

XIANDAI SHIFENXI

陈杰诚 王斯雷 编著

现代

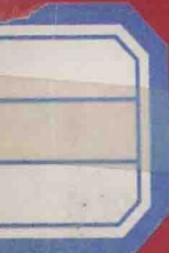
史

XIANDAI

SHIFENXI

分析

杭
州



一
版
社

现代实分析

陈杰诚 王斯雷 编著

前言

本书是为数学系高年级学生编写的教材，同时也适于本科学高年级学生以及研究生使用。书中所用的材料是国外的教科书和国外的教材。自 90 年代初，我们轮流讲授这门课程，发现原先采用的一些教材虽然各有优点，但是由于年代久远，有的已不适应当前的需要。另外，近年来在教学中发现一些新的问题，同时对一些传统的概念也有了新的认识。为了满足这些新的需求，

杭州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

现代实分析 / 陈杰诚, 王斯雷编著. —杭州: 杭州大学出版社, 1999. 9

ISBN 7-81035-592-9

I. 现… II. ①陈… ②王… III. 实分析 IV. 0174. 1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 31559 号

现代实分析

陈杰诚 王斯雷 编著

*

杭州大学出版社出版发行

(杭州天目山路 34 号)

*

杭州大学出版社电脑排版部排版 浙江上虞印刷厂印刷

850 毫米×1168 毫米 1/32 12 印张 312 千字

1999 年 9 月第 1 版 1999 年 9 月第 1 次印刷

印数: 0001—1000

ISBN 7-81035-592-9/O · 079

定价: 18.00 元

前 言

自 80 年代中期以来，“现代实

生的基础课程以及本科高年级学生的选修课程，采用的是国外的教材。

自 90 年代初, 我们轮流讲授这门课程, 发现原先采用的一些教材虽然各有所长, 但各有侧重、难易不同, 并不十分适合我们授课的需要, 特别是不能适应数学类各专业共同的需要, 从而产生了自编教材的想法。这本书就是在我们已试用多年的自编教材的基础上修改而成的。

本书主要介绍现代数学研究中涉及的几种重要的测度与积分理论,包括 Lebesgue 型抽象测度与积分、Radon 测度与 Daniell 积分、Haar 测度与积分、几何测度与容度、向量值测度与积分等。为了方便读者,我们在第一章介绍了涉及集合论、点集拓扑、Riemann 流形、拓扑群和线性泛函分析的若干基本知识;第二章至第五章介绍了抽象的 Lebesgue 型测度与积分理论,主要包括测度与积分、测度的分解与微分以及函数空间与算子插值等;第六章介绍了 Daniell 积分、拓扑空间上的 Radon 测度、拓扑群上的 Haar 测度与卷积以及欧氏空间上的 Fourier 变换等;第七章介绍了几何测度与容度,包括 Hausdorff 测度与维数、等周不等式、面积公式与余面积公式以及 Bessel 容度等;第八章介绍了向量值测度、Bochner 积分、Pettis 积分、Dunford 积分和 Bartle 积分等。

本书可作为数学系研究生及本科高年级学生“实分析”类课程的教材。不同专业方向的学生,可根据需要及学生的基础,选择其中的若干章节。比如,对于有集合论、点集拓扑、Riemann 流形、拓扑群、线性泛函分析基础的读者来说,可以跳过第一章;而第四章至第八章基本上是相互独立的,学生可以合理取舍。本书也可以作为数学工作者的

参考用书。

鉴于作者水平有限,书中难免会有错误与不足,欢迎读者提出宝贵意见,以便进一步修改、提高。

本书在编写过程中得到了浙江省青年人才基金、国家自然科学基金、浙江省自然科学基金、国家教委优秀青年教师基金、浙江省 151 人才基金等资助,出版时还得到了杭州大学学术著作出版基金的资助,在此深表谢意!

作者

1999 年 6 月

1.1	序与致谢	1
1.2	预备知识	1
1.3	矩阵与线性代数	1
1.4	复分析与复变函数	1
1.5	泛函分析	1
1.6	拓扑学与点集论	1
1.7	概率论与数理统计	1
1.8	图论	1
1.9	度量空间	1
1.10	连通与连通性	1
1.11	图论与图论模型	1
1.12	概率论与数理统计	1
1.13	图论与图论模型	1
1.14	度量空间与拓扑学	1
1.15	泛函分析与复分析	1
1.16	复分析与复变函数	1
1.17	拓扑学与点集论	1
1.18	概率论与数理统计	1
1.19	图论	1
1.20	度量空间	1
1.21	连通与连通性	1
1.22	图论与图论模型	1
1.23	概率论与数理统计	1
1.24	图论与图论模型	1
1.25	度量空间与拓扑学	1
1.26	泛函分析与复分析	1
1.27	复分析与复变函数	1
1.28	拓扑学与点集论	1
1.29	概率论与数理统计	1
1.30	图论	1
1.31	度量空间	1
1.32	连通与连通性	1
1.33	图论与图论模型	1
1.34	概率论与数理统计	1
1.35	图论与图论模型	1
1.36	度量空间与拓扑学	1
1.37	泛函分析与复分析	1
1.38	复分析与复变函数	1
1.39	拓扑学与点集论	1
1.40	概率论与数理统计	1
1.41	图论	1
1.42	度量空间	1
1.43	连通与连通性	1
1.44	图论与图论模型	1
1.45	概率论与数理统计	1
1.46	图论与图论模型	1
1.47	度量空间与拓扑学	1
1.48	泛函分析与复分析	1
1.49	复分析与复变函数	1
1.50	拓扑学与点集论	1
1.51	概率论与数理统计	1
1.52	图论	1
1.53	度量空间	1
1.54	连通与连通性	1
1.55	图论与图论模型	1
1.56	概率论与数理统计	1
1.57	图论与图论模型	1
1.58	度量空间与拓扑学	1
1.59	泛函分析与复分析	1
1.60	复分析与复变函数	1
1.61	拓扑学与点集论	1
1.62	概率论与数理统计	1
1.63	图论	1
1.64	度量空间	1
1.65	连通与连通性	1
1.66	图论与图论模型	1
1.67	概率论与数理统计	1
1.68	图论与图论模型	1
1.69	度量空间与拓扑学	1
1.70	泛函分析与复分析	1
1.71	复分析与复变函数	1
1.72	拓扑学与点集论	1
1.73	概率论与数理统计	1
1.74	图论	1
1.75	度量空间	1
1.76	连通与连通性	1
1.77	图论与图论模型	1
1.78	概率论与数理统计	1
1.79	图论与图论模型	1
1.80	度量空间与拓扑学	1
1.81	泛函分析与复分析	1
1.82	复分析与复变函数	1
1.83	拓扑学与点集论	1
1.84	概率论与数理统计	1
1.85	图论	1
1.86	度量空间	1
1.87	连通与连通性	1
1.88	图论与图论模型	1
1.89	概率论与数理统计	1
1.90	图论与图论模型	1
1.91	度量空间与拓扑学	1
1.92	泛函分析与复分析	1
1.93	复分析与复变函数	1
1.94	拓扑学与点集论	1
1.95	概率论与数理统计	1
1.96	图论	1
1.97	度量空间	1
1.98	连通与连通性	1
1.99	图论与图论模型	1
1.100	概率论与数理统计	1
1.101	图论与图论模型	1
1.102	度量空间与拓扑学	1
1.103	泛函分析与复分析	1
1.104	复分析与复变函数	1
1.105	拓扑学与点集论	1
1.106	概率论与数理统计	1
1.107	图论	1
1.108	度量空间	1
1.109	连通与连通性	1
1.110	图论与图论模型	1
1.111	概率论与数理统计	1
1.112	图论与图论模型	1
1.113	度量空间与拓扑学	1
1.114	泛函分析与复分析	1
1.115	复分析与复变函数	1
1.116	拓扑学与点集论	1
1.117	概率论与数理统计	1
1.118	图论	1
1.119	度量空间	1
1.120	连通与连通性	1
1.121	图论与图论模型	1
1.122	概率论与数理统计	1
1.123	图论与图论模型	1
1.124	度量空间与拓扑学	1
1.125	泛函分析与复分析	1
1.126	复分析与复变函数	1
1.127	拓扑学与点集论	1
1.128	概率论与数理统计	1
1.129	图论	1
1.130	度量空间	1
1.131	连通与连通性	1
1.132	图论与图论模型	1
1.133	概率论与数理统计	1
1.134	图论与图论模型	1
1.135	度量空间与拓扑学	1
1.136	泛函分析与复分析	1
1.137	复分析与复变函数	1
1.138	拓扑学与点集论	1
1.139	概率论与数理统计	1
1.140	图论	1
1.141	度量空间	1
1.142	连通与连通性	1
1.143	图论与图论模型	1
1.144	概率论与数理统计	1
1.145	图论与图论模型	1
1.146	度量空间与拓扑学	1
1.147	泛函分析与复分析	1
1.148	复分析与复变函数	1
1.149	拓扑学与点集论	1
1.150	概率论与数理统计	1
1.151	图论	1
1.152	度量空间	1
1.153	连通与连通性	1
1.154	图论与图论模型	1
1.155	概率论与数理统计	1
1.156	图论与图论模型	1
1.157	度量空间与拓扑学	1
1.158	泛函分析与复分析	1
1.159	复分析与复变函数	1
1.160	拓扑学与点集论	1
1.161	概率论与数理统计	1
1.162	图论	1
1.163	度量空间	1
1.164	连通与连通性	1
1.165	图论与图论模型	1
1.166	概率论与数理统计	1
1.167	图论与图论模型	1
1.168	度量空间与拓扑学	1
1.169	泛函分析与复分析	1
1.170	复分析与复变函数	1
1.171	拓扑学与点集论	1
1.172	概率论与数理统计	1
1.173	图论	1
1.174	度量空间	1
1.175	连通与连通性	1
1.176	图论与图论模型	1
1.177	概率论与数理统计	1
1.178	图论与图论模型	1
1.179	度量空间与拓扑学	1
1.180	泛函分析与复分析	1
1.181	复分析与复变函数	1
1.182	拓扑学与点集论	1
1.183	概率论与数理统计	1
1.184	图论	1
1.185	度量空间	1
1.186	连通与连通性	1
1.187	图论与图论模型	1
1.188	概率论与数理统计	1
1.189	图论与图论模型	1
1.190	度量空间与拓扑学	1
1.191	泛函分析与复分析	1
1.192	复分析与复变函数	1
1.193	拓扑学与点集论	1
1.194	概率论与数理统计	1
1.195	图论	1
1.196	度量空间	1
1.197	连通与连通性	1
1.198	图论与图论模型	1
1.199	概率论与数理统计	1
1.200	图论与图论模型	1
1.201	度量空间与拓扑学	1
1.202	泛函分析与复分析	1
1.203	复分析与复变函数	1
1.204	拓扑学与点集论	1
1.205	概率论与数理统计	1
1.206	图论	1
1.207	度量空间	1
1.208	连通与连通性	1
1.209	图论与图论模型	1
1.210	概率论与数理统计	1
1.211	图论与图论模型	1
1.212	度量空间与拓扑学	1
1.213	泛函分析与复分析	1
1.214	复分析与复变函数	1
1.215	拓扑学与点集论	1
1.216	概率论与数理统计	1
1.217	图论	1
1.218	度量空间	1
1.219	连通与连通性	1
1.220	图论与图论模型	1
1.221	概率论与数理统计	1
1.222	图论与图论模型	1
1.223	度量空间与拓扑学	1
1.224	泛函分析与复分析	1
1.225	复分析与复变函数	1
1.226	拓扑学与点集论	1
1.227	概率论与数理统计	1
1.228	图论	1
1.229	度量空间	1
1.230	连通与连通性	1
1.231	图论与图论模型	1
1.232	概率论与数理统计	1
1.233	图论与图论模型	1
1.234	度量空间与拓扑学	1
1.235	泛函分析与复分析	1
1.236	复分析与复变函数	1
1.237	拓扑学与点集论	1
1.238	概率论与数理统计	1
1.239	图论	1
1.240	度量空间	1
1.241	连通与连通性	1
1.242	图论与图论模型	1
1.243	概率论与数理统计	1
1.244	图论与图论模型	1
1.245	度量空间与拓扑学	1
1.246	泛函分析与复分析	1
1.247	复分析与复变函数	1
1.248	拓扑学与点集论	1
1.249	概率论与数理统计	1
1.250	图论	1
1.251	度量空间	1
1.252	连通与连通性	1
1.253	图论与图论模型	1
1.254	概率论与数理统计	1
1.255	图论与图论模型	1
1.256	度量空间与拓扑学	1
1.257	泛函分析与复分析	1
1.258	复分析与复变函数	1
1.259	拓扑学与点集论	1
1.260	概率论与数理统计	1
1.261	图论	1
1.262	度量空间	1
1.263	连通与连通性	1
1.264	图论与图论模型	1
1.265	概率论与数理统计	1
1.266	图论与图论模型	1
1.267	度量空间与拓扑学	1
1.268	泛函分析与复分析	1
1.269	复分析与复变函数	1
1.270	拓扑学与点集论	1
1.271	概率论与数理统计	1
1.272	图论	1
1.273	度量空间	1
1.274	连通与连通性	1
1.275	图论与图论模型	1
1.276	概率论与数理统计	1
1.277	图论与图论模型	1
1.278	度量空间与拓扑学	1
1.279	泛函分析与复分析	1
1.280	复分析与复变函数	1
1.281	拓扑学与点集论	1
1.282	概率论与数理统计	1
1.283	图论	1
1.284	度量空间	1
1.285	连通与连通性	1
1.286	图论与图论模型	1
1.287	概率论与数理统计	1
1.288	图论与图论模型	1
1.289	度量空间与拓扑学	1
1.290	泛函分析与复分析	1
1.291	复分析与复变函数	1
1.292	拓扑学与点集论	1
1.293	概率论与数理统计	1
1.294	图论	1
1.295	度量空间	1
1.296	连通与连通性	1
1.297	图论与图论模型	1
1.298	概率论与数理统计	1
1.299	图论与图论模型	1
1.300	度量空间与拓扑学	1
1.301	泛函分析与复分析	1
1.302	复分析与复变函数	1
1.303	拓扑学与点集论	1
1.304	概率论与数理统计	1
1.305	图论	1
1.306	度量空间	1
1.307	连通与连通性	1
1.308	图论与图论模型	1
1.309	概率论与数理统计	1
1.310	图论与图论模型	1
1.311	度量空间与拓扑学	1
1.312	泛函分析与复分析	1
1.313	复分析与复变函数	1
1.314	拓扑学与点集论	1
1.315	概率论与数理统计	1
1.316	图论	1
1.317	度量空间	1
1.318	连通与连通性	1
1.319	图论与图论模型	1
1.320	概率论与数理统计	1
1.321	图论与图论模型	1
1.322	度量空间与拓扑学	1
1.323	泛函分析与复分析	1
1.324	复分析与复变函数	1
1.325	拓扑学与点集论	1
1.326	概率论与数理统计	1
1.327	图论	1
1.328	度量空间	1
1.329	连通与连通性	1
1.330	图论与图论模型	1
1.331	概率论与数理统计	1
1.332	图论与图论模型	1
1.333	度量空间与拓扑学	1
1.334	泛函分析与复分析	1
1.335	复分析与复变函数	1
1.336	拓扑学与点集论	1
1.337	概率论与数理统计	1
1.338	图论	1
1.339	度量空间	1
1.340	连通与连通性	1
1.341	图论与图论模型	1
1.342	概率论与数理统计	1
1.343	图论与图论模型	1
1.344	度量空间与拓扑学	1
1.345	泛函分析与复分析	1
1.346	复分析与复变函数	1
1.347	拓扑学与点集论	1
1.348	概率论与数理统计	1
1.349	图论	1
1.350	度量空间	1
1.351	连通与连通性	1
1.352	图论与图论模型	1
1.353	概率论与数理统计	1
1.354	图论与图论模型	1
1.355	度量空间与拓扑学	1
1.356	泛函分析与复分析	1
1.357	复分析与复变函数	1
1.358	拓扑学与点集论	1
1.359	概率论与数理统计	1
1.360	图论	1
1.361	度量空间	1
1.362	连通与连通性	1
1.363	图论与图论模型	1
1.364	概率论与数理统计	1
1.365	图论与图论模型	1
1.366	度量空间与拓扑学	1
1.367	泛函分析与复分析	1
1.368	复分析与复变函数	1
1.369	拓扑学与点集论	1
1.370	概率论与数理统计	1
1.371	图论	1
1.372	度量空间	1
1.373	连通与连通性	1
1.374	图论与图论模型	1
1.375	概率论与数理统计	1
1.376	图论与图论模型	1
1.377	度量空间与拓扑学	1
1.378	泛函分析与复分析	1
1.379	复分析与复变函数	1
1.380	拓扑学与点集论	1
1.381	概率论与数理统计	1
1.382	图论	1
1.383	度量空间	1
1.384	连通与连通性	1
1.385	图论与图论模型	1
1.386	概率论与数理统计	1
1.387	图论与图论模型	1
1.388	度量空间与拓扑学	1
1.389	泛函分析与复分析	1
1.390	复分析与复变函数	1
1.391	拓扑学与点集论	1
1.392	概率论与数理统计	1
1.393	图论	1
1.394	度量空间	1
1.395	连通与连通性	1
1.396	图论与图论模型	1
1.397	概率论与数理统计	1
1.398	图论与图论模型	1
1.399	度量空间与拓扑学	1
1.400	泛函分析与复分析</td	

目 录

第一章 集合、拓扑、线性运算与连续

§ 1 集合	(1)
1.1 集合与关系	(1)
1.2 序与选择公理	(3)
1.3 集合的基数	(5)
1.4 良序集的序数	(10)
§ 2 拓扑与连续	(12)
2.1 拓扑空间与连续映射	(13)
2.2 网与紧性	(20)
2.3 度量空间	(25)
2.4 连续函数	(30)
2.5 Riemann 流形	(35)
2.6 拓扑群与 Lie 群	(47)
§ 3 向量拓扑与线性算子	(53)
3.1 赋范线性空间	(53)
3.2 内积空间	(57)
3.3 有界线性算子	(62)
3.4 对偶空间与共轭算子	(64)
3.5 线性拓扑空间	(68)
3.6 缓增广义函数	(74)

第二章 测度

§ 1	σ -代数	(79)
§ 2	测度	(84)
§ 3	外测度	(91)
§ 4	\mathbf{R}^n 上的正则 Borel 测度	(98)
4.1	正则 Borel 测度	(98)
4.2	Lebesgue 测度	(104)
§ 5	几个反例	(107)

第三章 积分

§ 1	可测函数及其基本性质	(112)
§ 2	积分的定义及其基本性质	(118)
§ 3	积分号下求极限	(123)
§ 4	可测函数列的几种收敛性	(132)
§ 5	乘积测度与 Fubini 定理	(137)
§ 6	\mathbf{R}^n 上积分的变量替换	(145)

第四章 测度的分解与微分

§ 1	测度的 Jordan 分解及其变差	(156)
§ 2	测度的微分	(163)
§ 3	\mathbf{R}^n 上的微分	(170)
3.1	Hardy-Littlewood 极大定理	(170)
3.2	Lebesgue 微分定理	(172)
§ 4	\mathbf{R}^1 上的有界变差函数	(176)
4.1	有界变差函数与 L.-S. 积分	(176)
4.2	绝对连续函数	(182)

第五章 函数空间及算子插值

§ 1	L^p 空间的基本理论	(189)
1.1	完备性与可分性	(189)
1.2	L^p 空间的比较	(194)

1.3 几个不等式	(196)
1.4 Orlicz 空间	(199)
§ 2 L^p 空间的对偶	(200)
§ 3 弱 L^p 空间与 Lorentz 空间	(206)
3.1 分布函数与弱 L^p 空间	(206)
3.2 重排函数与 Lorentz 空间	(209)
§ 4 L^p 空间的插值	(215)
4.1 Riesz-Thorin 定理及其推广	(215)
4.2 Marcinkiewicz 定理及其推广	(223)

第六章 Daniell 积分与 Radon 测度

§ 1 Daniell 积分	(231)
1.1 Daniell 积分的扩张	(232)
1.2 Daniell-Stone 定理	(237)
§ 2 拓扑空间上的 Radon 测度	(243)
2.1 Riesz 表示定理	(243)
2.2 Radon 测度的若干性质	(249)
§ 3 拓扑群上的 Haar 测度	(252)
§ 4 拓扑群上的卷积	(260)
4.1 拓扑群上的卷积	(260)
4.2 \mathbf{R}^n 上的逼近恒等	(263)
§ 5 \mathbf{R}^n 上的 Fourier 变换	(267)

第七章 几何测度

§ 1 Hausdorff 测度与维数	(273)
1.1 Hausdorff 测度	(273)
1.2 Hausdorff 维数	(277)
1.3 Lip_α -曲面	(280)
§ 2 子流形的 Hausdorff 测度	(284)
§ 3 Sobolev 不等式与等周不等式	(290)

3.1 Riesz 位势与 Sobolev 不等式	(290)
3.2 等周不等式	(294)
§ 4 容度	(299)
4.1 Bessel 位势	(299)
4.2 Bessel 容度及其基本性质	(302)
第八章 向量值测度与积分	
§ 1 向量值测度及其基本性质	(310)
1.1 向量值测度的定义	(310)
1.2 向量值测度的总变差与半变差	(313)
1.3 向量值测度的绝对连续性	(317)
§ 2 向量值函数关于数值测度的积分	(320)
2.1 向量值函数的可测性	(320)
2.2 Dunford 积分与 Pettis 积分	(324)
2.3 Bochner 积分	(328)
§ 3 关于向量值测度的积分	(335)
3.1 数值函数关于向量值测度的积分	(336)
3.2 Bartle 积分	(344)
§ 4 Radon-Nikodym 性质	(348)
4.1 Radon-Nikodym 性质	(348)
4.2 可表示算子	(352)
符号索引	(356)
术语索引	(360)
参考文献	(370)

— 在体，特别是微分几何中，度量空间是最重要的。在度量空间中，我们研究的是点与点之间的距离，从而可以引入许多的数学概念和方法，如收敛、极限等。

第一章 集合、拓扑、线性运算与连续

在这一章，我们简要介绍有关集合论、拓扑空间、度量空间、Riemann 流形、拓扑群、线性拓扑空间及连续函数、有界线性泛函等方面的一些基本知识。它们是现代分析的基础。

§ 1 集 合

在这一节，我们简要介绍有关集合与两元关系的一些基本知识，集合的基数、序数及其若干基本性质，以及 Zermelo 选择公理等。

1.1 集合与关系

\emptyset 表示空集， $x \in E$ （或 $E \ni x$ ）表示 x 属于 E ， $x \notin E$ 表示 x 不属于 E ， $F \subset E$ （或 $E \supset F$ ）表示 F 为 E 的子集。集族 $\mathcal{E} = \{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 的并集定义为

$$\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha = \{x : x \in E_\alpha, \text{ 对某一 } \alpha \in A\},$$

交集定义为

$$\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha = \{x : x \in E_\alpha, \forall \alpha \in A\};$$

若 $E_\alpha \cap E_\beta = \emptyset (\forall \alpha \neq \beta)$ ，则称 $\mathcal{E} = \{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 为互不相交的，此时， $\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$ 称为不交并；集列 $\{E_n\}_1^\infty$ 的上极限集定义为

$$\limsup E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n = \{x : x \in E_n, \text{ 对无穷个 } n\},$$

下极限集定义为

$\liminf E_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n = \{x : x \in E_n, \text{除有限个 } n\};$

两个集合 E, F 的差集定义为

$$E - F = \{x : x \in E \text{ 且 } x \notin F\},$$

对称差集定义为

$$E \Delta F = (E - F) \cup (F - E);$$

集合 E 在 X 中的余集定义为 $E^c = X - E$; 此外, 记

$$\mathcal{P}(X) = \{E : E \subset X\}.$$

同 我们有

de Morgan 公式 设 $\mathcal{E} = \{E_a\}_{a \in A}$ 为一集族, 则

$$(\bigcup_{a \in A} E_a)^c = \bigcap_{a \in A} E_a^c,$$

$$(\bigcap_{a \in A} E_a)^c = \bigcup_{a \in A} E_a^c.$$

证明留作练习.

集合 X 与集合 Y 的 Cartesian 积定义为

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\};$$

集合 X 到集合 Y 的一个两元关系 R 是 $X \times Y$ 的一个子集. 若 $(x, y) \in R$, 则记 xRy , 并称

$$\text{dom}(R) = \{x : \text{对某一 } y, (x, y) \in R\}$$

为 R 的定义域, 称

$$\text{rng}(R) = \{y : \text{对某一 } x, (x, y) \in R\}$$

为 R 的值域, 称

$$R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$$

为 R 的逆; X 到自身的两元关系称为 X 上的关系.

设 R 与 S 为 X 到 Y 的两个关系, $R \subset S$, 则称 R 是 S 的限制, S 是 R 的扩张; 若 R 为 X 到 Y 的关系, S 为 Y 到 Z 的关系, 则

$$S \circ R = \{(x, z) : \text{对某一 } y, (x, y) \in R, (y, z) \in S\}$$

称为 R 与 S 的复合. 设 $A \subset X$, A 在 R 下的像定义为

$$R(A) = \{y : \text{对某一 } x, (x, y) \in A\}.$$

若 $(x, y) \in R, (x, z) \in R \Rightarrow y = z$, 则称 R 为单值关系(当 $\text{dom}(R)$

$= X$ 时,又称 R 为映射),简记为 $R: \text{dom}(R) \rightarrow Y$. 此时,对任一 $x \in \text{dom}(R)$, 存在唯一的 $y \in Y$ 使得 xRy , 这个 y 称为 R 在 x 处的值, 记为 $R(x)$; 若 R 为单值关系, 当 $x, y \in \text{dom}(R)$ 且 $x \neq y$ 时, $R(x) \neq R(y)$, 则称 R 为一对关系.

设 $f: X \rightarrow Y$ 为一映射(这种表示法意指 $\text{dom}(f) = X$),若 f 为一对关系,则称 f 为单射;若对任一 $y \in Y$,都存在 $x \in X$,使得 $f(x) = y$,则称 f 为满射;既是单射又是满射的映射称为双射.
 X 上满足下述条件的关系称为等价关系:

1. 反身性: xRx ;
2. 对称性: $xRy \Rightarrow yRx$;
3. 传递性: $xRy, yRz \Rightarrow xRz$.

等价关系通常用 \sim 来表示.

我们有

定理 1.1 设 X, Y 为两个集合, $R \subset X \times Y$ 为一关系. 若 $\mathcal{E} = \{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 为 X 的一族子集, $F = \{F_\beta\}_{\beta \in B}$ 为 Y 的一族子集, 则

$$\begin{aligned} R(\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha) &= \bigcup_{\alpha \in A} R(E_\alpha), \\ R(\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha) &\subset \bigcap_{\alpha \in A} R(E_\alpha); \end{aligned}$$

若 R 为一映射 $f, E \in X, F \in Y$, 则还有

$$\begin{aligned} f^{-1}(\bigcap_{\beta \in B} F_\beta) &= \bigcap_{\beta \in B} f^{-1}(F_\beta), \\ f^{-1}(F^c) &= (f^{-1}(F))^c, \\ f(f^{-1}(F) \cap E) &= F \cap f(E). \end{aligned}$$

验证留作练习.

1.2 序与选择公理

设 P 为一集合, \leq 为 P 上的一个关系,若满足

1. 反身性: $x \leq x$,
2. 反对称性: $x \leq y, y \leq x \Rightarrow y = x$,
3. 传递性: $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$,

则称 \leq 为一偏序, (P, \leq) 为一偏序集; 若 (P, \leq) 为一偏序集且满足

4. 三择一原则: $x, y \in P \Rightarrow x \leq y$ 或 $y \leq x$,

则称 \leq 为一全序, (P, \leq) 为一全序集; 若 (P, \leq) 为一全序集且满足

5. 最小元的存在性: $\emptyset \neq A \subset P \Rightarrow \exists \alpha \in A, s.t. \alpha \leq x (\forall x \in A)$,

则称 \leq 为一良序, (P, \leq) 为一良序集.

对于良序集 (P, \leq) 中的任一有限子集 $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 我们总可以定义它的最大元

$$\max \{x_1, x_2\} = x_1 (\text{若 } x_2 \leq x_1), \text{或 } x_2 (\text{若 } x_1 \leq x_2),$$

$$\max \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \max \{x_n, \max \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}\};$$

与最小元

$$\min \{x_1, x_2\} = x_2 (\text{若 } x_2 \leq x_1), \text{或 } x_1 (\text{若 } x_1 \leq x_2),$$

$$\min \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \min \{x_n, \min \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}\}.$$

一般地, 对于一偏序集 (P, \leq) 及其子集 A , 若 $u \in P$ 满足: $\forall x \in A, x \leq u$, 则称 u 为 A 的一个上界; 若 $u \in P$ 满足: $\forall x \in A, x \geq u$, 则称 u 为 A 的一个下界; 若 $u \in A$ 满足: $\forall x \in A, x \leq u$, 则称 u 为 A 的最大元, 类似地可定义 A 的最小元; 若 (A, \leq) 为一个全序集, 则称 A 为 P 的全序子集; 若 $u \in P$ 且满足 $\forall x \in P$, 只要 $x \geq u$ 便有 $x = u$, 则称 u 为 P 的一个极大元.

超限归纳法 设 (W, \leq) 为一良序集, $A \subset W$. 若 $I_a \subset A \Rightarrow a \in A$, 则 $A = W$, 其中 $I_a = \{x \in W : x \leq a, x \neq a\}$.

证明 假设 $W \cap A^c \neq \emptyset$, 令 a 为 $W \cap A^c$ 的最小元, 则 $I_a \subset A$, 于是由条件知 $a \in A$, 矛盾. 证毕.

设 $\mathcal{E} = \{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 为一族集合, A 到 $\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$ 的一个单值关系 x 若满足(1) $\text{dom}(x) = A$, (2) $\forall \alpha \in A, x_\alpha = x(\alpha) \in E_\alpha$, 则称 x 为集族 \mathcal{E} 的一个选择函数, x_α 称为 x 的第 α 个坐标; 而

$$\prod_{a \in A} E_a = \{x : x \text{ 为集族 } \mathcal{E} \text{ 的一个选择函数}\}$$

称为集族 \mathcal{E} 的 Cartesian 积. 当然, 当某个 E_a 为空集时, 其 Cartesian 积也是空集; 当每个 E_a 都非空时, 若 A 为有限集或可列集, 则其 Cartesian 积非空. 但在一般情况下, Cartesian 积是否非空无法证明. 1900 年, 德国数学家 Zermelo 提出了下述的

Zermelo 选择公理 若每个 E_a 都非空, 则必存在 \mathcal{E} 的一个选择函数, 即其 Cartesian 积非空.

下面, 我们不加证明地给出选择公理的若干等价形式.

定理 1.2 下述四个定理等价:

- (1) Zermelo 选择公理;
- (2) (Hausdorff 极大原理) 每个非空偏序集都有一个极大全序子集;
- (3) (Zorn 引理) 每个全序子集都有上界的非空偏序集都有极大元;
- (4) (Zermelo 良序定理) 每个集上都存在良序.

1.3 集合的基数

每个集合 A 按下述原则给一符号 $\text{card}(A)$ (简记为 \bar{A}): $\text{card}(A) = \text{card}(B) \Leftrightarrow$ 存在一个双射 $f: A \rightarrow B$. 这个符号称为 A 的基数(或称为 A 的势). 习惯上, 我们记

$$n = \text{card}(\{1, 2, \dots, n\}), \quad 0 = \text{card}(\emptyset),$$

$$\aleph_0 = \text{card}(\mathbb{N}), \quad \aleph = \text{card}(\mathbb{R}).$$

若 A 为有限或 $\text{card}(A) = \aleph_0$, 则称 A 为可列集(或可数集); 基数 \aleph 又称为连续统的势.

若存在单射 $f: A \rightarrow B$, 则记 $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$; 若存在满射 $f: A \rightarrow B$, 则记 $\text{card}(A) \geq \text{card}(B)$; 若 $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ 且不存在双射 $f: A \rightarrow B$, 则记 $\text{card}(A) < \text{card}(B)$; 若 $\text{card}(A) \geq \text{card}(B)$

且不存在双射 $f: A \rightarrow B$, 则记 $\text{card}(A) > \text{card}(B)$.

定理 1.3 由基数组成的任一集合在上述序关系 \leq 下成一全序集. 实际上, 若设 α, β, γ 为三个基数, 则

(1) $\alpha \leq \beta$ 当且仅当 $\beta \geq \alpha$;

(2) (反身性): $\alpha \leq \alpha$;

(3) (传递性): 若 $\alpha \leq \beta, \beta \leq \gamma$, 则 $\alpha \leq \gamma$;

(4) (反对称性) (**Schröder-Bernstein 定理**): 若 $\alpha \leq \beta, \beta \leq \alpha$, 则 $\alpha = \beta$;

(5) (三择一原理): $\alpha \leq \beta$ 与 $\beta \leq \alpha$ 必有一个成立.

证明 设 $\alpha = \text{card}(X), \beta = \text{card}(Y), \gamma = \text{card}(Z)$. (1)、(2)、(3) 是显然的, 证明留作练习. 为证(4), 由条件及(1)知, 存在 $f: X \rightarrow Y$ 与 $g: Y \rightarrow X$, 它们都为单射. 对于 $x \in X$, 若 $x \in \text{rng}(g)$, 我们得到 $g^{-1}(x) \in Y$; 若 $g^{-1}(x) \in \text{rng}(f)$, 我们得到 $f^{-1}(g^{-1}(x)) \in X$, 等等. 继续这个程序, 将发生三种可能的结果: (a) 这个程序可以无限地进行下去, 所有的这种点 x 记为 X_∞ ; (b) 这个程序在某个元素 $X - \text{rng}(g)$ 处停止(可能是 x 本身), 所有的这种点 x 记为 X_x ; (c) 这个程序在某个元素 $Y - \text{rng}(f)$ 处停止, 所有的这种点 x 记为 X_Y . 于是 X 可分为互不相交的三个部分 X_∞, X_x, X_Y . 类似地, 可得到 Y 的互不相交的三个部分 Y_∞, Y_x, Y_Y . 显然, 三个映射

$$f: X_\infty \rightarrow Y_\infty, f: X_x \rightarrow Y_Y, g: Y_X \rightarrow X_Y$$

都是双射, 于是

$$h: X \rightarrow Y; x \mapsto h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{若 } x \in X_\infty \cup X_x, \\ g^{-1}(x), & \text{若 } x \in X_Y \end{cases}$$

也是双射, 即 $\alpha = \beta$. 为证(5), 考虑映射族

$$\mathcal{F} = \{R \subset X \times Y: \text{两元关系 } R \text{ 为单值}\},$$

它在集合通常的包含关系 \subset 下成为偏序集, 且满足 Zorn 引理中的条件, 于是由 Zorn 引理知, 它有最大元 f . 设 f 的定义域为 A , 值域为 B . 若存在 $x_0 \in X - A$ 及 $y_0 \in Y - B$, 则 f 可以扩张成 $A \cup$

$\{x_0\}$ 到 $B \cup \{y_0\}$ 上的一个单射, 这与 f 的最大性矛盾. 因此, 要么 $A = X$, 在这种情况下, $\alpha \leq \beta$; 要么 $B = Y$, 在这种情况下, $\beta \leq \alpha$. 证毕.

下面, 我们再介绍几个有关基数运算的重要结论. 为此, 我们先介绍几个定义: 设 $\alpha = \text{card}(A)$, $\beta = \text{card}(B)$, 且 $A \cap B = \emptyset$, 定义

$$\alpha + \beta = \text{card}(A \cup B), \alpha\beta = \text{card}(A \times B), \alpha^\beta = \text{card}(A^B),$$

其中 $A^B = \prod_{b \in B} A_b$, 而 $A_b = A (\forall b \in B)$, A^B 称为 A 的 B 次幂集.

我们有如下基本事实

定理 1.4 (1) $\text{card}(\mathbb{Z}) = \text{card}(\mathbb{Q}) = \aleph_0$;

(2) $\text{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = \text{card}([0, 1]) = \text{card}(\mathbb{R}^n) = \aleph$;

(3) 若 $\text{card}(X) \geq \aleph$, 则 X 为不可数;

(4) (**Cantor 定理**) 对任一集 X ,

$$2^{\text{card}(X)} = \text{card}(\mathcal{P}(X)) > \text{card}(X).$$

其中 $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 分别表示整数集、自然数集、有理数集与实数集.

证明 (1)、(2) 及(3) 留作练习. 为证(4) 中的第二个不等式, 任给 $f: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$, 令 $Y = \{x \in X : x \notin f(x)\}$, 则 $Y \in \text{rng}(f)$, 所以 f 不可能是满的. 为证(4) 中的第一个等式, 可作双射 $\varphi: \mathcal{P}(X) \rightarrow \{0, 1\}^X$ 如下:

$$\varphi(E) = \chi_E \in \{0, 1\}^X (\forall E \subset X).$$

证毕.

上述定理中(3) 的逆就是著名的 **Cantor 连续统假设**, 即: 若 X 不可数, 则 $\text{card}(X) \geq \aleph$. 1966 年, P. J. Cohen 证明了在集合论的 Zermelo-Fraenkel 公理体系内, 连续统假设是不可证明的.

定理 1.5 设 α, β, γ 为三个基数, 则

(1) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma, \alpha + \beta = \beta + \alpha, \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$;

(2) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma, \alpha\beta = \beta\alpha$;