$

（5）-1的 1 次幂、2 次幂、3 次幂、4 次幂……排成一列数：

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots \qquad ⑤$$

像上面各例子，按照一定次序排列的一列数叫作**数列**．数列中的每一个数都叫作这个数列的**项**，在第 1 个位置上的数叫作数列的第 1 项（首项），在第 2 个位置上的数叫作数列的第 2 项，…，在第 n 个位置上的数叫作数列的第 n 项，…．并依次用 a_1，a_2，a_3，a_4，…，a_n，…来表示，因此数列的一般形式可以写成

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots.$$

通常把数列的第 n 项 a_n 叫作数列的**通项**．并把此数列简记为 $\{a_n\}$．

例如，数列 2，4，6，8，…，$2n$，…，简记为 $\{2n\}$；数列 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，…，

$\frac{1}{n}$，…，简记为 $\{\frac{1}{n}\}$.

如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与项数 n 之间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式叫作这个数列的**通项公式**.

例如，数列①的通项公式是 $a_n = n+3$（$n \in \mathbf{N}^*$，$n \leqslant 7$）；数列②的通公式是 $a_n = \frac{1}{n}$；数列⑤的通项公式是 $a_n = (-1)^n$；数列④的通项公式是 $a_n = 3$．像数列④这样，数列的项都是同一个常数的数列叫作**常数列**.

想一想：是否所有的数列都能写出它的通项公式？

如果已知一个数列的通项公式，那么只要依次用 1，2，3，…去代替公式中的 n，就可以得到这个数列的相应项.

项数有限的数列叫作**有穷数列**，项数无限的数列叫作**无穷数列**．例如数列①、③是有穷数列，数列②、④、⑤是无穷数列．无穷数列没有末项，在依次写出各项时，末尾要用省略号.

例 1 根据下面数列的通项公式，写出它的前 5 项：

（1）$a_n = \frac{n}{n+1}$；　　（2）$a_n = (-1)^n n$；

（3）$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

分析：在通项公式中依次取 $n=1$，2，3，4，5，可得到数列的前 5 项.

解：（1）数列的前 5 项为：$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{5}$，$\frac{5}{6}$；

（2）数列的前 5 项为：-1，2，-3，4，-5；

（3）数列的前 5 项为：$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{12}$，$\frac{1}{20}$，$\frac{1}{30}$.

例 2 写出数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

（1）1，4，9，16，…

（2）$\frac{1}{2}$，$-\frac{3}{4}$，$\frac{5}{8}$，$-\frac{7}{16}$，…

（3）0，2，0，2，…

分析：根据数列的前几项，观察数列中各项与相应序号的关系，从而归纳出通项公式.

解：（1）数列的前 4 项 1，4，9，16 分别是相应序号的平方，所以它的一个通

项公式是$a_n = n^2$；

（2）数列的前 4 项$\frac{1}{2}$，$-\frac{3}{4}$，$\frac{5}{8}$，$-\frac{7}{16}$的绝对值的分子是相应序号的 2 倍减去 1，分母是 2 的序号次幂，又因为奇数项为正，偶数项为负，所以它的通项公式是$a_n = (-1)^{n+1}\frac{2n-1}{2^n}$；

（3）数列中 0，2 两个数交替出现，因为$1+(-1)=0$，$1+1=2$，所以它的通项公式是$a_n = 1+(-1)^n$.

我们再来研究本节的数列①. 我们知道，数列①的通项是$a_n = n+3$（$n \in \mathbf{N}^*$，$n \leqslant 7$），只要依次用 1，2，3，…，7 代替公式中的n，就可以求出这个数列的各项. 数列①还可以用如下方法给出：在图 7-1 中，自上而下第一层的钢管数$a_1 = 4$，以下每一层的钢管数a_n都比上一层的钢管数a_{n-1}多 1（一共 7 层），即$a_n = a_{n-1}+1$（$2 \leqslant n \leqslant 7$）. 像这样的一些数列，如果已知数列$\{a_n\}$的第一项（或前几项），且任一项$a_n$与它的前一项$a_{n-1}$（或前几项）间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式叫作这个数列的**递推公式**. 递推公式是给出数列的一种重要方法.

比一比：数列①的通项公式与递推公式的不同。

例 3 已知数列$\{a_n\}$的首项是 1，以后各项由公式$a_n = 1+\frac{1}{a_{n-1}}$给出，写出这个数列的前 5 项.

解：$a_1 = 1$，$a_2 = 1+\frac{1}{a_1} = 1+\frac{1}{1} = 2$，$a_3 = 1+\frac{1}{a_2} = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$，

$a_4 = 1+\frac{1}{a_3} = 1+\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$，$a_5 = 1+\frac{1}{a_4} = 1+\frac{3}{5} = \frac{8}{5}$.

已知数列$\{a_n\}$，则称

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

为这个数列的**前 n 项的和**，记作

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n .$$

例如数列 4，5，6，7，8，9，10 的前 7 项的和是

$$S_7 = 4+5+6+7+8+9+10 = 49 .$$

数列的前n项和S_n与它的通项a_n之间有如下关系：

当$n=1$时，$a_1 = S_1$；

当$n \geqslant 2$时，$a_n = S_n - S_{n-1}$.

即
$$a_n=\begin{cases} S_1 & (n=1) \\ S_n-S_{n-1} & (n\geqslant 2) \end{cases}.$$

如果知道一个数列的前 n 项和 S_n 的表达式，那么我们可以写出这个数列的通项公式.

例 4 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和 $S_n=n^2+2n$，求数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项，并写出这个数列的通项公式.

解： 当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1^2+2\times1=3$；

当 $n=2$ 时，$a_2=S_2-S_1=(2^2+2\times2)-(1^2+2\times1)=5$；

当 $n=3$ 时，$a_3=S_3-S_2=(3^2+2\times3)-(2^2+2\times2)=7$；

当 $n=4$ 时，$a_4=S_4-S_3=(4^2+2\times4)-(3^2+2\times3)=9$；

当 $n\geqslant2$ 时，

$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2+2n)-[(n-1)^2+2(n-1)]=2n+1$.

因为 $a_1=3$ 符合 $a_n=2n+1$（$n\geqslant2$），所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是
$$a_n=2n+1.$$

练习题

1. 选择题：

（1）下列说法中正确的是（　　）.

A. 数列 1，2，3，4，5 与数列 5，4，3，2，1 是同一个数列；

B. 数列 1，4，9，16 的第 5 项是 25；

C. 数列 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，…的第 n 项是 $\frac{1}{n}$；

D. 数列 3，6，9，12，…可记为 $\{3n\}$.

（2）数列 2，4，6，8，…的一个通项公式是（　　）.

A. $a_n=2^n$　　　　B. $a_n=2+n$

C. $a_n=2n$　　　　D. $a_n=n^2$

2. 观察下面数列的特点，用适当的数填空，并写出这个数列的通项公式：

（1）2，4，（　），16，32，（　），128，…，　　$a_n=$________；

（2）（　），4，3，（　），1，（　），-1，…，　　$a_n=$________；

（3）（　），4，9，16，（　），36，…，　　$a_n=$________；

（4）$\frac{1}{1\times2}$，$-\frac{1}{2\times3}$，$\frac{1}{3\times4}$，（　），$\frac{1}{5\times6}$，…，$a_n=$________；

（5）1，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，（ ），3，（ ），…， $a_n=$__________.

3. 写出下列数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

（1）15，25，35，45，…；

（2）$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$-\frac{1}{8}$，$\frac{1}{16}$，…；

（3）0，1，0，1，…；

（4）$1-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$，….

4. 根据下面数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，写出它的前 5 项：

（1）$a_n=n^2$；　　（2）$a_n=n(n+2)$.

7.2 等差数列

7.2.1 等差数列及其通项公式

观察下面的数列：

4，5，6，7，8，9，10；

14，12，10，8，6，4，2；

1，4，7，10，13，16，…；

π，2π，3π，4π，5π，….

可以看出，上述四个数列有一个共同的特点：从第二项起，每一项与它的前一项的差都等于同一个常数.

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每项与它前一项的差都等于同一个常数，那么这个数列叫作**等差数列**. 这个常数叫作等差数列的**公差**，公差通常用字母 d 表示.

上面的四个数列都是等差数列，它们的公差分别是 1，-2，3，π.

如果一个数列 a_1，a_2，a_3，…，a_n，…是等差数列，它的公差为 d，那么

$$a_1=a_1+0d,$$
$$a_2=a_1+d,$$
$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,$$
$$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d,$$

……

由此可知，等差数列$\{a_n\}$的通项公式是

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

例 1（1）求等差数列 10，6，2，…的通项公式与第 10 项.

（2）-401 是不是等差数列 -5，-9，-13，…中的项？如果是，是第几项？

解：（1）$\because a_1=10$，$d=6-10=-4$，$n=10$，

$\therefore a_n = a_1+(n-1)d = 10+(n-1)\times(-4) = -4n+14$，

即该数列的通式公式为 $a_n=-4n+14$.

$a_{10}=-4\times 10+14=-26$.

（2）由 $a_1=-5$，$d=-9-(-5)=-4$，得这个数列的通项公式为

$$a_n=-4n-1.$$

由题意知，本题要回答这样的问题：是否存在正整数 n，使得

$$-401=-4n-1$$

成立. 解这个关于 n 的方程，得 $n=100$，即 -401 是这个数列的第 100 项.

例 2 已知 $a_{12}=21$，$a_{45}=153$，则 $a_n=$______________.

解：$\because a_{12}=21$，$a_{45}=153$，

由 $a_n=a_1+(n-1)d$

得 $\begin{cases} a_1+(12-1)d=21 \\ a_1+(45-1)d=153 \end{cases}$

解之得，$a_1=-23$，$d=4$.

$\therefore a_n=-23+(n-1)\times 4=4n-27$，故填 $4n-27$.

由等差数列$\{a_n\}$的通项公式得，

$$a_n=a_1+(n-1)d \quad ①$$

$$a_m=a_1+(m-1)d \quad ②$$

①－②得，$a_n-a_m=(n-m)d$

$\therefore$ $$d=\frac{a_n-a_m}{n-m}(m\neq n).$$

$$a_n=a_m+(n-m)d$$

于是本例还可作如下解答：

$\because a_{12}=21$，$a_{45}=153$.

$\therefore d=\dfrac{a_{45}-a_{12}}{45-12}=\dfrac{153-21}{33}=4$.

$\therefore a_n = a_{12} + (n-12)\times 4 = 21 + 4(n-12) = 4n - 27$.

已知数列的某两项求它的通项，利用公式 $a_n = a_m + (n-m)d$ 比解方程组更简便.

例 3　已知三个数成等差数列，它们的和为 12，它们的积为 60，求这三个数.

解：根据三个数成等差数列，则可设这三个数为 $a-d$ ，a ，$a+d$.

$\because$（$a-d$）+a+（$a+d$）=12.

$\therefore$ a=4

又$\because$（$4-d$）·4·（$4+d$）=60.

$\therefore$ $d = \pm 1$.

因此所求的三个数为 3，4，5 或 5，4，3.

如果a ，A，b 成等差数列，那么 A 叫作 a 与 b 的**等差中项**.

由等差数列的定义知，$A - a = b - A$ ，所以 $A = \dfrac{a+b}{2}$.

容易看出，**在一个等差数列中，从第 2 项起，每项（有穷等差数列的末项除外）都是它的前一项与后一项的等差中项，也是与它等距离的前后两项的等差中项**，即

$$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2} ,$$

$$2a_n = a_{n-m} + a_{n+m} \quad (n > m+1).$$

在有穷等差数列 $\{a_n\}$ 中，与首末两项等距离的两项之和也相等，即：

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots = a_n + a_1$$

一般地，在等差数列中，序号之和相等的两项之和也相等，即

若 $m+n = p+q$ ，则 $a_n + a_m = a_p + a_q$.

特别地，若 $2m = p+q$ ，则　　$2a_m = a_p + a_q$.

***例 4**　在等差数列 $\{a_n\}$ 中，

（1）已知 $a_1 + a_{15} = 2$ ，则 $a_3 + a_{13} =$_____.

（2）已知 $a_3 = 2$ ，则 $a_1 + a_5 =$______________.

解：（1）$\because$　$1+15 = 3+13$ ，

　　　　$\therefore$　$a_3 + a_{13} = a_1 + a_{15} = 2$.

所以应填 2.

（2）$\because$　$3\times 2 = 1+5$ ，

　　$\therefore$　$a_1 + a_5 = 2a_3 = 4$.

所以应填 4.

练习题

1. 判断下列数列是否为等差数列：

（1）-1，-1，-1，-1，-1；

（2）2，3，2，3，2，3；

（3）0.1，0.2，0.3，0.4，0.5；

（4）2，4，8，12，16；

（5）7，12，17，22，27；

（6）-3，-2，-1，1，2，3.

2. 已知下列数列是等差数列，试在括号内填上适当的数：

（1）（　　），5，10；　　（2）1，$\sqrt{2}$，（　　）；

（3）31，（　　），（　　），10.

3. 选择题：数列 2，9，16，…，100 的项数为（　　）

A. 14　　B. 15　　C. 16　　D. 17

4. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中：

（1）已知 $d=-3$，$a_7=8$，则 $a_1=$__________；

（2）已知 $a_1=12$，$a_6=27$，则 $d=$______；

（3）已知 $a_1=3$，$a_n=21$，$d=2$，则 $n=$________；

（4）已知 $a_4=10$，$a_7=19$，则 $d=$______，$a_n=$__________；

（5）已知 $a_{55}=62$，$a_{65}=82$，则 $a_{100}=$__________.

7.2.2 等差数列的前 *n* 项的和

200 多年前，高斯的算术老师提出了下面的问题：

$$1+2+3+\cdots+100=?$$

据说，当时只有 10 岁的高斯用下面的方法迅速算出了正确答案：

首项与末项的和是：$1+100=101$；

第 2 项与倒数第 2 项的和是：$2+99=101$；

第 3 项与倒数第 3 项的和是：$3+98=101$；

……

第 50 项与倒数第 50 项的和是：$50+51=101$；

于是，$1+2+3+\cdots+100=101\times50=5050$.

高斯的算法实际上是求等差数列 1，2，3，…，n，…的前 100 项的和.

我们也可以用这种方法来求等差数列 1，2，3，…，n，…的前 n 项的和 S_n：

$$\begin{array}{rcccccccccc} & 1 & + & 2 & + & 3 & + \cdots + & (n-1) & + & n \\ +) & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + \cdots + & 2 & + & 1 \\ \hline & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + \cdots + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

$$\therefore\ 1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\frac{(n+1)n}{2}.$$

现在我们来求一般等差数列的前 n 项的和 S_n.

一般地，设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，它的前 n 项和是

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n.$$

根据等差数列的通项公式，上式可写成

$$S_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+[a_1+(n-1)d)]. \qquad ①$$

因为 S_n 又可以写成

$$S_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_1.$$

于是根据等差数列的通项公式，上式可写成

$$S_n=a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+\cdots+[a_n-(n-1)d] \qquad ②$$

由① + ②，得

$$2S_n=\underbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)}_{n\text{个}}$$

$$=n(a_1+a_n).$$

由此得到等差数列的前 n 项的和的公式：

$$\boxed{S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}}$$

如果将等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 代入上式，那么 S_n 又可以写成

$$\boxed{S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d}$$

上面两个求和公式给出了等差数列的 a_1，a_n，d，n，S_n 之间的关系，并且知道其中的三个量就可以求出另外两个量.

例 1 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，

（1）已知 $a_1=1$，$a_{10}=10$，求 S_{10}；

（2）已知$a_1=3$，$d=-\frac{1}{2}$，求S_{10}；

（3）已知$a_1=-10$，$d=4$，$S_n=54$，求n．

解：（1）∵ $a_1=1$，$a_{10}=10$，$n=10$，

根据等差数列的前n项和公式，得

$$S_{10}=\frac{10\times(1+10)}{2}=55.$$

（2）∵ $a_1=3$，$d=-\frac{1}{2}$，$n=10$，

根据等差数列的前n项和公式，得

$$S_{10}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=10\times3+\frac{10\times(10-1)}{2}\times(-\frac{1}{2})=7\frac{1}{2}.$$

（3）∵ $a_1=-10$，$d=4$，$S_n=54$，

根据等差数列的前n项和公式，得

$$-10n+\frac{n(n-1)}{2}\times4=54.$$

整理，得

$$n^2-6n-27=0.$$

解得

$$n_1=9，n_2=-3 \text{（舍去）}$$

∴ $$n=9.$$

练习题

1. 填空：（根据下列条件，求相应的等差数列$\{a_n\}$的前n项的和S_n）

（1）$a_1=5$，$a_{10}=95$，则$S_{10}=$________；

（2）$a_1=100$，$d=-2$，则$S_{10}=$________．

2. 等差数列5，4，3，2，…的前多少项的和是-30？