

國定教科書

初中
代數

(下)

國定教科書

初中
代數

(下)



中華民國三十年二月初版
中華民國三十一年一月再版

民國卅壹年六月
臨時改正定價

國幣貳元五角五分

國定教科書
初

編纂

印刷

分銷

編輯大意

1、 本書依照本部最近頒布修正初中算學課程標準編輯,分上下兩冊,供初中第二及第三學年之用。

2、 編者根據教授算學之經驗,以爲初中學生學算術後,對於計算數字問題雖有相當把握,但對於數之意義及範圍未能認識清楚,譬如說「甲乙丙三人,各有法幣五元,問三人共有幾元？」即程度最差的學生亦能回答,如再問「 m 人各有法幣 n 元, m 人共有法幣幾元？」恐沒有幾人能回答得正確,所以編者在開始即注意代數與算術之範圍,練習學生之思想,使漸能代數化。

3、 初等代數中方程式爲最重要之一部份,而初學對於方程式應用問題每苦無

從着手,本書於方程式練習題,臚列甚詳,且分類舉例,示以解法,俾學者有舉一反三之益。

4、批改算學練習簿,爲教者最感苦痛及時間最不經濟之一事,學生往往從事抄襲,自欺欺人,編者主張多用黑板練習,凡本書練習題深望一一令學者在黑板上輪流演算一過,惟恐題數過多,有時間不敷之虞,故本書練習題不過事多選。

目 次

第 七 章

乘方和開方 根數和虛數

第二二節	指數.....	1
	練習題(五三)——(五四)	
第二三節	複式乘方.....	8
	練習題(五五)	
第二四節	開平方.....	10
	練習題(五六)	
第二五節	開立方.....	16
	練習題(五七)	
	雜題八	
第二六節	根數.....	21
	練習題(五八)——(五九)	
第二七節	虛數.....	36
	練習題(六十)	
	雜題九	

第 八 章

二 次 方 程 式

- 第二八節 二次方程式的解法和應用問題……45
練習題(六一)——(六四)
- 第二九節 二次方程式的討論……………65
練習題(六五)——(六六)
- 第三十節 二次方程式的圖解……………73
練習題(六七)
雜題十

第 九 章

二 次 方 程 式 的 應 用

- 第三一節 不等式…………… 84
練習題(六八)——(六九)
- 第三二節 整方程式……………91
練習題(七十)——(七二)
- 第三三節 無理方程式…………… 100

練習題(七三)

第三四節 聯立二次方程式…………… 106

練習題(七四)——(七五)

第三五節 餘數定理…………… 117

練習題(七六)——(七七)

雜題十一

第 十 章

比例,級數,二項式定理

第三六節 比…………… 130

練習題(七八)

第三七節 比例…………… 134

練習題(七九)

第三八節 變數法…………… 144

練習題(八十)——(八一)

第三九節 等差級數…………… 149

練習題(八二)

第四十節 等比級數…………… 155

練習題(八三)

第四一節	二項式定理.....	159
------	------------	-----

練習題(八四)

雜題十二

第 十 一 章

對數同利息算

第四二節	對數.....	166
------	---------	-----

練習題(八五)——(八六)

第四三節	複利.....	184
------	---------	-----

練習題(八七)

雜題十三

第 七 章

乘方和開方 根數和虛數

第二二節 指 數

148. 乘方. 一數自己連乘若干次的乘積稱爲乘方.

例如 $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, 8 爲 2 的三乘方;

$a^2 = a \cdot a$, a^2 爲 a 的二乘方;

$(2x)^4 = 16x^4$, $16x^4$ 爲 $2x$ 的四乘方, 餘類推.

二乘方, 三乘方又常稱爲平方, 立方.

149. 指數定律一. 在上冊 §25, 可知

$$2^2 \times 2^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5,$$

從指數看來, 便有下面關係. $2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$;

推廣起來, 應有

$$a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5;$$

同樣 $a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m\text{個}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{個}} = a^{m+n}$

$$\therefore a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

推廣得 $a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}$; 餘類推.

法則. 求某數的幾個乘方的連乘積, 只須把他們的指數相加.

例. 求 $4x^2y^4 \times 5x^3y^2$ 的積.

$$\begin{aligned} \text{【答】 } 4x^2y^4 \times 5x^3y^2 &= 4 \times 5 \cdot x^{2+3} \cdot y^{4+2} \\ &= 20x^5y^6. \end{aligned}$$

150. 指數定律二. 在 §25, 可知

$$\frac{2^5}{2^2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 2^3, \text{ 從指數看來, 便有}$$

$$\frac{2^5}{2^2} = 2^{5-2} = 2^3$$

推廣起來, 應有 $\frac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3$,

$$\text{同樣 } \frac{a^m}{a^n} = \frac{a \cdot a \cdots (m \text{ 個})}{a \cdot a \cdots (n \text{ 個})} = a^{m-n}$$

$$\therefore \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (m > n)$$

法則.求某數兩個乘方相除的商,如分子指數大於分母的,只須從分子的指數減去分母的指數.

【註】 如分子指數小於分母的,結果是分數式.如要使這種情形,也符合於定律,須先定負指數的意義(見下面的 § 152).

例一. 求 $16a^4b^4 \div 8a^2b^3$ 的商.

【答】
$$\frac{16a^4b^4}{8a^2b^3} = 2a^{4-2}b^{4-3} = 2a^2b.$$

例二. 求 $4a^m \div (-2a^{m-4})$ 的商.

【答】
$$\frac{4a^m}{-2a^{m-4}} = -2a^{m-(m-4)} = -2a^4.$$

練 習 題 (五三)

求下式的積:

1. $3^3 \times 3^4.$

2. $5^2 \cdot (-5)^3.$

3. $a \cdot (-a)^2 \cdot (-a)^3$

4. $16x^2 \cdot 8x^4.$

5. $2x^2y^3 \cdot 15x^3y^2.$

6. $8x^3y^2 \cdot (-2xy^2).$

7. 負數奇次乘方和偶次乘方的性質號有無一定的規則?說出這規則.

求下式的商:

8. $5^3 \div 5$.

9. $7^8 \div 7^5$.

10. $(-3)^7 \div (-3)^5$.

11. $72a^5b^3 \div 12a^4b$.

12. $121x^7y^8 \div (-11x^5y^2)$.

13. $3ab^7c^8 \div ab^4c^3$.

14. $a^{n+1} \div a^{n-3}$.

15. $(4a)^{n+1} \div (2a)^{n-1}$.

16. $-x^{14}y^4 \div (-x^{12}y^4)$.

17. $15a^x \div 3a^x$.

18. $x^m \div (-x^m)$.

151. 零指數. 因為任何數除本數,結果都為1,如 $\frac{3}{3} = 1$, $\frac{2^3}{2^3} = 1$, 等等.

推廣起來,就是 $\frac{a^m}{a^m} = 1$.

如欲上述定律二,對於這種特例也能適合,必須令

$$a^0 = 1 \quad (a \text{ 是任何數})$$

因為按律應有 $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$ 也.

152. 負指數. 由除法,知 $\frac{2^2}{2^3} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$. 及 $\frac{a^2}{a^4} = \frac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^2}$. 如指數定律二中 $m > n$ 的

限制可以除去,應有

$$\frac{2^2}{2^3} = 2^{2-3} = 2^{-1}; \frac{a^2}{a^4} = a^{2-4} = a^{-2}$$

$$\therefore 2^{-1} = \frac{1}{2} \quad a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

同樣 $\frac{1}{a^m} = a^0 \div a^m = a^{0-m} = a^{-m}$

推廣來說,應有

$$\therefore a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

或

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}. \quad m < n$$

上式的 $-1, -2$ 稱為負指數,所以負指數是指明以 1 為分子的一個分數,或某乘方的逆數,如 $\frac{1}{2}$ 是 2 的逆數; $\frac{1}{a^2}$ 是 a^2 的逆數.

153. 指數定律三. 把下式 2^3 看作一個數,便有

$$(2^3)^4 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3, \text{再依定律一,}$$

$$= 2^{12}, \text{從指數看來,便有下面關係.}$$

係.

$$(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12}; \text{推廣起來,便應有}$$

$$(a^3)^n = a^{3 \cdot n} = a^{3n};$$

$$\therefore (a^m)^n = a^{mn}$$

法則.要去求一個方數的 n 次乘方,只須把 n 乘那方數的指數,用這乘積做新指數.

例. $\{(x^5)^2\}^3 = \{x^{5 \times 2}\}^3 = x^{5 \times 2 \times 3} = x^{30}$

154. 指數定律四. 把 5×3 看做一個單數,便有

$$(5 \times 3)^2 = (5 \times 3) \times (5 \times 3)$$

$$= 5 \times 5 \times 3 \times 3 = 5^2 \times 3^2;$$

推廣起來,便有

$$(ab)^2 = a^2 b^2;$$

$$\therefore (ab)^m = a^m \cdot b^m;$$

推廣便有 $(abc \cdots)^m = a^m b^m c^m \cdots$

法則.幾個數連乘積的 m 乘方,等於各數 m 乘方的連乘積.

例一. $(a^2b^{-1})^3 = (a^2)^3 \cdot (b^{-1})^3 = a^6 \cdot b^{-3} = \frac{a^6}{b^3}.$

例二. $(x^{-3}y^2z)^{-2} = \frac{1}{(x^{-3}y^2z)^2} = \frac{1}{x^{-6}y^4z^2} = \frac{x^6}{y^4z^2}.$

【注意】 以上所說各種定律,其中指數,都是整數.若是分數,各定律還可適合,但須先定分數指數的意義(見後面第二六節 § 169).

練習題 (五四)

求下列各式的值:

1. $3^{-2}.$

2. $(\frac{1}{2})^{-3}.$

3. $(2^{-3})^{-2}.$

4. $\frac{2^{-2} \cdot 3^{-3}}{(3.5)^{-2}}.$

5. $\frac{3^2 \cdot 2^{-3}}{2^2 \cdot 2^{-3}}.$

6. $(2^3 \cdot 3^{-3} \cdot 5)^{-1}.$

求下列各式的結果:

7. $a^2b^3 \div a^3b^4$

8. $(x^3)^7.$

9. $(a^{-2})^3.$

10. $(x^2y^3)^5.$

11. $(-2x^2y^3)^4$

12. $(-3x^{-1}y^2z)^3$.

13. $\frac{7x^{-2}y^2}{21x^{-1}y^{-3}}$.

14. $\left(\frac{(ab)^{-3}}{a^{-2}b^4} \cdot \frac{(a^{-1}b^3)^3}{a^2b^{-1}}\right)^{-2}$

設 m, n 表正整數, 試由負指數理證明下式:

15. $a^{-m} \times a^{-n} = a^{-(m+n)}$. 16. $(a^{-m})^{-n} = a^{mn}$.

第二三節 複式乘方

155. 二項式的乘方. 二項式的平方在第五章第十六節 §115 中已經述及, 現在再把他的三次方, 四次方直接乘出的結果寫在下面

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4.$$

【註】 二項式 n 次乘方的公式, 叫二項式定理, 在下文 §242 再說.

例一. 求 $2-x$ 的三次乘方.

【解】 $(2-x)^3 = 2^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot x + 3 \cdot 2 \cdot x^2 - x^3$