XIANDAI SHIFENXI

陈杰诚 王斯雷 编著

现代史分析

XIANDAI SHIFENXI

杭州 … 版社

现代实分析

陈杰诚　王斯雷 编著

杭州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

现代实分析/陈杰诚,王斯雷编著.—杭州:杭州大学出版社,1999.9

ISBN 7-81035-592-9

Ⅰ.现… Ⅱ.①陈… ②王… Ⅲ.实分析 Ⅳ.0174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 31559 号

现代实分析

陈杰诚　王斯雷 编著

*

杭州大学出版社出版发行

(杭州天目山路 34 号)

*

杭州大学出版社电脑排版部排版　浙江上虞印刷厂印刷

850 毫米×1168 毫米 1/32　12 印张　312 千字

1999 年 9 月第 1 版　1999 年 9 月第 1 次印刷

印数:0001—1000

ISBN 7-81035-592-9/O·079

定价:18.00 元

前 言

自 80 年代中期以来，“现代实分析”一直是杭州大学数学系研究生的基础课程以及本科高年级学生的选修课程，采用的是国外的教材。自 90 年代初，我们轮流讲授这门课程，发现原先采用的一些教材虽然各有所长，但各有侧重、难易不同，并不十分适合我们授课的需要，特别是不能适应数学类各专业共同的需要，从而产生了自编教材的想法。这本书就是在我们已试用多年的自编教材的基础上修改而成的。

本书主要介绍现代数学研究中涉及的几种重要的测度与积分理论，包括 Lebesgue 型抽象测度与积分、Radon 测度与 Daniell 积分、Haar 测度与积分、几何测度与容度、向量值测度与积分等。为了方便读者，我们在第一章介绍了涉及集合论、点集拓扑、Riemann 流形、拓扑群和线性泛函分析的若干基本知识；第二章至第五章介绍了抽象的 Lebesgue 型测度与积分理论，主要包括测度与积分、测度的分解与微分以及函数空间与算子插值等；第六章介绍了 Daniell 积分、拓扑空间上的 Radon 测度、拓扑群上的 Haar 测度与卷积以及欧氏空间上的 Fourier 变换等；第七章介绍了几何测度与容度，包括 Hausdorff 测度与维数、等周不等式、面积公式与余面积公式以及 Bessel 容度等；第八章介绍了向量值测度、Bochner 积分、Pettis 积分、Dunford 积分和 Bartle 积分等。

本书可作为数学系研究生及本科高年级学生"实分析"类课程的教材。不同专业方向的学生，可根据需要及学生的基础，选择其中的若干章节。比如，对于有集合论、点集拓扑、Riemann 流形、拓扑群、线性泛函分析基础的读者来说，可以跳过第一章；而第四章至第八章基本上是相互独立的，学生可以合理取舍。本书也可以作为数学工作者的

参考用书。

鉴于作者水平有限，书中难免会有错误与不足，欢迎读者提出宝贵意见，以便进一步修改、提高。

本书在编写过程中得到了浙江省青年人才基金、国家自然科学基金、浙江省自然科学基金、国家教委优秀青年教师基金、浙江省151人才基金等资助，出版时还得到了杭州大学学术著作出版基金的资助，在此深表谢意！

作者

1999年6月

目　录

第一章　集合、拓扑、线性运算与连续

在这一章，我们简要介绍有关集合论、拓扑空间、度量空间、Riemann 流形、拓扑群、线性拓扑空间及连续函数、有界线性泛函等方面的一些基本知识．它们是现代分析的基础.

§1　集　　合

在这一节，我们简要介绍有关集合与两元关系的一些基本知识，集合的基数、序数及其若干基本性质，以及 Zermelo 选择公理等.

1.1　集合与关系

$\varnothing$ 表示**空集**，$x \in E$(或 $E \ni x$) 表示 x 属于 E，$x \notin E$ 表示 x 不属于 E，$F \subset E$(或 $E \supset F$) 表示 F 为 E 的**子集**．集族 $\mathscr{E} = \{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 的**并集**定义为

$$\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha = \{x : x \in E_\alpha, \text{对某一}\ \alpha \in A\},$$

交集定义为

$$\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha = \{x : x \in E_\alpha, \forall\ \alpha \in A\};$$

若 $E_\alpha \cap E_\beta = \varnothing (\forall\ \alpha \neq \beta)$，则称 $\mathscr{E} = \{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 为**互不相交的**，此时，$\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$ 称为不交并；集列 $\{E_n\}_1^\infty$ 的**上极限集**定义为

$$\limsup E_n = \bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{n=k}^\infty E_n = \{x : x \in E_n, \text{对无穷个}\ n\},$$

下极限集 定义为

$\liminf E_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n = \{x : x \in E_n, \text{除有限个 } n\}$;

两个集合 E,F 的**差集**定义为

$$E - F = \{x : x \in E \text{ 且 } x \notin F\},$$

对称差集定义为

$$E \Delta F = (E - F) \cup (F - E);$$

集合 E 在 X 中的**余集**定义为 $E^c = X - E$;此外,记

$$\mathscr{P}(X) = \{E : E \subset X\}.$$

我们有

de Morgan 公式 设 $\mathscr{E} = \{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 为一集族,则

$$(\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha^c,$$

$$(\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha^c.$$

证明留作练习.

集合 X 与集合 Y 的 **Cartesian 积**定义为

$$X \times Y = \{(x,y) : x \in X, y \in Y\};$$

集合 X 到集合 Y 的一个**两元关系** R 是 $X \times Y$ 的一个子集. 若 $(x, y) \in R$,则记 xRy,并称

$$\mathrm{dom}(R) = \{x: \text{对某一 } y, (x,y) \in R\}$$

为 R 的**定义域**,称

$$\mathrm{rng}(R) = \{y: \text{对某一 } x, (x,y) \in R\}$$

为 R 的**值域**,称

$$R^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in R\}$$

为 R 的**逆**;X 到自身的两元关系称为 X **上的关系**.

设 R 与 S 为 X 到 Y 的两个关系,$R \subset S$,则称 R 是 S 的**限制**,S 是 R 的**扩张**;若 R 为 X 到 Y 的关系,S 为 Y 到 Z 的关系,则

$$S \circ R = \{(x,z): \text{对某一 } y, (x,y) \in R, (y,z) \in S\}$$

称为 R 与 S 的**复合**. 设 $A \subset X$,A 在 R 下的**像**定义为

$$R(A) = \{y: \text{对某一 } x, (x,y) \in A\}.$$

若 $(x,y) \in R, (x,z) \in R \Rightarrow y = z$,则称 R 为**单值关系**(当 $\mathrm{dom}(R)$

$= X$ 时，又称 R 为**映射**），简记为 $R:\mathrm{dom}(R) \to Y$. 此时，对任一 $x \in \mathrm{dom}(R)$，存在唯一的 $y \in Y$ 使得 xRy，这个 y 称为 **R 在 x 处的值**，记为 $R(x)$；若 R 为单值关系，当 $x, y \in \mathrm{dom}(R)$ 且 $x \neq y$ 时，$R(x) \neq R(y)$，则称 R 为**一对一关系**.

设 $f:X \to Y$ 为一映射（这种表示法意指 $\mathrm{dom}(f) = X$），若 f 为一对一关系，则称 f 为**单射**；若对任一 $y \in Y$，都存在 $x \in X$，使得 $f(x) = y$，则称 f 为**满射**；既是单射又是满射的映射称为**双射**. X 上满足下述条件的关系称为**等价关系**：

1. **反身性**：xRx；
2. **对称性**：$xRy \Rightarrow yRx$；
3. **传递性**：$xRy, yRz \Rightarrow xRz$.

等价关系通常用 $\sim$ 来表示.

我们有

定理 1.1 设 X, Y 为两个集合，$R \subset X \times Y$ 为一关系. 若 $\mathscr{E} = \{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 为 X 的一族子集，$F = \{F_\beta\}_{\beta \in B}$ 为 Y 的一族子集，则

$$R\left(\bigcup\nolimits_{\alpha \in A} E_\alpha\right) = \bigcup\nolimits_{\alpha \in A} R(E_\alpha),$$

$$R\left(\bigcap\nolimits_{\alpha \in A} E_\alpha\right) \subset \bigcap\nolimits_{\alpha \in A} R(E_\alpha);$$

若 R 为一映射 f，$E \in X$，$F \in Y$，则还有

$$f^{-1}\left(\bigcap\nolimits_{\beta \in B} F_\beta\right) = \bigcap\nolimits_{\beta \in B} f^{-1}(F_\beta),$$

$$f^{-1}(F^c) = \left(f^{-1}(F)\right)^c,$$

$$f\left(f^{-1}(F) \cap E\right) = F \cap f(E).$$

验证留作练习.

1.2 序与选择公理

设 P 为一集合，$\leq$ 为 P 上的一个关系，若满足

1. 反身性：$x \leq x$，
2. 反对称性：$x \leq y, y \leq x \Rightarrow y = x$，
3. 传递性：$x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$，

则称 $\leq$ 为一**偏序**，$(P,\leq)$ 为一**偏序集**；若$(P,\leq)$ 为一偏序集且满足

4. **三择一原则**：$x,y\in P\Rightarrow x\leq y$ 或 $y\leq x$，

则称 $\leq$ 为一**全序**，$(P,\leq)$ 为一**全序集**；若$(P,\leq)$ 为一全序集且满足

5. **最小元的存在性**：$\varnothing\neq A\subset P\Rightarrow\exists\ \alpha\in A$, s. t. $\alpha\leq x(\forall\ x\in A)$，

则称 $\leq$ 为一**良序**，$(P,\leq)$ 为一**良序集**.

对于良序集$(P,\leq)$ 中的任一有限子集 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，我们总可以定义它的**最大元**

$$\max\{x_1,x_2\}=x_1(\text{若 } x_2\leq x_1),\text{或 } x_2(\text{若 } x_1\leq x_2),$$

$$\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}=\max\{x_n,\max\{x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}\}\};$$

与**最小元**

$$\min\{x_1,x_2\}=x_2(\text{若 } x_2\leq x_1),\text{或 } x_1(\text{若 } x_1\leq x_2),$$

$$\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}=\min\{x_n,\min\{x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}\}\}.$$

一般地，对于一偏序集$(P,\leq)$ 及其子集 A，若 $u\in P$ 满足：$\forall\ x\in A,x\leq u$，则称 u 为 A 的一个**上界**；若 $u\in P$ 满足：$\forall\ x\in A,x\geq u$，则称 u 为 A 的一个**下界**；若 $u\in A$ 满足：$\forall\ x\in A,x\leq u$，则称 u 为 A 的**最大元**，类似地可定义 A **的最小元**；若$(A,\leq)$ 为一个全序集，则称 A 为 P 的**全序子集**；若 $u\in P$ 且满足 $\forall\ x\in P$，只要 $x\geq u$ 便有 $x=u$，则称 u 为 P 的一个极大元.

超限归纳法 设$(W,\leq)$ 为一良序集，$A\subset W$. 若 $I_a\subset A\Rightarrow a\in A$，则 $A=W$，其中 $I_a=\{x\in W:x\leq a,x\neq a\}$.

证明 假设 $W\cap A^c\neq\varnothing$，令 a 为 $W\cap A^c$ 的最小元，则 $I_a\subset A$，于是由条件知 $a\in A$，矛盾. 证毕.

设 $\mathscr{E}=\{E_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 为一族集合，A 到 $\bigcup_{\alpha\in A}E_\alpha$ 的一个单值关系 x 若满足(1)$\mathrm{dom}(x)=A$，(2)$\forall\ \alpha\in A,x_\alpha=x(\alpha)\in E_\alpha$，则称 x 为集族 $\mathscr{E}$ 的一个**选择函数**，x_α 称为 x 的第 α 个坐标；而

$$\prod_{\alpha\in A}E_\alpha=\{x: x\text{ 为集族 }\mathscr{E}\text{ 的一个选择函数}\}$$

称为**集族 $\mathscr{E}$ 的 Cartesian 积**. 当然，当某个 E_α 为空集时，其 Cartesian 积也是空集；当每个 E_α 都非空时，若 A 为有限集或可列集，则其 Cartesian 积非空. 但在一般情况下，Cartesian 积是否非空无法证明. 1900 年，德国数学家 Zermelo 提出了下述的

Zermelo 选择公理 *若每个 E_α 都非空，则必存在 $\mathscr{E}$ 的一个选择函数，即其 Cartesian 积非空.*

下面，我们不加证明地给出选择公理的若干等价形式.

定理 1.2 *下述四个定理等价：*

(1) Zermelo 选择公理；

*(2)(**Hausdorff 极大原理**) 每个非空偏序集都有一个极大全序子集；*

*(3)(**Zorn 引理**) 每个全序子集都有上界的非空偏序集都有极大元；*

*(4)(**Zermelo 良序定理**) 每个集上都存在良序.*

1.3 集合的基数

每个集合 A 按下述原则给一符号 card(A)(简记为 $\overline{\overline{A}}$)：card(A) = card(B)$\Leftrightarrow$存在一个双射 $f: A\to B$. 这个符号称为 A 的**基数**(或称为 A 的**势**). 习惯上，我们记

$$n=\operatorname{card}(\{1,2,\cdots,n\}),\ 0=\operatorname{card}(\varnothing),$$

$$\aleph_0=\operatorname{card}(\mathbf{N}),\ \aleph=\operatorname{card}(\mathbf{R}).$$

若 A 为有限或 card(A) = $\aleph_0$，则称 A 为**可列集**(或**可数集**)；基数 $\aleph$ 又称为**连续统的势**.

若存在单射 $f: A\to B$，则记 card(A) $\leq$ card(B)；若存在满射 $f: A\to B$，则记 card(A) $\geq$ card(B)；若 card(A) $\leq$ card(B) 且不存在双射 $f: A\to B$，则记 card(A) $<$ card(B)；若 card(A) $\geq$ card(B)

且不存在双射 $f:A\to B$,则记 $\mathrm{card}(A)>\mathrm{card}(B)$.

定理 1.3 由基数组成的任一集合在上述序关系 $\leq$ 下成一全序集.实际上,若设 α,β,γ 为三个基数,则

(1) $\alpha\leq\beta$ 当且仅当 $\beta\geq\alpha$;

(2)(反身性):$\alpha\leq\alpha$;

(3)(传递性):若 $\alpha\leq\beta,\beta\leq\gamma$,则 $\alpha\leq\gamma$;

(4)(反对称性)(**Schröder-Bernstein 定理**):若 $\alpha\leq\beta,\beta\leq\alpha$,则 $\alpha=\beta$;

(5)(三择一原理):$\alpha\leq\beta$ 与 $\beta\leq\alpha$ 必有一个成立.

证明 设 $\alpha=\mathrm{card}(X),\beta=\mathrm{card}(Y),\gamma=\mathrm{card}(Z)$.(1)、(2)、(3)是显然的,证明留作练习.为证(4),由条件及(1)知,存在 $f:X\to Y$ 与 $g:Y\to X$,它们都为单射.对于 $x\in X$,若 $x\in\mathrm{rng}(g)$,我们得到 $g^{-1}(x)\in Y$;若 $g^{-1}(x)\in\mathrm{rng}(f)$,我们得到 $f^{-1}(g^{-1}(x))\in X$,等等.继续这个程序,将发生三种可能的结果:(a)这个程序可以无限地进行下去,所有的这种点 x 记为 X_∞;(b)这个程序在某个元素 $X-\mathrm{rng}(g)$ 处停止(可能是 x 本身),所有的这种点 x 记为 X_X;(c)这个程序在某个元素 $Y-\mathrm{rng}(f)$ 处停止,所有的这种点 x 记为 X_Y.于是 X 可分为互不相交的三个部分 X_∞,X_X,X_Y.类似地,可得到 Y 的互不相交的三个部分 Y_∞,Y_Y,Y_X.显然,三个映射

$$f:X_\infty\to Y_\infty,\ f:X_X\to Y_Y,\ g:Y_X\to X_Y$$

都是双射,于是

$$h:X\to Y:x\mapsto h(x)=\begin{cases}f(x),\text{若 } x\in X_\infty\cup X_X,\\ g^{-1}(x),\text{若 } x\in X_Y\end{cases}$$

也是双射,即 $\alpha=\beta$.为证(5),考虑映射族

$$\mathscr{F}=\{R\subset X\times Y:\text{两元关系 } R \text{ 为单值}\},$$

它在集合通常的包含关系 $\subset$ 下成为偏序集,且满足 Zorn 引理中的条件,于是由 Zorn 引理知,它有最大元 f.设 f 的定义域为 A,值域为 B.若存在 $x_0\in X-A$ 及 $y_0\in Y-B$,则 f 可以扩张成 $A\cup$

$\{x_0\}$ 到 $B \cup \{y_0\}$ 上的一个单射，这与 f 的最大性矛盾. 因此，要么 $A = X$，在这种情况下，$\alpha \leq \beta$；要么 $B = Y$，在这种情况下，$\beta \leq \alpha$. 证毕.

下面，我们再介绍几个有关基数运算的重要结论. 为此，我们先介绍几个定义：设 $\alpha = \mathrm{card}(A)$，$\beta = \mathrm{card}(B)$，且 $A \cap B = \varnothing$，定义

$$\alpha + \beta = \mathrm{card}(A \cup B),\ \alpha\beta = \mathrm{card}(A \times B),\ \alpha^\beta = \mathrm{card}(A^B),$$

其中 $A^B = \prod_{b \in B} A_b$，而 $A_b = A(\forall\, b \in B)$，$A^B$ 称为 **A 的 B 次幂集**.

我们有如下基本事实

定理 1.4 (1) $\mathrm{card}(\mathbf{Z}) = \mathrm{card}(\mathbf{Q}) = \aleph_0$；

(2) $\mathrm{card}(\mathscr{P}(\mathbf{N})) = \mathrm{card}([0,1]) = \mathrm{card}(\mathbf{R}^n) = \aleph$；

(3) 若 $\mathrm{card}(X) \geq \aleph$，则 X 为不可数；

(4)(**Cantor 定理**) 对任一集 X，

$$2^{\mathrm{card}(X)} = \mathrm{card}(\mathscr{P}(X)) > \mathrm{card}(X).$$

其中 $\mathbf{Z}, \mathbf{N}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ 分别表示整数集、自然数集、有理数集与实数集.

证明 (1)、(2) 及(3) 留作练习. 为证(4) 中的第二个不等式，任给 $f: X \to \mathscr{P}(\mathbf{X})$，令 $Y = \{x \in X : x \notin f(x)\}$，则 $Y \notin \mathrm{rng}(f)$，所以 f 不可能是满的. 为证(4) 中的第一个等式，可作双射 $\varphi: \mathscr{P}(X) \to \{0,1\}^X$ 如下：

$$\varphi(E) = \chi_E \in \{0,1\}^X (\forall\, E \subset X).$$

证毕.

上述定理中(3) 的逆就是著名的 **Cantor 连续统假设**，即：若 X 不可数，则 $\mathrm{card}(X) \geq \aleph$. 1966 年，P. J. Cohen 证明了在集合论的 Zermelo-Fraenkel 公理体系内，连续统假设是不可证明的.

定理 1.5 设 α, β, γ 为三个基数，则

(1) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$，$\alpha + \beta = \beta + \alpha$，$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$；

(2) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$，$\alpha\beta = \beta\alpha$；