高等学校数理类基础课程“十二五”规划教材

复变函数与积分变换

李博 主编

化学工业出版社

高等学校数理类基础课程"十二五"规划教材

复变函数与积分变换

李 博 主编
王 琳 牟丽君 翟发辉 参编

化学工业出版社
·北京·

本书按教育部高等学校的复变函数与积分变换课程教学大纲要求编写，知识体系完整，逻辑性、系统性强，例题及习题丰富. 内容包括复变函数与积分变换两部分，其中复变函数内容包括复数与复变函数、解析函数、复积分、复级数、留数定理、保形映射；积分变换内容包括傅里叶（Fourier）变换及性质、拉普拉斯（Laplace）变换及性质、积分变换的应用. 本书每章节都配有适量习题，每章附有小结和总习题，习题附有答案，方便读者自学、归纳和复习. 书中附有“*”者，可供有需要的专业选用.

本书可作为高等学校理工科相关专业师生的教学用书或教学参考书，也可供科技工作者参考.

图书在版编目（CIP）数据

复变函数与积分变换/李博主编. —北京：化学工业出版社，2015.6
高等学校数理类基础课程“十二五”规划教材
ISBN 978-7-122-23667-8

Ⅰ. ①复…　Ⅱ. ①李…　Ⅲ. ①复变函数-高等学校-教材②积分变换-高等学校-教材　Ⅳ. ①O174.5②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 079246 号

责任编辑：郝英华　　装帧设计：韩　飞
责任校对：宋　玮

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）
印　　装：北京云浩印刷有限责任公司
787mm×1092mm　1/16　印张 12　字数 197 千字　2015 年 7 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：28.00 元

前言

复变函数与积分变换是各类高等学校理工类专业学生的一门重要的数学基础课程，是学习有关后继课程的工具. 复变函数理论作为一种工具，在现代科学技术中有着重要的作用，因此要使得学生能掌握其基本理论和计算技巧. 建立在复变函数理论之上的积分变换，通过积分建立了函数之间的对应关系，这在许多领域已被广泛应用，如电力工程、通信与控制领域、地质勘探等方面以及其他数学、物理和工程技术领域. 为了适应各类高等院校的人才培养需要，我们总结多年的教学经验，编写了本书.

本书按教育部“复变函数与积分变换”教学大纲的基本要求编写，较全面地介绍了复变函数和积分变换的基本理论和基本方法. 全书分为复变函数与积分变换两部分，其中复变函数部分包括复数与复变函数、解析函数、复积分、复级数、留数定理、保形映射；积分变换部分包括傅里叶（Fourier）变换及性质、拉普拉斯（Laplace）变换及性质、积分变换的应用. 本书结构合理，讨论详尽，易教易学. 书中附有“*”章节，可供有需要的相关专业选用.

在编写本书时，我们着重注意了以下几个方面.

(1) 以解析函数的理论为基础，突出基本概念和方法，尽量做到数学推导严格且简洁.

(2) 复变函数论中有些内容与高等数学重复，它是后者的推广. 在这方面，对于平行的概念，如极限、连续、微分等，既指出其相似之处，更强调其不同之处.

(3) 在每章末都配有内容小结，对于本章主要内容进行了简短的总结，提纲挈领，以帮助读者抓住要点，牢固掌握.

(4) 配备了丰富的例题和习题，希望通过做习题这个环节，来帮助培养、提高解题能力和技巧. 每节后配有习题，便于读者有针对性地进行练习；每章后还配有总习题. 书末附有习题的答案或提示，以便于读者自学.

本书配有内容丰富的电子课件可免费提供给采用本书作为教材的院校使用，如有需要，请发邮件至 cipedu@ 163. com 索取.

本书全部内容的教学总时数不低于 48 学时. 全书共 8 章，由李博、王琳、牟丽君和翟发辉编写. 全书由李博和王琳负责修改定稿.

限于编者水平，本书不妥之处在所难免，敬请读者不吝赐教.

编者

2015 年 4 月

目录

第 5 章 留数及其应用 83

引 言

数的最基本者为正整数，如 1，2，3，…. 正整数相加的结果仍为正整数. 如可用减法运算，则需扩充为整数，包含±1，±2，…以及 0. 整数对加法、减法和乘法而言是封闭的，即整数进行加法、减法及乘法运算的结果仍为整数. 但若要对加减乘除四种运算封闭，需将整数扩充为有理数. 仅有有理数，不能解一般的代数方程，如方程 $x^2=2$，在有理数范围内无根. 因此，需将数的范围再加扩充，成为实数. 任何实数的平方恒为正数，故方程 $x^2+1=0$ 无实根. 再加扩充成为复数，其形式为 $a+\mathrm{i}b$，此处 a，b 为实数，i 满足 $\mathrm{i}^2=-1$. 有了复数后，从理论上，任何代数方程都有解.

复数是 16 世纪人们在解代数方程时引入的. 在 18 世纪，达朗贝尔（1717—1783）与欧拉（1707—1783）等逐步阐明了复数的几何意义和物理意义，澄清了复数的概念.

微积分中研究实变量之间的函数关系，随着人类社会和生产实践的发展，需要研究两个复变量之间的函数关系——一元复变函数，这是本书研究的第一个主要内容.

复变函数的理论和方法，在自然科学和工程技术中，如流体力学、空气动力学、电磁学、热力学等，有广泛的应用. 复变函数论研究的中心对象是解析函数. 在复变函数论的研究中，实变函数的许多基本概念，如函数、极限、连续、导数、积分的定义，在形式上几乎可以无改变地推广到复变函数. 但是，复变函数中，这些概念有了本质上的深化. 例如，复变函数可导的条件要比实变函数严格得多也深刻得多，以致复变函数在域内有一阶导数，就可以推出它有任意阶导数.

积分变换研究由含参变量积分所定义的一类变换（函数）的性质及应用，它的理论与方法广泛应用于数学科学的许多分支中，已成为自然科学和各种工程技术领域中不可缺少的运算工具.

积分变换就是通过积分运算进行函数类变换. 例如，常用下面的含参变量积分

$$F(\alpha)=\int_a^b f(t)K(t,\alpha)\mathrm{d}t$$

实施函数 $f(t)$ 的积分变换，此处的 $K(t,\alpha)$ 是一个确定的二元函数，称为该积分变换的核. 不同的积分区间和核对应了不同的积分变换. 我们主要研究傅里叶变换和拉普拉斯变换的概念、性质和应用.

第 1 章

复数与复变函数

复变函数就是自变量为复数的函数. 我们的主要研究对象是在某种意义下可导的复变函数，通常称为解析函数. 本章首先引入复数与复平面的概念，其次引入复球面、平面点集、区域和 Jordan 曲线的概念，最后介绍复变函数的极限和连续性.

1.1 复数

1.1.1 复数的概念

设 x，y 为实数，则 $z=x+\mathrm{i}y$ 表示复数，此处 $\mathrm{i}^2=-1$，i 称为**虚数单位**（可记作 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$）；x 称为 z 的实部，记为 $\mathrm{Re}(z)$；y 称为 z 的**虚部**，记为 $\mathrm{Im}(z)$. 若实部 $\mathrm{Re}(z)=0$，则 $z=\mathrm{i}y$ 称为**纯虚数**. 当复数 z 的虚部为零时，z 为实数，因此复数是实数概念的推广. 两复数相等，必须且只需它们的实部及虚部分别相等. 一个复数为 0，当且仅当它的实部和虚部同时为 0.

1.1.2 复数的代数运算

两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 和 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的加法、减法、乘法及除法运算定义如下：

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2) \tag{1.1}$$

$$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1) \tag{1.2}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}(z_2\neq 0) \tag{1.3}$$

实数的四则运算规律（如交换律，结合律，分配律等）都适用于复数的代数运算.

【例 1.1】 计算$\dfrac{(3+2\mathrm{i})-(1-2\mathrm{i})}{-1+\mathrm{i}}$.

解 $\dfrac{(3+2i)-(1-2i)}{-1+i}=\dfrac{2+4i}{-1+i}=\dfrac{2\times(-1)+4\times1}{2}+$

$$\frac{4\times(-1)-1\times2}{2}i=\frac{2}{2}+\frac{-6}{2}=1-3i.$$

【例 1.2】 计算（1）$\dfrac{8i-1}{i}$，（2）$\dfrac{-1+5i}{2+3i}$.

解 （1）$\dfrac{8i-1}{i}=\dfrac{8i-1}{i}\cdot\dfrac{i}{i}=\dfrac{8i^2-i}{i^2}=\dfrac{-8-i}{-1}=8+i.$

（2）$\dfrac{-1+5i}{2+3i}=\dfrac{-1+5i}{2+3i}\cdot\dfrac{2-3i}{2-3i}=\dfrac{13+13i}{13}=1+i.$

1.1.3 复数的表示法

因复数 $z=x+iy$ 由一对有序实数（x，y）所唯一确定，复数 $z=x+iy$ 可以用直角坐标系中的点 $P(x, y)$ 表示，即对任意复数 $z=x+iy$，对应 xOy 平面上的坐标为（x，y）的点 P. 如图 1.1 所示.

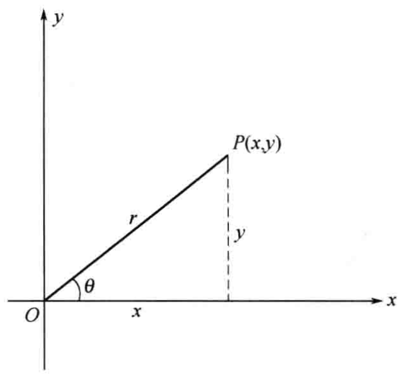

图 1.1

用 xOy 平面表示复数时，称其为复平面或 z 平面. 因为复平面上位于 x 轴上的点表示实数，故把 x 轴称为实轴. 类似地，y 轴上的点表示纯虚数，故称其为虚轴.

在复平面上，从原点到点 $P(x, y)$ 所引的向量与这个复数 $z=x+iy$ 也构成一一对应关系，故复数 $z=x+iy$ 也可以用向量 $\overrightarrow{OP}$ 表示.

将复数 z_1，z_2 依次用向量 $\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OP}'$ 表示，按照向量加法的平行四边形法则可求向量 $\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OP}'$ 的和，得向量 $\overrightarrow{OR}$，则向量 $\overrightarrow{OR}$ 及点 R 均表示复数 z_1+z_2（图 1.2）；又根据向量减法的三角形法则，可得向

量$\overrightarrow{P'P}$表示复数 z_1-z_2（图 1.3）.

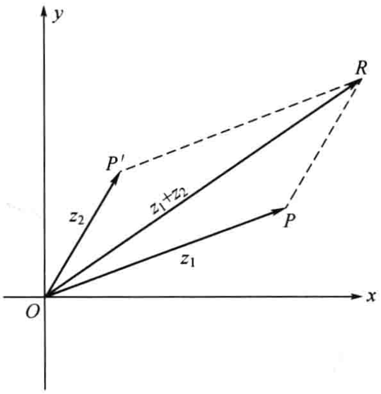

图 1.2

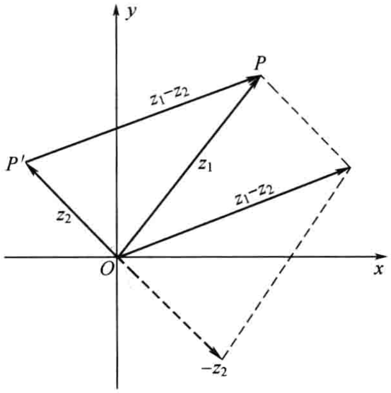

图 1.3

1.1.4　共轭复数与复数的模

根据极坐标和直角坐标的关系

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases},$$

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可记为

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\tag{1.4}$$

此处 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 称为复数 z 的**模或绝对值**，θ 称为复数 z 的**辐角**，依次用 $|z|=r$ 和 $\mathrm{Arg}(z)=\theta$ 表示. 当 $z\neq0$ 时，辐角 $\mathrm{Arg}(z)=\theta$ 是向量 z 与 x 轴正向的夹角（如图 1.1）.

$z=0$ 的辐角不确定，Arg(0) 无意义. 对 $z\neq0$，辐角 $\mathrm{Arg}(z)$ 有无穷多个，它们彼此相差 2π 的整数倍；但满足条件

$$-\pi<\mathrm{Arg}(z)\leqslant\pi$$

的辐角值只有一个，称该辐角值为复数 z 的**辐角主值**，记为 $\arg(z)$. 于是有

$$-\pi<\arg(z)\leqslant\pi\tag{1.5}$$

从而 $\mathrm{Arg}(z)=\arg(z)+2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

表示式 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 称为复数 z 的**三角表示式**，亦记为

$$z=|z|(\cos\mathrm{Arg}(z)+\mathrm{i}\sin\mathrm{Arg}(z))\tag{1.6}$$

由复数的三角表示式 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 和欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 可以得到 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，此式称为复数的**指数表示式**. 依据所讨论问题

的需要，复数的表示式之间可以相互转化.

【例 1.3】 将 $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$用三角式和指数式表示.

解 $r=|z|=1$，$\arg(z)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$，

所以 $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$.

复数 $x-\mathrm{i}y$ 称为复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的**共轭复数**，用 $\overline{z}$ 表示，即 $\overline{z}=x-\mathrm{i}y$.

根据定义和运算法则，易得共轭复数具有下列主要性质：

$$\overline{\overline{z}}=z$$

$$\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$$

$$\overline{zz'}=\overline{z}\cdot\overline{z'}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}(z'\neq 0)$$

$$|z|^2=z\overline{z}$$

$$2\mathrm{Re}(z)=z+\overline{z} \quad \text{或} \quad \mathrm{Re}(z)=\frac{z+\overline{z}}{2}$$

$$2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)=z-\overline{z} \quad \text{或} \quad \mathrm{Im}(z)=\frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$$

注 1.1 若 z 在负实轴上时，$\arg(z)=\pi$，$\arg(\overline{z})=\pi$，$\pi\neq-\pi$.

一对共轭复数 z 和 $\overline{z}$ 在复平面的位置是关于实轴对称的(图 1.4).因而$|z|=|\overline{z}|$. 如果 z 不在负实轴和原点上，还有 $\arg(z)=-\arg(\overline{z})$.

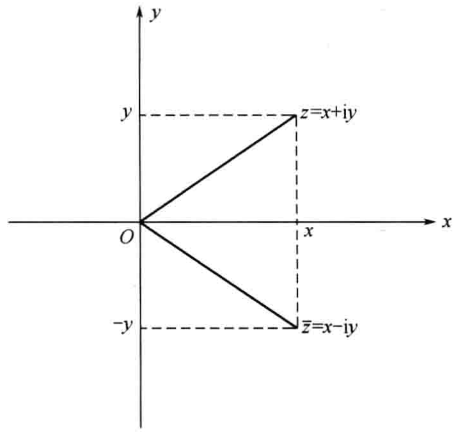

图 1.4

由于$|z_1-z_2|$表示点 z_1 与 z_2 之间的距离，因此由图 1.2 和图 1.3，

我们有如下的三角不等式：

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2| \tag{1.7}$$

$$|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big| \tag{1.8}$$

【例 1.4】 设 z_1 和 z_2 是两个复数，证明：$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$.

证
$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})\\&=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}\\&=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\overline{z}_2+(\overline{z_1\overline{z}_2})\\&=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2).\end{aligned}$$

利用复数的实部、虚部及模的定义，可得到下列不等式：

$$-|z|\leqslant\mathrm{Re}(z)\leqslant|z|$$

$$-|z|\leqslant\mathrm{Im}(z)\leqslant|z|$$

定理 1.1.1 两个复数乘积的模等于它们的模的乘积；两个复数乘积的辐角等于它们的辐角的和. 即：$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$，$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}(z_1)+\mathrm{Arg}(z_2)$.

证 利用复数的三角表示式，设

$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1),z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$,

故
$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1r_2(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\\&=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\\&\quad\cos\theta_1\sin\theta_2)]\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]\end{aligned}$$

所以有 $|z_1z_2|=r_1r_2=|z_1||z_2|$，$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}(z_1)+\mathrm{Arg}(z_2)$.

由上述证明过程可知，复数 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$ 和 $z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$ 的乘积的三角表示式为

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)] \tag{1.9}$$

类似可得复数除法（$z_2\neq0$）的三角表示式为

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)] \tag{1.10}$$

且
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|,\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}(z_1)-\mathrm{Arg}(z_2) \tag{1.11}$$

定理 1.1.2 两个复数的商的模等于它们的模的商；两个复数的商的辐角等于被除数与除数的辐角之差.

【例 1.5】 若 $|a|<1,|b|<1$，试证 $\left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|<1$.