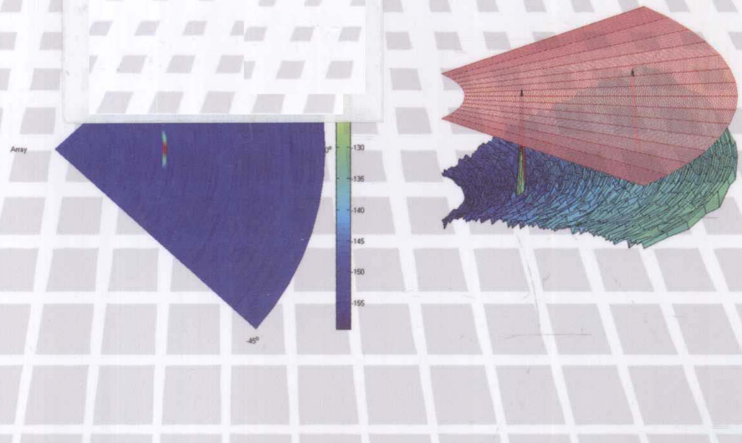
普通高等学校“十二五”规划教材

微积分
学习指导与习题解答

马少军　孙丹娜　主编



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

普通高等学校“十二五”规划教材

微积分学习指导与习题解答

马少军　孙丹娜　主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习指导与习题解答/马少军,孙丹娜主编. —北京:中国铁道出版社,2013.7
普通高等学校"十二五"规划教材
ISBN 978-7-113-17146-9

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①马… ②孙… Ⅲ. ①微积分—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第189982号

书　　名:微积分学习指导与习题解答
作　　者:马少军　孙丹娜　主编

策　　划:潘晨曦　　　　读者热线:400-668-0820
责任编辑:马洪霞　徐盼欣
封面设计:付　巍
封面制作:白　雪
责任印制:李　佳

出版发行:中国铁道出版社(北京市宣武区右安门西街8号　邮政编码:100054)
网　　址:http://www.51eds.com
印　　刷:三河市兴达印务有限公司
版　　次:2013年7月第1版　2013年7月第1次印刷
开　　本:720mm×960mm　1/16　**印张**:25　**字数**:509千
印　　数:1~4500册
书　　号:ISBN 978-7-113-17146-9
定　　价:42.00元

编写人员名单

主　编：马少军　孙丹娜

主　审：崔文善

副主编：张洪谦　张好治　吴自库　袁冬梅　王殿坤

参　编：王敏会　王忠锐　李桂玲　李冬梅　尹晓翠

孙金领　程　冰　于加举　陈秀荣　王　萍

前　　言

《微积分学习指导与习题解答》是《微积分》（马少军、赵翠萍、何延治主编，中国农业出版社出版）的配套教材，是编者多年教学经验的总结。本书不仅适用于高等农业院校，也可作为林、水、医等院校的学生学习《微积分》或《高等数学》的指导书，亦可作为报考农、林、水、医院校的研究生考生的复习参考书。

本书各章均由以下部分组成：

一、基本内容：列出了各章的基本理论知识和常用的计算公式。

二、基本要求：指出各章中每一部分内容应该掌握到什么程度，以便于读者在复习时合理分配力量。

三、习题解答：对《微积分》的每一节课后习题以及各章的自测题都做了全面详细的解答；另外，为考研的学生准备了六套综合测试题，并做了解答，以便于学生了解考研题型和难度。

本书内容丰富，解答明确，启发性强，既能巩固所学的理论知识，又能有效地提高读者运算能力和技巧，还可提高读者分析问题和解决问题的能力。

本书在编写过程中，得到了很多同行和专家的关心和支持，在此表示衷心感谢。

由于水平所限，书中难免存在不妥之处，敬请读者批评指正。

编　　者

2013 年 4 月

目　　录

第一章　函数与极限 …… 1

一、基本内容 …… 1

二、基本要求 …… 5

三、习题解答 …… 6

第二章　导数与微分 …… 24

一、基本内容 …… 24

二、基本要求 …… 27

三、习题解答 …… 27

第三章　中值定理与导数的应用 …… 51

一、基本内容 …… 51

二、基本要求 …… 56

三、习题解答 …… 57

第四章　不定积分 …… 83

一、基本内容 …… 83

二、基本要求 …… 86

三、习题解答 …… 87

第五章　定积分 …… 126

一、基本内容 …… 126

二、基本要求 …… 129

三、习题解答 …… 129

第六章　定积分的应用 …… 141

一、基本内容 …… 141

二、基本要求 …… 143

三、习题解答 …… 143

第七章　空间解析几何与向量代数 …… 159

一、基本内容 …… 159

二、基本要求 …… 165

三、习题解答 …… 165

第八章 多元函数微分学…… 178
一、基本内容 …… 178
二、基本要求 …… 182
三、习题解答 …… 182
第九章 多元函数积分学…… 211
一、基本内容 …… 211
二、基本要求 …… 217
三、习题解答 …… 217
第十章 微分方程…… 256
一、基本内容 …… 256
二、基本要求 …… 259
三、习题解答 …… 259
第十一章 级数…… 276
一、基本内容 …… 276
二、基本要求 …… 281
三、习题解答 …… 281
自测题…… 306
综合测试题与解答…… 361

第一章

函数与极限

一、基本内容

1. 函数的定义

如果有一个确定的对应规律 f,使得对于 D 中的每一个实数 x,都有一个唯一确定的实数 y 与之对应,则称 y 是 x 的函数,即为 $y=f(x)$. 其中 D 为函数的定义域,x 称为自变量,y 的取值范围称为函数的值域,y 称为因变量.

2. 函数的表示法

列表法、公式法与图解法是三种常用的函数表示法.

分段函数:在公式法中,当对应关系可以用两个或几个式子表示时,就称为分段函数.

3. 函数的几个特性

(1) 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上有定义,如果存在一个正数 M,使得对于 (a,b) 上的一切 x 都有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上是有界的,否则称为无界.

(2) 函数的单调性

如果函数 $f(x)$ 对于区间 (a,b) 内的任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调增加(或单调减少)的.

(3) 函数的奇偶性

如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 x,都满足 $f(-x)=f(x)$,则 $f(x)$ 称为偶函数;

如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 x,都满足 $f(-x)=-f(x)$,则 $f(x)$ 称为奇函数.

(4) 函数的周期性

对于函数 $f(x)$,如果存在一个不为零的数 l,使对于定义域内的任何 x,都有 $f(x+l)=f(x)$ 成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,使得 $f(x+l)=f(x)$ 成立的 l 中的最小正数称为 $f(x)$ 的最小正周期(简称周期).

4. 反函数与复合函数

(1) 反函数

设 y 是 x 的函数:$y=f(x)$,如果把 y 当作自变量,x 当作函数,则由关系式 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=f^{-1}(y)$,称为函数 $y=f(x)$ 的反函数,习惯记为$y=f^{-1}(x)$.

(2) 复合函数

如果 y 是u 的函数 $y=f(u)$,而 u 又是x 的函数$u=\varphi(x)$,且 $\varphi(x)$ 的函数值的全部或部分在 $f(u)$ 的定义域中,那么,y 通过u 的联系也成为x 的函数,称后一个函数是由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数,简称复合函数,记为 $y=f(\varphi(x))$,其中 u 称为中间变量.

5. 基本初等函数

基本初等函数是指:

(1) 常函数:$y=C$;

(2) 幂函数:$y=x^{\mu}$(μ 为实数);

(3) 指数函数:$y=a^{x}(a>0,a\neq 1)$;

(4) 对数函数:$y=\log_{a}x(a>0,a\neq 1)$;

(5) 三角函数:$y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\sec x,y=\csc x$;

(6) 反三角函数:$y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\operatorname{arccot} x,y=\operatorname{arcsec} x,y=\operatorname{arccsc} x$.

6. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合而构成的,并可用一个表达式表达的函数称为初等函数.

7. 数列的极限定义

设 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$ 是一个数列,简记为$\{x_n\}$,a 为一常数,如果对于任意给定的正数 ε(无论它多小),总有自然数 N 存在,使得当 $n>N$ 时,不等式$|x_n-a|<\varepsilon$ 总成立,则称数列$\{x_n\}$ 以常数 a 为极限,记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 或 $x_n\to a(n\to\infty)$,若数列$\{x_n\}$ 以 a 为极限,便说数列$\{x_n\}$ 是收敛的,且收敛于 a;否则,就说它是发散的.

8. 函数的极限

(1) $x\to x_0$ 时的极限

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的某个邻域内有定义(x_0 除外),如果对于任意给定的正数ε(无论它多小),总存在正数δ,使得对于适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$的一切x,相应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$,那么就称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 的极限,记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$.

(2) $x\to\infty$ 时的极限

设函数 $y=f(x)$ 对绝对值无论多么大的 x 都有定义,如果对于任意给定的正数

ε(无论它多小),总存在正数 X,使得对于适合不等式 $|x| > X$ 的一切 x,所对应函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$,那么 A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 的极限,记为 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A(x \to \infty)$.

类似地,可以定义 $x \to +\infty$ 和 $x \to -\infty$ 时函数的极限:$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ 和 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

9. 无穷小与无穷大

(1) 无穷小:如果对于任意给定的正数 ε(无论它多小),总存在正数 δ(或正数 X),使得对于适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$(或 $|x| > X$) 的一切 x,所对应函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)| < \varepsilon$,那么就称函数 $f(x)$ 为 $x \to x_0(x \to \infty)$ 的无穷小.

(2) 无穷大:如果对于任意给定的正数 M(无论它多大),总存在正数 δ(或正数 X),使得对于适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$(或 $|x| > X$) 的一切 x,所对应函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)| > M$,那么就称函数 $f(x)$ 为 $x \to x_0(x \to \infty)$ 的无穷大.

(3) 无穷小与无穷大的关系:若函数 $f(x)$ 为无穷大,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小. 若函数 $f(x)$ 为无穷小($f(x) \neq 0$),则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

10. 极限的运算法则及判别准则

(1) 有关无穷小的运算法则

① 有限个无穷小的和是无穷小;

② 有界函数与无穷小的积是无穷小;

③ 有限个无穷小的积是无穷小.

(2) 极限的四则运算法则

设 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 则:

① $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$;

② $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$;

③ $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B} \quad (B \neq 0)$.

(3) 极限存在的判别法

① 单调有界函数必有极限;

② 设 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$,且 $\lim g(x) = \lim h(x) = A$,则 $\lim f(x) = A$;

③ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$.

(4) 两个重要极限

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

11. 无穷小的阶

① 设 α 及 β 是同一极限过程中的两个无穷小.

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=0$,则称 β 是比 α 高阶的无穷小,记为 $\beta=o(\alpha)$;

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$,则称 β 是比 α 低阶的无穷小;

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=C\neq 0$,则称 β 与 α 是同阶的无穷小;

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=1$,则称 β 是与 α 等价的无穷小,记为 $\beta\sim\alpha$.

② 等价无穷小定理:设 $\alpha\sim\alpha'$,$\beta\sim\beta'$,且 $\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在,则 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

12. 连续性

(1) 连续性的定义

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的某个邻域内有定义,如果对于任意给定的正数 ε(无论它多小),总存在正数 δ,使得对于适合不等式 $|x-x_0|<\delta$ 的一切 x,相应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续.

函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点连续定义的另一种形式为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0.$$

由定义可知,函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点连续可解析为如下三条:

① 函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的某个邻域内有定义;

② 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在;

③ 该极限值为 $f(x_0)$.

上述三条与连续定义等价.

(2) 间断点的定义及分类

① 定义:不满足连续定义的点,即不满足与连续定义等价的三条中的任何一条的点,就称为函数的间断点.

② 分类:若 $y=f(x)$ 在间断点 x_0 处的左、右极限 $f(x_0-0)$,$f(x_0+0)$ 都存在,则称 x_0 为 $y=f(x)$ 的第一类间断点.

特别地,若还有 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$,则称 x_0 为 $y=f(x)$ 的第一类间断点中的可去间断点.

不属于第一类的间断点称为第二类间断点.

(3) 连续函数的性质

① 若 $y=f(x)$ 及 $y=g(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续,则 $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

② 若函数 $y=f(x)$ 在某区间上单调且连续,则其反函数 $x=\varphi(y)$ 在其相应的区间上也单调连续.

③ 若 $y=f(u)$ 在 u_0 处连续,$u=\varphi(x)$ 在 x_0 处连续,且 $u_0=\varphi(x_0)$,则 $y=f(\varphi(x))$ 在 x_0 处连续.

基本初等函数在其定义域内是连续的;初等函数在其有定义的区间上是连续的.

④ 闭区间上连续函数的性质:

最值定理:闭区间上连续函数一定有最大值和最小值.

介值定理:设 $y=f(x)$ 在$[a,b]$上连续,C 是 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何一个数($f(a)\neq f(b)$),则在(a,b)内至少有一点 ξ,使 $f(\xi)=C\ (a<\xi<b)$. 特别地,若 $f(a)\cdot f(b)<0$,则在(a,b)内至少有一点 ξ,使 $f(\xi)=0\ (a<\xi<b)$.

二、基本要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的定义域和对应法则这两个要素.

2. 掌握函数的单调性、有界性、奇偶性及周期性.

3. 理解反函数、复合函数与分段函数的概念,能熟练地分析复合函数的分解与复合过程.

4. 熟练掌握基本初等函数的定义、性质及图形.

5. 理解数列极限和函数极限的定义,能准确地用“ε-N”“ε-δ”语言叙述极限定义,并对一些简单极限存在性问题给予证明.

6. 理解左、右极限的概念,举例说明函数左、右极限不存在的情形,同时给出几何解释.

7. 理解无穷小的概念,证明无穷小量的运算法则及函数极限与无穷小量关系的定理.

8. 能正确应用极限运算法则.

9. 了解两个极限准则,熟练地掌握利用两个重要极限求极限的方法.

10. 理解函数在一点连续与间断的概念,会判别函数的连续性及间断点的类型.

11. 正确理解闭区间上连续函数的性质,能给出直观的几何解释.

三、习题解答

习题 1-1

1. $f(x)=|1+x|+\dfrac{(7-x)(x-1)}{|2x-5|}$，求 $f(-2)$.

解 $f(-2)=|1-2|+\dfrac{(7+2)(-2-1)}{|2\times(-2)-5|}=-2$.

2. $f(x)=\sqrt{4-x^2}$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f(-1)$，$f\left(\dfrac{1}{a}\right)$，$f(x_0)$，$f(x+h)$.

解 $f(0)=\sqrt{4-0}=2$；

$f(1)=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$；

$f(-1)=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$；

$f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\sqrt{4-\left(\dfrac{1}{a}\right)^2}=\sqrt{4-\dfrac{1}{a^2}}$；

$f(x_0)=\sqrt{4-x_0^2}$；

$f(x+h)=\sqrt{4-(x+h)^2}$.

3. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{3x+2}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{1-x}$；

(3) $y=\ln(x-2)$；　　(4) $y=\dfrac{1}{\lg|x-5|}$；

(5) $y=\sqrt{x^2-4}$；　　(6) $y=\dfrac{1}{1+x^2-2x}+\sqrt{x+2}$；

(7) $y=\dfrac{\sqrt{4-x}}{\ln(x-1)}$；　　(8) $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$.

解 (1) 要使函数有意义，须 $3x+2\geqslant 0$，所以 $x\geqslant-\dfrac{2}{3}$. 所以函数的定义域为 $\left[-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$.

(2) 要使函数有意义，须 $1-x\neq 0$，所以 $x\neq 1$. 所以函数的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

(3) 要使函数有意义，须 $x-2>0$，所以 $x>2$. 所以函数的定义域为 $(2,+\infty)$.

(4) 要使函数有意义，须 $\begin{cases}|x-5|>0\\ \lg|x-5|\neq 0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}x\neq 5\\ |x-5|\neq 1\end{cases}$，所以

$\begin{cases} x \neq 5 \\ x \neq 4; x \neq 6 \end{cases}$. 所以函数的定义域为$(-\infty,4) \cup (4,5) \cup (5,6) \cup (6,+\infty)$.

(5) 要使函数有意义,须 $x^2 - 4 \geqslant 0$,所以 $x \geqslant 2$ 或 $x \leqslant -2$. 所以函数的定义域为$(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$.

(6) 要使函数有意义,须$\begin{cases} 1 + x^2 - 2x \neq 0 \\ x + 2 \geqslant 0 \end{cases}$,所以$\begin{cases} x \neq 1 \\ x \geqslant -2 \end{cases}$. 所以函数的定义域为$[-2,1) \cup (1,+\infty)$.

(7) 要使函数有意义,须$\begin{cases} 4 - x \geqslant 0 \\ x - 1 > 0 \\ x - 1 \neq 1 \end{cases}$,所以$\begin{cases} x \leqslant 4 \\ x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$. 所以函数的定义域为$(1,2) \cup (2,4]$.

(8) 要使函数有意义,须 $x^2 - 3x + 2 \neq 0$,即 $x \neq 1, x \neq 2$. 所以函数的定义域为$(-\infty,1) \cup (1,2) \cup (2,+\infty)$.

4. 下列各题中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同?为什么?

(1) $f(x) = \lg x^2; g(x) = 2\lg x$;

(2) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}; g(x) = x\sqrt[3]{x-1}$;

(3) $f(x) = x; g(x) = \sqrt{x^2}$;

解 (1) 不相同. 因为定义域不同.

(2) 相同.

(3) 不相同. 因为对应关系不同.

5. 设 $\varphi(x) = \begin{cases} |\sin x| & 当 |x| < \dfrac{\pi}{3} \\ 0 & 当 |x| \geqslant \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$,求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right), \varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right), \varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right), \varphi(-2)$.

解 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \left|\sin\dfrac{\pi}{6}\right| = \dfrac{1}{2}$; $\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \left|\sin\dfrac{\pi}{4}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \varphi(-2) = 0.$$

6. 下列函数中,哪些是偶函数?哪些是奇函数?哪些既非奇函数又非偶函数?

(1) $y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$; (2) $y = xa^{-x^2}$;

(3) $y = \dfrac{\sin x}{x}$; (4) $y = \dfrac{x}{|x|}$;

(5) $y = 3x^2 - x^3$; (5) $y = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$.

解 (1) 因为 $y(-x) = \dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2} = \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = y(x)$,所以函数为偶函数.

(2) 因为 $y(-x)=(-x)a^{-(-x)^2}=-xa^{-x^2}=-y(x)$，所以函数为奇函数.

(3) 因为 $y(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{-x}=\dfrac{\sin x}{x}=y(x)$，所以函数为偶函数.

(4) 因为 $y(-x)=\dfrac{(-x)}{|-x|}=\dfrac{-x}{|x|}=-y(x)$，所以函数为奇函数.

(5) 因为 $y(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3$，所以函数既非奇函数又非偶函数.

(6) 因为 $y(-x)=\dfrac{a^{-x}+a^{x}}{2}=\dfrac{a^{x}+a^{-x}}{2}=y(x)$，所以函数为偶函数.

7. 设下列所考虑的函数在对称区间 $(-l,l)$ 上有定义，证明：

(1) 两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数.

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，奇函数与偶函数的乘积是奇函数.

(3) 定义在对称区间 $(-l,l)$ 上的任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

证明 (1) 设 $f(x),g(x)$ 均为偶函数，令 $\varphi(x)=f(x)+g(x)$；

则 $\varphi(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=\varphi(x)$.

所以 $\varphi(x)$ 为偶函数.

设 $f(x),g(x)$ 均为奇函数，令 $\varphi(x)=f(x)+g(x)$；

则 $\varphi(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)=-[f(x)+g(x)]=-\varphi(x)$.

所以 $\varphi(x)$ 为奇函数.

(2) 设 $f(x),g(x)$ 均为偶函数，令 $\varphi(x)=f(x)\cdot g(x)$；

则 $\varphi(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot g(x)=\varphi(x)$.

所以 $\varphi(x)$ 为偶函数.

设 $f(x),g(x)$ 均为奇函数，令 $\varphi(x)=f(x)\cdot g(x)$；

则 $\varphi(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=[-f(x)]\cdot[-g(x)]=f(x)\cdot g(x)=\varphi(x)$.

所以 $\varphi(x)$ 为偶函数.

设 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，令 $\varphi(x)=f(x)\cdot g(x)$；

则 $\varphi(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=[-f(x)]\cdot g(x)=-[f(x)\cdot g(x)]=-\varphi(x)$.

所以 $\varphi(x)$ 为奇函数.

(3) 设 $f(x)$ 为任意函数.

因为 $f(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$；

而 $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ 为偶函数；$\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ 为奇函数.

故结论成立.

8. 函数 $y=\lg(x-1)$ 在下列哪些区间上有界?

(1)$(2,3)$；　(2)$(1,2)$；　(3)$(1,+\infty)$；　(4)$(2,+\infty)$.

解　(1) 有界；(2)、(3)、(4) 均无界.

9. 验证下列函数在指定区间内的单调性：

(1) $y=x^2,(-1,0)$；　(2)$y=\lg x,(0,+\infty)$；

(3) $y=\sin x,\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$；　(4)$y=\cos x-x,[0,\pi]$.

解　(1) $y=x^2$ 在$(-1,0)$ 为单调减少的；

(2) $y=\lg x$ 在$(0,+\infty)$ 为单调增加的；

(3) $y=\sin x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$为单调增加的；

(4) 任取 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant\pi$,则

$y_1-y_2=(\cos x_1-x_1)-(\cos x_2-x_2)$

$\quad=(\cos x_1-\cos x_2)+(x_2-x_1)$,因为 $y=\cos x$ 在$[0,\pi]$为单调减少的，

所以 $x_1<x_2,\cos x_1-\cos x_2>0$；

又 $x_2-x_1>0$,所以 $y_1-y_2>0$.

所以 $y=\cos x-x$ 在$[0,\pi]$ 上为单调减少的.

10. 下列函数中哪些是周期函数?如是周期函数,指出其周期：

(1) $y=\sin(x-3)$；　(2) $y=\tan 3x$；

(3) $y=2+\cos(\pi x)$；　(4) $y=x\cos x$；

(5) $y=\sin^2 x$；　(6) $y=\sin(\omega x+\varphi)(\omega,\varphi$ 为常数).

解　(1) 是周期函数,周期 $l=2\pi$；　(2) 是周期函数,周期 $l=\frac{\pi}{3}$；

(3) 是周期函数,周期 $l=2$；　(4) 不是周期函数；

(5) 是周期函数,周期 $l=\pi$；　(6) 是周期函数,周期 $l=\frac{2\pi}{|\omega|}$.

习题 1-2

1. 求下列函数的反函数：

(1) $y=2\sin 5x$；　(2) $y=1+\ln(x+2)$；

(3) $y=\sqrt{1-x}$；　(4) $y=\frac{2^x}{2^x+1}$.

解　(1) 由 $y=2\sin 5x$，得$\frac{y}{2}=\sin 5x,x=\frac{1}{5}\arcsin\frac{y}{2}$.

所以 $y^{-1}(x)=\frac{1}{5}\arcsin\frac{x}{2}$.

(2) 由 $y=1+\ln(x+2)$,得 $x+2=e^{y-1},x=e^{y-1}-2$.

所以 $y^{-1}(x)=\mathrm{e}^{x-1}-2$.

(3) 由 $y=\sqrt{1-x}$,得 $x=1-y^2$.

所以 $y^{-1}(x)=1-x^2\quad(x\geqslant 0)$.

(4) 由 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$,得 $2^x=\dfrac{y}{1-y}$,$x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$.

所以 $y^{-1}(x)=\log_2\dfrac{x}{1-x}$.

2. 函数 $y=x^2(x\leqslant 0)$ 的反函数是下列哪种情况?

(1) $y=\sqrt{x}$;　　(2) $y=-\sqrt{x}$;

(3) $y=\pm\sqrt{x}$;　　(4) 不存在.

解　第(2)种情况.

3. 设 $f(x)=x^2,\varphi(x)=2^x$,求 $f(\varphi(x))$ 与 $\varphi(f(x))$.

解　$f(\varphi(x))=\varphi^2(x)=2^{2x}$,　$\varphi(f(x))=2^{f(x)}=2^{x^2}$.

4. 设 $\varphi(x)=x^3+1$,求 $\varphi(x^2)$ 与$[\varphi(x)]^2$.

解　$\varphi(x^2)=x^6+1,[\varphi(x)]^2=(x^3+1)^2=x^6+2x^3+1$.

5. 设 $f(x-1)=x^2$,求 $f(x+1)$.

解　令 $t=x-1$,则 $x=t+1,f(t)=(t+1)^2$.

所以 $f(x)=(x+1)^2$. 所以 $f(x+1)=(x+2)^2$.

6. 设 $f(x)$ 的定义域是$[0,1]$,问:

(1) $f(x^2)$;　(2) $f(\sin x)$;　(3) $f(x+a)\quad(a>0)$;

(4) $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$ 的定义域各是什么?

解　(1) $0\leqslant x^2\leqslant 1$,所以 $-1\leqslant x\leqslant 1$. 所以 $f(x^2)$ 的定义域为$[-1,1]$.

(2) $0\leqslant\sin x\leqslant 1,2k\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}$.

所以 $f(\sin x)$ 的定义域为$[2k\pi,2k\pi+\pi]$,$k\in\mathbf{Z}$.

(3) $0\leqslant x+a\leqslant 1$,所以 $-a\leqslant x\leqslant 1-a$.

所以 $f(x+a)(a>0)$ 的定义域为$[-a,1-a]$.

(4) $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}$,所以$\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a\\a\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}$.

当 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时,定义域为$[a,1-a]$;

当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时,函数无定义.

7. (1) 设 $f(x)=ax+b$,且 $f(0)=-2,f(2)=2$,求 $f(f(x))$;

(2) 设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$, $x>0$,求 $f(x)$.