



同济数学系列丛书  
TONGJISHUXIEXILIECONGSHU

# 博弈论

同济大学数学系 马洪宽 著



同济大学出版社  
TONGJI UNIVERSITY PRESS



同济数学系列丛书  
TONGJI SHUXUE XILIE CONGSHU

# 博 弈 论

同济大学数学系 马洪宽 著

平装本 十六开本

图 十级

书号

定价

印 数

出版日期



同济大学出版社  
TONGJI UNIVERSITY PRESS

## 内 容 提 要

本书对博弈理论作了全面的介绍,为经济学、管理学、金融学以及其他需要博弈论作为基础知识的学科和博弈论进一步的学习打下基础。本书包含:博弈的基本要素和概念,完全信息静态博弈,完全且完美信息动态博弈,完全但不完美信息动态博弈,不完全信息静态博弈,不完全信息动态博弈,合作博弈,演化博弈和微分博弈。本书既有基本的理论方法,也有许多通俗易懂的应用和例子,还有一定数量的习题。通过本书的学习,可以使读者掌握博弈论的基本概念和方法,培养读者在冲突环境下的决策能力。

本书可以作为经济学、管理学、金融学等以博弈论为基础课的专业以及数学专业的教材,也可以作为了解和学习博弈论的参考书。

### 图书在版编目(CIP)数据

博弈论/马洪宽著. —上海:同济大学出版社,2015.7

ISBN 978-7-5608-5869-2

I. ①博… II. ①马… III. ①博弈论—高等学校—教材  
IV. ①O225

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第131413号



同济数学系列丛书

## 博 弈 论

同济大学数学系 马洪宽 著

责任编辑 张 莉    助理编辑 亓福军    责任校对 徐春莲    封面设计 陈益平

出版发行 同济大学出版社    www.tongjipress.com.cn  
(地址:上海市四平路1239号 邮编:200092 电话:021-65985622)

经 销 全国各地新华书店  
印 刷 常熟大宏印刷有限公司  
开 本 787mm×960mm 1/16  
印 张 15.25  
印 数 1—2 100  
字 数 305 000  
版 次 2015年7月第1版    2015年7月第1次印刷  
书 号 ISBN 978-7-5608-5869-2

定 价 32.00元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换    版权所有 侵权必究

## 前 言

博弈论(Game Theory)也称为对策论,是处理各类带有冲突因素的问题的数学分支,或者说是冲突环境下的决策理论.博弈论可广泛地应用于经济、政治、军事、外交、生物和体育竞赛等各个领域.博弈论也是社会科学特别是经济学的一门前沿学科,在现代经济学中具有非常重要的地位和作用.自1994年以来,诺贝尔经济学奖多次授予博弈论专家也充分说明了这一点.1994年的诺贝尔经济学奖授予了纳什、塞尔顿和海萨尼,1996年授予了莫里斯和维克瑞,2001年授予了阿克罗夫、斯宾塞和斯蒂尔格利茨,2005年授予了奥曼和谢林,2007年授予了赫尔维茨、马斯金和梅耶森,2012年授予了夏普利.在本书编写过程中,2014年的诺贝尔经济学奖授予了让·梯若尔.这些学者对博弈论理论和应用的发展作出了巨大的贡献.

博弈论是研究冲突环境下的决策理论.一个成年人(甚至一个中小小学生)每天都会遇到一些决策问题,小到饮食和购物,大到各种各样的工作.人与自然以及人与人之间的关系永远是相互依存又相互冲突,相互合作又相互竞争.因此,了解博弈论有助于人们的日常生活和工作.

但是,决不可认为在现实的决策中套用博弈论如同求解一元二次方程套用求根公式那样简单,博弈论是一种思维方式而不是一个公式,无法直接套用.一个决策的成功取决于决策者对影响“要实现的目的”的因素的了解,以及设计实现“目的”的一整套方案.博弈论描述了从哪些角度分析问题,在哪些条件下可以设计一些计划,以及一些计划如何设计.

博弈论的思想,很早就出现在各种各样的著作中,如我国古代军事家孙武的《孙子兵法》.用数学方法分析冲突现象也较早就已经出现,如在1838年古诺提出的“产量决策模型”就是一个标准的博弈模型.但博弈论起点,现在普遍认为是1944年冯·诺伊曼、摩根斯坦恩合著的《博弈论与经济行为》的问世.此时,博弈论较多研究的是合作博弈与零和博弈.在1950—1951年,纳什提出了“纳什均衡”,并证明了均衡的存在性,塔克发展了“囚徒困境”,纳什和塔克的工作奠定了非合作博弈论的基础.合作博弈论方面,也是在20世纪50年代,纳什和夏普利对“讨价还价博弈”,吉利斯和夏普利对“核”分别进行了论述,夏普利还提出了“夏普利值”,使合作博弈论也有了巨大的发展.在20世纪60年代,塞尔顿提出了子博弈完美纳什均衡,海萨尼对不完全信息提出了海萨尼转换,谢林对“谈判”和“聚焦点”进行了论

述. 奥曼提出了“谈判集”. 到 20 世纪 80 年代, 克瑞普斯和威尔逊研究了不完全信息动态博弈. 也是在这个年代, 非合作博弈论成为主流经济学的一部分, 甚至可以说成为微观经济学的基础. 这是因为当经济学家开始重点研究具有理性行为、但只有有限信息的个体时, 信息就成为许多模型的焦点, 同时在研究个体的行为时, 也自然要研究个体行为的时间顺序, 而博弈论为这两方面问题(信息和时间顺序)提供了有力的研究工具. 著名经济学家让·梯若尔说:“正如理性预期使宏观经济学发生革命一样, 博弈论广泛而深远地改变了经济学家的思维方式.”反过来, 经济学和经济学家对博弈论的贡献也越来越大. 与此同时, 博弈论在其他学科里的应用也越来越广泛, 与其他学科的相互促进也越来越大. 例如, 虽然生物的进化不是生物的主观选择, 但生物学家使用博弈论较好地解释了不少生物学问题. 同时使博弈论中一个很强的、客观现实中不宜达到的理性人假设能够减弱, 产生了演化博弈论. 1954 年, 伊萨克提出微分博弈后, 微分博弈的研究也在不断加深. 进入 21 世纪以来, 博弈论在动态、随机、合作和学习等方面也有了进一步的发展.

本书共分 9 章: 第 1 章为博弈的基本要素和概念, 讲述博弈论的一些基本概念; 第 2 章为完全信息静态博弈, 叙述博弈的策略型和纳什均衡; 第 3 章为完全且完美信息动态博弈, 内容是博弈的扩展型、子博弈完美纳什均衡、逆推归纳法和重复博弈; 第 4 章为完全但不完美信息动态博弈, 重点是贝叶斯博弈、贝叶斯均衡、二手车模型和委托代理模型; 第 5 章为不完全信息静态博弈, 有海萨尼转换和机制设计; 第 6 章为不完全信息动态博弈, 主要有信号传递和信号甄别, 均衡概念的总结; 第 7 章为合作博弈, 叙述合作博弈的一些主要的解概念及对实际问题的应用; 第 8 章为演化博弈, 内容有演化稳定策略、复制者动态和学习博弈; 第 9 章为微分博弈, 介绍了变分法和 HJB 方程, 以及从微分博弈的角度阐述非合作博弈和合作博弈中的一些解概念. 第 7 至第 9 章在许多博弈论教科书中是没有的, 本书试图较全面地介绍博弈论.

回首往事, 我讲述博弈论课程已有十几年了, 在这期间, 有不少同仁好友建议我写一本教材, 但由于种种原因, 主要是我懒散, 一直没有成稿, 很是对不起各位师长、同仁和听过我课的学生.

感谢同济大学数学系的几任领导和系里的各位同事, 他们不断在方方面面给了我大量的指导和帮助, 特别是殷俊峰教授, 没有他就不会有这本书. 也感谢数学系办公室的廖洒丽老师、郁霞老师和樊雅娟老师的大力帮助. 感谢上海社会科学院的朱平芳老师和上海市数量经济学会的各位老师的指导和帮助. 当然, 要感谢的人还有许许多多, 在此也无法一一列出他们的姓名.

由于笔者水平有限, 本书中肯定有许多缺点和错误, 恳请广大读者批评指正.

马洪宽

2014 年于同济大学数学系

# 目 录

## 前言

第 1 章 博弈的基本要素和概念	1
1.1 博弈的基本要素	1
1.2 博弈的分类	5
1.3 博弈问题的解及涉及的一些概念	7
习题	8
第 2 章 完全信息静态博弈	9
2.1 博弈的策略型	9
2.2 纳什均衡	11
2.3 混策略	18
2.4 古诺模型	20
2.5 有多个纳什均衡的博弈	25
2.6 纳什均衡的存在性	29
习题	44
第 3 章 完全且完美信息动态博弈	48
3.1 扩展型	48
3.2 子博弈完美纳什均衡	56
3.3 讨价还价模型	62
3.4 有同时行为的动态博弈	64
3.5 重复博弈	69

3.6 无限次重复博弈	77
3.7 无名氏定理	83
习题	85
<b>第4章 完全但不完美信息动态博弈</b>	87
4.1 基本概念	87
4.2 旧车模型	92
4.3 委托-代理模型	96
4.4 精炼贝叶斯均衡	101
习题	105
<b>第5章 不完全信息静态博弈</b>	107
5.1 海萨尼转换	107
5.2 贝叶斯纳什均衡	111
5.3 拍卖	113
5.4 机制设计	121
习题	125
<b>第6章 不完全信息动态博弈</b>	127
6.1 基本概念	127
6.2 信号传递博弈	137
6.3 劳动力市场模型	143
6.4 非合作博弈的均衡概念的归纳	145
习题	150
<b>第7章 合作博弈</b>	152
7.1 基本概念	152
7.2 核心及稳定集	157
7.3 夏普利值	161

7.4	谈判集、内核、核仁 .....	169
7.5	有冲突要求权的标的物的分配 .....	177
7.6	联盟 .....	182
	习题 .....	185
<b>第 8 章</b>	<b>演化博弈</b> .....	<b>186</b>
8.1	导论 .....	186
8.2	演化稳定策略 .....	192
8.3	复制者动态 .....	194
8.4	学习博弈 .....	199
	习题 .....	205
<b>第 9 章</b>	<b>微分博弈</b> .....	<b>207</b>
9.1	变分法 .....	207
9.2	最优控制 .....	213
9.3	非合作微分博弈 .....	223
9.4	合作微分博弈 .....	229
	习题 .....	234
	<b>参考文献</b> .....	<b>235</b>



# 第 1 章 博弈的基本要素和概念

本章共分两节,第 1 节叙述博弈的基本要素;第 2 节介绍博弈的一些分类。

## 1.1 博弈的基本要素

博弈论的一种定义是“从衡量利弊得失角度出发,分析形势从而决定‘对策’”。那么怎样衡量利弊?怎样分析形势?用博弈论的方法是如何讨论问题的?用博弈论的方法讨论问题首先要考虑哪些方面?

一个人要组织某项活动,并且希望把活动尽可能搞成功。他要考虑会有哪些人来参加?各人在活动中有哪些行为可以选择?活动结束后各人会得到什么?各人知道些什么?谁先行为谁后行为?这些对应了博弈的五要素:局中人、策略集、收益、信息和行动顺序。(实际上,博弈论研究问题要考虑六个因素,第六个因素是外部环境,因为外部环境是客观存在,不是人的主观决策,所以说成五要素,后面读者会发现博弈论考虑问题时经常讨论外部环境。)

### 1.1.1 局中人

局中人就是在博弈中独自决策最后获得相应结果的个体。局中人可以是单个人,如两个人下棋,每个棋手就是一个局中人;可以是一个团队,如两个篮球队在比赛,每个球队就是一个局中人;可以是一个组织或企业,国美和苏宁在竞争,国美和苏宁各是一个局中人;也可以是一个国家或数个国家的联盟,如欧洲的一些国家组成欧盟和其他经济体竞争,欧盟就是一个局中人。

博弈理论家关于局中人一般有局中人是理性的基本假设。即假设局中人作的决策与局中人追求的目的是一致的。博弈论建立在决策理论的基本结论的基础上,因此博弈论中也假设每个局中人的目的是其最大化收益的期望值,局中人的收益可以用一个数来表示,或者说局中人的收益可以量化。当分析一个博弈问题时,同博弈理论家或社会科学家一样,博弈中的局中人知道理论家关于博弈知道的每件事情,且关于问题能作理论家能作的推理。理性人不等于自私的人,随着个人偏好

的不同,理性人可能是利己主义者,也可能是利他主义者。

理性可分为完全理性和有限理性。如果一个局中人有博弈所需要的一切分析能力,并且行为上不会犯失误等任何错误,则称该局中人有完全理性。如果一个局中人在分析、判断和行为上有任何一点失误,则称这个局中人(只)有有限理性(或称这个局中人不是完全理性的)。从上述定义可以了解到完全理性的局中人是并不存在的。为了叙述的方便,在讲述博弈论的概念和方法时,即在除了第 8 章外的各章中,假设局中人是完全理性的,仅在第 8 章讨论有限理性的问题。

理性也可分为个体理性和集体理性。追求个体利益最大化的称为个体理性,追求集体(团体)利益最大化的称为集体理性。集体理性主要在第 7 章合作博弈中强调,其他各章主要强调的是个体理性。

### 1.1.2 策略

一个策略是一个局中人的完整的、相机抉择的行动计划。局中人的一个行动是局中人在博弈的某个时间点(或某个时刻)的一个选择。在简单情况中,一个策略就是一个选择,也就是说,简单情况中,一个计划里只有一个选择;复杂的时候,面对的是一系列选择。如便士博弈中,取“正”就是一个策略。一个企业选择的一个产量,该产量就是这个企业的一个策略。一个商家选择一个价格,该价格就是这个商家的一个策略。两人下象棋,黑棋第一步飞象,红棋第 1 步跳马;黑棋第二步拱卒,红棋第 2 步进炮;黑棋第三步,……,到某人的某一步,棋下出结果。此时,黑方走的所有步为黑的一个策略,红方走的所有步为红的一个策略,飞象不是一个策略,仅仅是黑方一个策略中的一个行为或一个步骤。两个国家交战,一个国家发起了一场战役,这场战役的整个作战计划就是一个策略。

**定义** 一个局中人的所有的策略的全体称为这个局中人的策略集。

### 1.1.3 收益

一个博弈结束后,每个局中人从这个博弈中的获得:可能是经济利益、可能是荣誉等,称为这个局中人的收益(或支付)。本书假设局中人的收益都是可以量化的,即可以用数字表示,但要注意不少收益是不能随意量化的,或者说不大能用数字表示,如安全感、荣誉感等。收益类似于经济学中的效用,是一定的行为后的满足程度或自我感受,而不一定是一个数。收益可以进行自我比较,同一个局中人在不同时刻、不同状态下的收益可以进行比较,而不同局中人在同一个时刻、同一种状态下的收益就不一定能进行比较。收益可以自我比较的性质使得即使说不出收益到底是多少,但可以给各个不同的收益按照高低的次序排序。在博弈论中,对收益可以量化的博弈,也是通过比较收益的高低来进行策略的选择,这样,不可以量化

的收益和可以量化的收益讨论的方法也就基本一致了。一个博弈中,每个局中人选定一个策略,所有局中人各选定的策略就构成一个策略组合,过去策略组合也称为“局势”。每个局中人的收益都是策略组合的函数。注意,在实际中,要给出一个很正确的收益函数是比较困难的,在后面章节中,会不断地提及这一点,第8章演化博弈里还叙述了近似收益。

**例(便士博弈)** 王略、李策两人各持一枚硬币,同时置于桌面上,如朝上的花色相同,李策给王略一元;如朝上的花色相反,王略给李策一元,试分析该问题。

**注意** 硬币有两面,本书一直假设一面写有“正”,另一面写有“反”。另外,本书也时常出现一元、一万元,这可以是具体的一元、一万元,也可以是泛指的一定量的货币。

**解** 这个博弈中,局中人为王略和李策。

王略和李策的策略集相同,都是{正,反}。

前面,未加说明地提到,收益是策略组合的函数。现从这个例子来研究讨论。

如王略取“正”时,李策取“正”,导致的策略组合为(正,正),则王略的收益为1;李策取“反”,导致的策略组合为(正,反),则王略的收益为-1。自己的策略没有变,但是策略组合变了,收益也就变了,所以收益是策略组合的函数。当王略知道李策取“正”时,王略必定取“正”;知道李策取“反”时,王略必定取“反”。这样王略可以获得1。而当李策知道王略取“正”时,李策必定取“反”;知道王略取“反”时,李策必定取“正”。这样李明可以获得1。自己的收益不但取决于自己的策略,还取决于他人的策略;自己的策略受他人策略的影响,自己的策略也影响他人的策略。

#### 1.1.4 信息

大家都知道在现实的社会活动中,信息是很重要的。在我国古代的著名军事著作《孙子兵法》中,就有多处论及信息的重要性,如“知己知彼,百战不殆”等等。但要注意信息不仅仅包含有消息的成分,还包含有知识的成分。博弈论里涉及的信息概念当然是与博弈有关的知识。博弈论中主要的信息概念有完全信息、不完全信息、完美信息和不完美信息。

一个博弈中,如一局中人对各种策略组合下,所有局中人的收益都完全了解,则称该局中人有完全信息。一个博弈中,如一局中人对有些策略组合下,有些局中人的有些收益不完全了解,则称该局中人有不完全信息。注意,有不完全信息不是完全没有信息,后面会叙述至少要了解局中人的类型,以及各种类型的概率分布。如果是完全没有信息,那就不能用博弈论的方法去处理这个决策问题。因此,一个决策是正确决策的前提是要有尽可能充分的实际调查。

一个动态博弈中,轮到行为的局中人对此前的博弈进程完全了解,即能完全观

测到已行为的局中人的所有行为,则称该局中人有完美信息.一动态博弈中,轮到行为的局中人对此前的博弈进程不完全了解,即对已行为的有些局中人的有些行为不能完全观测,则称该局中人有不完美信息.

私人信息也是一个常出现的概念,根据私人信息的具体内容可将局中人分成不同的类型.

博弈论中有一个“共同知识”的假设:

**定义** 有一信息(或知识、事件) $I$ ,每个局中人知道 $I$ ;每个局中人知道(每个局中人知道 $I$ );每个局中人知道[每个局中人知道(每个局中人知道 $I$ )];……;每个局中人知道(每个局中人知道(……(每个局中人知道 $I$ )……));……,则称 $I$ 为共同知识.

“便士博弈”中,出现策略组合(正,正)时,有共同知识:王略知道“王得1、李得-1”,李策知道“王得1、李得-1”;王略知道(李策知道“王得1、李得-1”),李策知道(王略知道“王得1、李得-1”);王略知道[李策知道(王略知道“王得1、李得-1”)],李策知道[王略知道(李策知道“王得1、李得-1”)],…….同样,其他策略组合对应的收益也是共同知识.

有了共同知识的假设,减少了许多推理上的障碍.如有一个著名的例子.

**例** 有一个地区有三个人,这三个人都有完美的推理能力,且任一个人发现自己犯错后会脸红.三个人在爬山时,脸上都蹭到了泥土,但这个地区有一个习俗,不能直接对某个人说你怎么样,因此每个人都不知道自己脸上有泥土.过了一会,在山道上碰到一人,这人看着他们说,你们中(至少)有一人脸上有泥土,三个人相互看了会,都脸红了.一起走到泉水旁,洗了脸.试问:这三个人为什么知道自己脸上有泥土?(这个推理的关键是:三个人有共同知识“有一人脸上有泥土”)

**解** 记三个人为甲、乙、丙.将三个人相互看的时间分成三个小的区间.如果只有一个人脸上有泥土,那个脸上有泥土的人在第一个时间区间由另外两人脸上没有泥土而得出自己脸上有泥土,他马上脸红了.第一个时间区间没有人脸红,说明三个人中至少有两个人脸上有泥土,但如果甲的脸上没有泥土,则乙和丙在第二个时间区间必定推出自己脸上有泥土而脸红.第二个时间区间仍无人反应,说明乙和丙都看到了两个人脸上有泥土,因此甲知道甲的脸上有泥土.

### 1.1.5 行动顺序

行动顺序这个概念的意义从字面上就很明确.但是行动顺序很重要,相同的局中人和相同的策略集,行动顺序不同,每个局中人的最优策略可能就不同,导致最后的收益就不一样.后面的斯塔克博格模型就清楚地说明了这一点.当然相同的局

中人和相同的策略集,行动顺序不同仍然是不同的博弈.

### 1.1.6 一些记号

博弈就是处在某种环境下的一些局中人,受制于具体的规章制度,从各自的策略集中同时或先后,一次或多次选择行为并实施,最后各自取得相应结果的过程.

用上面五个要素确定的问题,通过博弈论系统的研究从而得到合理的策略选择,并推测和观测这合理选择时导致的博弈结果,分析这些结果的意义.

一个博弈通常用一个大写字母  $G$  表示,或记为  $G(N, S, u, p, T)$ ,其中,  $N$  表示局中人的集合,也称为局中人空间;  $S$  表示策略空间,由该博弈中所有局中人的策略集构成;  $u$  表示收益空间,由每个局中人的收益构成;  $p$  表示信息空间;  $T$  表示类型空间.

对于一个博弈中的所有局中人,依据某种客观原因或者某个人的主观选择将其编号为:局中人 1,局中人 2,……,局中人  $n$ . 也记为局中人  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). 一个局中人编成几号不一定要有理由,但一旦编号确定后,在博弈过程中就不能随意地更改.

用  $S_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 表示局中人  $i$  的策略集,用  $\alpha_i$  或  $\alpha_{ij}$  表示局中人  $i$  的一个泛指的策略.

一个博弈中,每个局中人都取定一个策略,这些取定的策略就构成一个策略组合. 则一个策略组合表示为  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$ ,一般就记为  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ,或记为  $(\alpha_i, \alpha_{-i})$ ,一个策略组合是一个  $n$  维向量,这里  $\alpha_{-i} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$  是一个  $n-1$  维向量. 策略空间  $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ , 则

$$S_{-i} = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_n, \text{ 而 } \alpha_{-i} \in S_{-i}.$$

每个局中人的收益都是策略组合的函数. 用  $u_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 表示局中人  $i$  的收益,则

$$u_i = u_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \text{ 或 } u_i = u_i(\alpha_i, \alpha_{-i}).$$

对每一策略组合,所有局中人的各自收益构成一收益向量,该向量中分量(或坐标)的次序按照局中人的编号排序.

## 1.2 博弈的分类

人们为了讨论问题的方便,常将他们所讨论的问题分类. 根据人们讨论的侧重点不同,博弈可以分为不同的类型.

### 1.2.1 合作博弈和非合作博弈

如一博弈中,各局中人间达成了具有约束力的协议(违反该协议必受到惩罚),则称该博弈为合作博弈.一个博弈中,局中人间没有具有约束力的协议,那么此博弈就称为非合作博弈.

本书先讨论非合作博弈,讨论非合作博弈的目的不是为了不合作,而是为了合作.生产中的分工合作是近代社会高速发展的一个主要原因.一个人只干一种工作,可以节省一种工作转向另一种工作的转移时间(如一个在公司工作的人要回家烧饭吃,和他在公司食堂吃饭).一个人只专注一项工作,就能比较快地熟练这项工作,也比较有可能发现简便且快速地完成这项工作的方法,发明省时或省力地完成这项工作的工具.非合作博弈不是局中人就不和平共处,人们提到非合作博弈往往会朝“零和博弈”这个极端的情况去联想,认为局中人的利益完全是相对的,完全没有任何共同利益.绝大多数非合作博弈中,局中人是具有共同利益的.同时,局中人因为自己的个人利益,也会合作,如后面将叙述的“重复博弈”.非合作的意思就是局中人考虑问题时只考虑自己的个人收益多少,不关注其他方面.

### 1.2.2 静态博弈和动态博弈

如一博弈中,所有的局中人都只有一次行为机会并且他们在信息意义下同时行为,则称此博弈为静态博弈.所谓信息意义下的同时,就是指一局中人在行为前不能观测其他局中人的行为.时间意义上的同时,必定是信息意义上的同时,反之则不一定.

静态博弈中,每个局中人都只有一次行动机会,此时,策略、行动和选择三者是同一个量.“便士博弈”是静态博弈.

如一博弈中,有些局中人有不止一次的行为机会,或有些局中人在行为前能够观测到一些他人的行为,则称该博弈为动态博弈.打扑克、下棋等许多事情都是动态博弈.

如果一个博弈中,所有的局中人都具有完全信息,那么该博弈称为完全信息博弈.这样,博弈又分类为完全信息静态博弈、完全且完美信息动态博弈、完全但不完美信息动态博弈、不完全信息静态博弈和不完全信息动态博弈.“便士博弈”是完全信息静态博弈.

### 1.2.3 其他分类

博弈还可以从其他的一些角度进行分类.

从局中人的数量多少,博弈可以分为两人博弈、三人博弈、更多人博弈或  $n$  人

博弈.有人还提出了单人博弈,本书认为单人博弈就是最优化问题,因此本书不讨论单人博弈.

从局中人的策略集中的元素个数,可以将博弈分为有限博弈和无限博弈.一个博弈中如所有的局中人的策略集中的元素个数都是有限的,则称该博弈为有限博弈;如一博弈中至少有一个局中人的策略集中的元素个数是无限的,则称该博弈为无限博弈.

从收益方面,博弈又可以分为零和博弈、常和博弈及变和博弈.

一个博弈中,对任何策略组合,各局中人的收益之和为零,则称此博弈为零和博弈.前面已举的“便士博弈”的例子就是一个零和博弈.

一个博弈中,对任何策略组合,各局中人的收益之和为一固定的常数,则称此博弈为常和博弈.一些人分遗产或分利润就是常和博弈.

如一博弈中,随着策略组合的不同,各局中人的收益之和发生变化,则称此博弈为变和博弈.大多数的社会活动都是这种情况,博弈论主要讨论变和博弈.

不同于上面的分类角度,还有两个隶属于博弈论的分支学科:演化博弈和微分博弈.

演化博弈论起源于生物学家用博弈论来解释生物的进化,提出了演化稳定策略等概念,产生了演化博弈论,同时演化博弈论又把对局中人的假设从完全理性变为有限理性,促进了博弈论的发展.

微分博弈是最优控制问题中,研究有多个人在作控制时,用博弈论的方法讨论问题.然后,反过来又推动了时间变化博弈论问题的讨论.博弈论中的逆推归纳法也来源于最优控制中的动态规划方法.

### 1.3 博弈问题的解及涉及的一些概念

从数学角度讨论问题,寻找问题的解当然是一个重要部分.非合作博弈的解称为均衡;合作博弈的解有较多的术语,如核心、夏普利值等;微分博弈中,除了上面出现的解概念外,因其讨论的一个角度是最优控制,因此有时解也称为控制.

博弈论是讨论或研究决策的理论.决策理论曾经分成这四个分支:①最优化——一个个体在各种条件确定的状态下进行决策;②不确定型(或不肯定型)决策;③风险型决策;④冲突型决策——博弈论.

不肯定型是指局中人对一项活动最终到底会发生哪一个具体的结果不确定,同时局中人也无法确切地度量每一种结果发生的概率.

风险型是指局中人对一项活动最终到底会发生哪一个具体的结果不确定,但局中人知道共有哪几种可能的结果,以及这些结果的概率分布.

博弈论即冲突型决策使用了前面三种类型中的方法求收益最大,既使用最优化的方法求期望收益最大,又使用风险型或者不肯定型的方法。

在西方古典的经济理论中,主要讨论完全竞争的市场。在完全竞争的市场中,这个行业有许多多个买者和许多多个卖者,其中任何一个个体都不具有影响和改变商品的市场价格的力量,他们都只能是价格的接受者。同一数量的同种商品之间完全同质,不存在任何差异。关于商品,所有的卖者和买者都具有相同的充分的信息。所有的卖者和买者都可以自由地参加或退出市场活动。

但是,完全竞争市场是一个理想状态,现实中一般不存在,最接近完全竞争的市场是股票市场。现实中的市场基本上都是不完全竞争市场。不完全竞争市场分为:垄断竞争、寡头竞争和完全垄断。垄断竞争市场比较接近完全竞争市场,在现实中普遍存在。在垄断竞争市场上,这个行业厂商个数比较多,竞争程度比较大。这些厂商接受市场价格,但对价格有一定的影响力,厂商进入或离开市场相对比较容易。这些厂商可以形成一些集团,因此这些厂商之间有可能形成联盟。寡头是指卖者人数较少,而买者人数较多。寡头垄断市场在现实中也是普遍存在的,当一个市场或一个行业只有两个寡头时,也称为双寡头垄断或双头垄断。因为厂商的人数较少,因此每个厂商对商品价格的影响都比较大;厂商不是价格的接受者,但也不能独自决定价格,一个厂商在决策时要考虑其他厂商的反应。各个寡头的产品之间可以基本相同,也可以有所差异。厂商进入或者离开这个市场都比较困难。博弈论对寡头市场讨论得比较多,其中古诺的双寡头产量决策模型是博弈论中的经典模型。完全垄断市场是一个厂商面对许许多多多个消费者,因为行业内部只有一个厂商,产量和价格都由该厂商独自决定,但厂商绝不可以随意决策,他必须遵守利润最大化的原则。后面将提及垄断厂商的定价更复杂。同时垄断也容易造成企业的技术水平和管理水平停滞不前、产品落后,导致企业越来越没有竞争力。但不论是不完全竞争的市场,还是现实社会的其他领域,信息都相对缺乏,并且充满了信息不对称。这些古典经济学无法解释的问题,使用博弈论的方法能够得到较好的解释。

## 习 题

- (1) 试举出一例,说明它是一个博弈,并说明它是哪一种类型的博弈?
- (2) 举出一个博弈例子,指出其中的各个博弈要素。
- (3) 什么是博弈论? 博弈论主要研究哪些问题? 试举例说明。
- (4) 举出一些决策的例子,并说明其中哪些应该用博弈论的方法进行讨论。
- (5) 试对完全信息静态博弈、完全且完美信息动态博弈、不完全信息静态博弈和不完全信息动态博弈各举出一个例子。



## 第 2 章 完全信息静态博弈

任何一个学科,在讨论一个问题时,要考虑的因素越少,模型就越容易建立.然后再逐步增加要考虑的因素,放松限制条件,使之与客观现实问题越来越接近,但要做到完全一致似乎很少.在博弈论中,完全信息静态博弈的模型最容易建立,因此,首先讨论完全信息静态博弈.本章共有 6 节,第 1 节是博弈的策略型,第 2 节为纳什(Nash)均衡,第 3 节为混策略,第 4 节是古诺模型,第 5 节介绍一个博弈有多个纳什均衡时,几个特殊的处理方法,第 6 节证明纳什均衡的存在性.

### 2.1 博弈的策略型

#### 2.1.1 完全信息静态博弈的要素

如何建立一个博弈的数学模型,一般是根据博弈的要素来考虑博弈的模型结构.博弈论过去也称为对策论,对策论有三要素:局中人、策略集、收益(也称为支付).在完全信息静态博弈中,只要考虑这三个要素.因此过去的对策论主要讨论的是完全信息静态博弈.在完全信息静态博弈中,一个局中人的策略、行动和选择是同一个量.表示一博弈的一个较简单的方法是用策略型.用策略型定义一个博弈,仅需指明博弈中局中人集合,每个局中人可用的选择的集合以及局中人的收益依赖其选择的方式.在研究策略型博弈时,通常假设,所有的局中人都同时地选择其策略,则策略型博弈的分析里不存在时间元素.也就是说,策略型是一个静态模型.所以用策略型可以表示完全信息静态博弈.形式上,策略型博弈  $G$  形如  $G = (N, S, u)$ , 其中  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  为一非空集合,  $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ ,  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $\forall i \in N$ , 即  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $S_i$  是非空集合,  $u_i$  为  $S$  到实数集  $\mathfrak{R}$  的一函数.

这里  $N$  为博弈  $G$  的局中人的集合,任取局中人  $i$ ,  $S_i$  为  $i$  的可用的(纯)策略的集合.当进行策略型博弈  $G$  时,每个局中人  $i$  需选  $S_i$  里一策略,  $N$  里每个局中人所选的策略组成一个策略组合,当然  $S$  为所有可能的策略组合的集合.任取  $S$  里的