

1963年铁路科学技术论文报告会文集

第 15 辑

线路上部建筑



1963年铁路科学技术论文报告会文集

第 15 輯

綫路上部建筑

綫路上部建筑专业会議学术委员会选

人 民 鐵 道 出 版 社

1964年·北京

1963年铁路科学技术论文报告会文集

第 15 輯

綫路上部建筑

綫路上部建筑专业会議学术委员会选編

人民铁道出版社出版、发行

(北京市霞公府甲24号)

北京市书刊出版业营业許可証出字第 010 号

人民铁道出版社印刷厂印

书号 1974 开本 $787 \times 1092 \frac{1}{32}$ 印张 $6 \frac{3}{8}$ 插頁1 字数149千

1964年12月第1版

1964年12月第1版第1次印刷

印数 0001—1,220 册 定价(科六) 0.90 元

目 录

钢轨接头强度计算的研究.....	1
曲线型顺坡超高的缓和曲线理论研究.....	27
P43型气压焊接钢轨的报告	62
论如何延长马尾松油枕的使用寿命.....	85

鋼軌接头强度計算的研究*

铁道科学研究院 周宏业 叶 翔

內 容 提 要

本文主要解决当車輪通过鋼軌接头时，魚尾鋸挠曲应力計算方法的問題。全文內容概述如下：

一、首先在总结前人关于鋼軌接头力学分析的基础上，指出目前經驗公式計算結果偏高很大，而在《Взаимодействие пути и подвижного состава》一书中，由 Бромберг 所給出的魚尾鋸靜力最大弯矩計算公式也存在疏誤之处。本文重新予以修正。

二、在靜力計算中本文吸取了 Данилов、Бромберг 等学者計算方案的合理部份，舍弃其缺点，提出了按弹性鉸接多支点梁的解法。

三、在动力分析中过去只着重从給定的不平順外形所引起的强迫振动进行研究，而本文認為除此之外，在鋼軌接头处还应考虑車輪經過接头时突加冲击力的作用。因此提出以碰撞与振动理論相結合的方法来分析，并給出相应的动力計算初阶近似的解。

四、本文进行了实例計算，并通过环行綫上試驗結果予以驗證。

一、引 言

在铁道上部建筑中普通接头线路沿用已久，它存在一些缺点，如：费钢料且线路整体性差，加剧机车车辆与线路相互的动力作用，影响列车运行及线路的稳定。这些都直接或间接地增加铁路运营费用。在铁路运输日益发展情况下，随着列车轴重及运行速度的提高，这些缺点也将突出地显示出来，因之近几十年许多国家在改造线路结构的同时也发展了其他形式接头的线路，特别是无缝线路，已成为改善与加强线路重要的技术措施之一。

但从另一方面来看，尽管普通接头线路存在一系列的缺点，由于它构造技术简单，发展历史久远，实际在线路上已存在得相当普遍。因此如何正确地运用并改进它，如何客观地了解并发挥它的潜力，这将对铁路运输工作而言同样是有很大现实意义的。然而要能科学地达到这一目的，首先必需认真地研究钢轨接头的工作条件，对它的受力情况有一比较清楚的了解，才能作出正确的判断。可是目前我们并没有一组比较吻合实际的钢轨接头靜力、动力的计算公式。过去我们曾经直接引用 AREA 1930 年所得到的经验公式^[1]，苏联也曾将它列入 1940 年线路强度计算规程之中。但这一经验公式与实际相差很大，例如北京局科研所的同志也曾按该公式复核过魚尾鋸的应力，在 43 公斤钢轨线路，行驶建设型机车速度 70 公里/时以及人民型机车速度 85 公里/时的情况下，双头魚尾鋸的应力计算值竟高达 3600~4100 kg/cm²。与此同时他们对新采用塑料魚尾鋸也用同一公式进行了核算，在同样运营条件下

* 这一课题的研究，得到許多有关单位的支持和协助，如铁道科学研究院綫路研究室，特别是李景昌同志对这一問題的实验工作，給予大力的支持。在环行道的試驗中，还得到唐山铁道学院聶厚显同志、哈尔滨铁路局科研所陈玉湘同志、吉林铁路局科研所史玉东同志协作。

应力值达2500~3000kg/cm²，这一数值将超过该项材料的极限强度，然而实际上上述所计算的鱼尾钣其大多数却长时期地安然无恙地工作在线路上，可见采用这一公式从经验、实验、理论上都显然是不正确的。因此不得不放弃这一算法。

应用不正确的公式甚至还会引出这样错误的估计和推论，即：目前普通接头线路潜力已尽，列车速度及轴重再进一步提高，即使采用50kg双头鱼尾钣也将不能胜任新的要求。实际上这是不客观的。本文从理论与实验上都否定这种观点。其原因是已有的计算公式并没有确切地反映它的实际情况。从而本文以此为目的进行了研究。

钢轨接头在理论上的分析是在线路强度理论全面发展的时期之初（十九世纪末二十世纪初）就开始的，其后如Холодецкий，Казей，Данилов〔2〕，Бромберг〔3〕，Блох〔4〕等苏联学者及工程师在这方面都有专门的研究，从他的理论分析的基本方法来归纳，在静力计算方面不外以下二种，即：多弹性支点梁及连续弹性基础梁的计算理论，如Холодецкий（1897）、Бромберг（1948）（1956）是按前者方法推导给出钢轨接头静力计算的解，而Казей首先提出按弹性铰接的弹性基础梁的图示求解，而弹性铰两边杆件轴线挠角的改变量 $\Delta\theta$ 与所传递的弯矩成正比，而挠度的改变量 Δy 与所传递的剪力成正比。Данилов教授（1952）在这一基础上又采用了作用在接头上时假想力的方式考虑了接头处枕木间距缩小的影响，导出了钢轨接头静力计算公式。

钢轨接头挠度的计算：

$$y_{cm} = \frac{PK}{2U} \cdot \frac{2e^{-Kx_p} [\sin Kx_p + (1 + \gamma K) \cos Kx_p]}{(1 + \gamma K) \left(1 + \frac{\delta}{2K^3}\right) + 1}.$$

钢轨接头鱼尾钣所承受的弯矩：

$$M_H = \frac{P}{4K} \cdot \frac{2e^{-Kx_p} \left[-\left(1 + \frac{\delta}{2K^3}\right) \sin Kx_p + \cos Kx_p \right]}{(1 + \gamma K) \left(1 + \frac{\delta}{2K^3}\right) + 1}.$$

其中 γ ——弹性铰的比例系数， $\Delta\theta = \varphi_{cm} = \frac{\gamma}{EI_p} M_{cm}$ ，

δ ——反映枕木间距引入假想力的特征系数，

$$\delta = \frac{U}{EI_p} \cdot \frac{l_m - l_{mc}}{2};$$

l_m 、 l_{mc} 分别为轨节中间及接头处枕木间距。

对以上这些解中存在的问题，计算方案的优缺点，本文中都做了详细的讨论，并在此基础上推导出新的计算公式。

在动力计算方面，则一般都是以Петров、Timoshenko〔5〕、Шахунянц〔6〕等教授轨道振动理论为基础来研究的，但一般也都停留在假设各种外形的不平顺，来研究轨道的动力问题，可是反映接头区轨道特点的却极为罕见。1962年Блох曾做进一步深入地讨论，但由于具体求解十分繁复，没有给出能实际应用的解。又如V. Lehel〔7〕为了解决电力机车传动齿轮的动力问题，曾研究了当机车通过接头时机车走行部分与线路振动的相互作用。此外值得提出的还有日本学者佐藤裕〔8〕、国枝正春〔9〕等人在轨道振动动力学方面有相当深入的研究，从这里可以得到一些启发，但是也没有专门对接头作特殊具体的考虑与核算。

本文在动力计算方面提出应用振动及碰撞的理论进行研究，用碰撞理论解决车辆经过钢轨接头时所作用的附加动力进而研究轨道的强迫振动问题，给出便于实用的解。

二、鋼軌接头靜力分析对Бромберг解的商榷

1956年Вериго与Бромберг等学者在他们所著的《Взаимодействие пути и подвижного состава》一书中曾提出了钢轨接头应力的计算公式。其所采用的计算简图与基本假设为：

1. 将钢轨接头看作是用鱼尾钣所连接的二段钢轨，每边为支承在三个弹性支点上的梁来考虑（图1）。

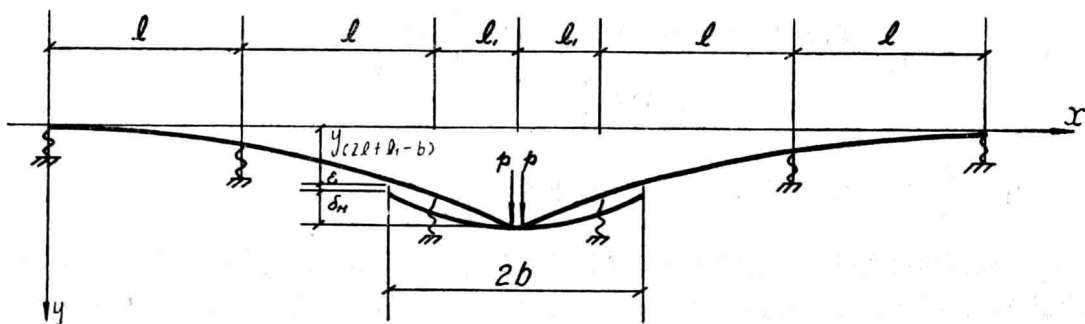


图1. 接头处鋼軌及魚尾钣挠曲图

2. 鱼尾钣与钢轨间相互作用的接触力为集中力，并分别作用在对应于鱼尾钣的中部和两端的位置上。

3. 变形条件是在接头断面处，鱼尾钣和钢轨轴线应有相同的位移。即：

$$y(2l+l_1) = y(2l+l_1-b) + \delta_H + \epsilon.$$

其中 $y(2l+l_1)$ ——钢轨端部的位移；

$y(2l+l_1-b)$ ——钢轨在 $x = 2l + l_1 - b$ 点处的位移；

δ_H ——鱼尾钣受弯时中点的挠度；

ϵ ——在传递压力时由于钢轨和鱼尾钣的挤压变形所引起的钢轨端部和鱼尾钣相互的垂直位移。

根据上述所提条件，他给出了当载荷作用在接头断面处计算二块鱼尾钣所承受的最大正弯矩的公式如下：

$$M_0 = \frac{\left[\frac{p \alpha_0^2}{6} - \frac{R_1 (\alpha_0 - \alpha_1)^3}{6 \alpha_0} - \frac{C_1}{l^2} \right] l + \frac{E I_p \epsilon}{b l}}{\frac{I_p}{I_H} \cdot \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma (\alpha_0 - \alpha_1)^3}{2 \alpha_0 \left(6 \gamma + \frac{2}{3} \right)}}.$$

其中 b ——鱼尾钣长度之半；

l ——非接头处配置轨枕中线间距；

l_1 ——接头处配置轨枕中线间距之半；

I_p ——钢轨断面对通过断面重心水平横向轴线的惯性矩；

I_H ——两块鱼尾钣断面对通过断面重心水平横向轴线的惯性矩；

R_1 ——在图1所示的载荷作用下，卸去鱼尾钣时，靠近接头第一支点的反力，

$$R_1 = \frac{\frac{2}{3} + \frac{5}{6} \alpha_1 + 5\gamma + 3\gamma\alpha_1}{6\gamma + \frac{2}{3}} p,$$

$$\gamma = \frac{EI}{Dt^3};$$

D ——轨枕下沉系数;

C_1 ——积分常数,

$$C_1 = \frac{l^2 \left(18\gamma^2 + 18\gamma^2\alpha_1 + 26\gamma\alpha_1 + 5\gamma + \frac{7}{6}\alpha_1 \right)}{6 \left(6\gamma + \frac{2}{3} \right)} p;$$

$$\alpha_1 = \frac{l_1}{l}, \quad \alpha_0 = \frac{b}{l}, \quad p \text{——轮重的一半。}$$

至于载荷作用在接头附近时计算鱼尾钣所承受的负力矩 M_1 , 该书中认为可以不考虑接头的影响, 而按通常无限长弹性基础梁计算公式, 即一般非接头处轨道应力计算弯矩方法来处理。其计算图示系取在轨道接头处作用有两个距接头等远的车辆轮的情况来分析, 从而:

$$M_1 = \frac{1}{2k} P e^{-kx} (\cos kx - \sin kx),$$

其中 x ——两个距接头等远的载荷 P 至接头的距离;

k ——线路的相对刚度系数。

根据上述计算公式, 作者曾代入具体数据进行计算, 在求 M_0 时发现此答案不合理, 所求正弯矩 M_0 不但得出负值而且绝对值一般偏高很多, 甚至还可能大于在一切条件不变时所算出的非接头处钢轨之最大弯矩, 显然此公式不仅仅是符号上的问题了, 它不能反映钢轨接头的受力情况。现将计算时所采用的数据及结果列于下表。

表 1

计算时所采用的数据

项 目 内 容	符 号	单 位	数 值
43kg钢轨磨耗 6mm 的惯性矩	I_p	cm ⁴	1313
弹性模量	E	kg/cm ²	2.1×10^6
鱼尾钣 43 kg 双头型 2 块对 X X 惯性矩	I_H	cm ⁴	2×190
长 度 $2b$	$2b$	cm ¹	2×39.5
碎石道床 II-甲 型枕木下沉系数	D	kg/cm	13110
轨道基础相对刚度系数	K	cm ⁻¹	0.01175
轨枕间距	l	cm	63.16
接头处轨枕间距	$2l_1$	cm	2×25
	α_1	—	0.3958
	α_0	—	0.6254
计算结果 (载荷 P 在接头处) 轮重 $P = 2p$			
两块鱼尾钣所承受的正弯矩	M_0	kg cm	$-23.91P$
在以上所采用数据情况下钢轨中部的正弯矩	$M = \frac{P}{4K}$	kg cm	$+21.28P$
$\frac{M_0}{M}$ 之比			-1.124

根据以上情况，作者不得不详细推敲了他的公式在仍然不变其原有的假设条件下重新推导了计算正弯矩 M_0 的公式，改正原解如下：

$$M_0 = \frac{\left[-\frac{p}{6} \alpha_0^2 + \frac{R_1(\alpha_0 - \alpha_1)^3}{6\alpha_0} + \frac{C_1}{l^2} \right] l - \varepsilon \frac{EI_p}{bl}}{\frac{1}{3} \frac{I_p}{I_H} \alpha_0 - \left[\frac{\alpha_0}{6} + \frac{G(\alpha_0 - \alpha_1)^3}{6\alpha_0^2} - \frac{F}{\alpha_0} \right]}. \quad (1)$$

$$\text{其中 } C_1 = \frac{l^2 \left(18\gamma^2 + 18\gamma^2\alpha_1 + 26\gamma\alpha_1 + 5\gamma + \frac{7}{6}\alpha_1 + 2\alpha_1^2 + 18\gamma\alpha_1^2 \right)}{6 \left(\frac{2}{3} + 6\gamma \right)} p,$$

$$G = \frac{\frac{1}{6}(\alpha_0 - \alpha_1)^3 - \frac{5}{6}\alpha_0 - 3\gamma\alpha_0}{\frac{2}{3} + 6\gamma},$$

$$F = \frac{3\gamma(\alpha_0 - \alpha_1)^3 + \frac{5}{6}(\alpha_0 - \alpha_1)^3 - 18(\gamma\alpha_0^2 - 2\alpha_0\alpha_1) - 2(\alpha_0^2 - 2\alpha_0\alpha_1) + 18\gamma^2\alpha_0 + 26\gamma\alpha_0 + \frac{7}{6}\alpha_0}{6 \left(\frac{2}{3} + 6\gamma \right)},$$

其他符号均与前同。

同样以表 1 所列的具体数据代入上述公式，经计算后所得列于下表。

表 2

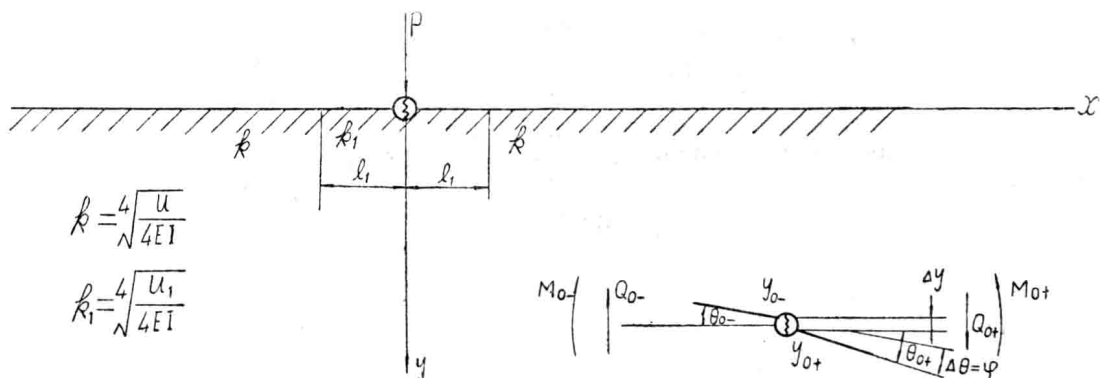
计 算 结 果		(輪重 $P = 2p$)	
两块魚尾鉗所承受的正弯矩	M_0	kg cm	+ 16.65 P
同样軌型和基础情况下鋼軌中部的正弯矩	$M = \frac{1}{4K} P$	kg cm	+ 21.28 P
比值 $\frac{M_0}{M}$			+ 0.7826

从表 2 所列结果与原解相比，无论从经验数字或从理论上分析，都在合理范围之内。但是尽管更正了原解不妥之处，所得的这个解还是有缺点的。因为它并没有脱离原有的基本假设，最主要的是因为采取了钢轨和魚尾鉗间接触力的最简化的假定，来计算魚尾鉗的变形 δ_H ，而实际上它们彼此间的相互作用是极为复杂的。这不仅仅决定于彼此的几何形式接触情况材质，同时还与连接它们的螺栓之锁紧程度也有关，所以在此假定下， δ_H 的计算是近似的，尽管其他步骤再考虑得精确，也要受这一项的影响，所以与实际结果相比还有一定距离，同时这一改正后的公式计算步骤也较繁，所以作者对钢轨接头的静力计算又作进一步的研讨。

三、对 Данилов 解的讨论

在引言中所介绍的 Данилов 教授的解是按弹性铰接的连续弹性基础梁的假定导出钢轨接头在载荷作用下所承受的内力素和位移的计算公式。为了简化计算，他将轨道基础看作是等弹性的，而对实际上钢轨接头处因枕木间距缩小的影响，则是以作用在弹性铰上一对假想力的方式来考虑的，归纳起来分析这个解也是采用了三个基本假设，即：（1）将魚尾鉗连接看作是弹性铰，（2）采用连续支承代替多支点支承，（3）采用假想集中力作用在接头处代替接头轨枕间距缩小的作用。从而在理论上不难看出后两点假定将使所得到的结果将会偏低。

本文作者曾经改变了上述的第三个假定而将它看作是变刚度的弹性基础上的弹性铰接梁，相应提出比较精确的解，其计算图示见图2。



为弹性铰接分离体图

图2. 变刚度弹性基础弹性铰接梁

而图2a中所示为弹性铰的分离体图，其工作条件由变形系数 ζ 、 h 决定，即：

$$\Delta\theta = \varphi = \frac{\zeta}{EI_p} M_0, \quad \Delta y = \frac{h}{EI_p} Q_0.$$

M_0 、 Q_0 分别为接头处的弯矩和剪力。

在推导公式时采用初参数法并利用克雷洛夫函数进行计算。因基础刚度在接头区与非接头区有所不同，所以在刚度变化处须分段计算，而相邻两段在该点应有相同的挠度与挠角，根据这两个变形条件以及弹性铰的变形条件并利用了结构的对称性，化简以后即可得到下面的一方程组：

$$\begin{pmatrix} A & B-2\mu C & 0 & 0 \\ E & F-2\mu G & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \theta_0 \\ M_0 \\ Q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \\ H \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \left(\frac{P}{2} \right) \quad (2)$$

于是立即可写出它的解答如下：

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{\begin{vmatrix} D & B-2\mu C \\ H & F-2\mu G \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B-2\mu C \\ E & F-2\mu G \end{vmatrix}} \left(\frac{P}{2} \right), \\ \theta_0 &= \frac{\begin{vmatrix} A & D \\ E & H \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B-2\mu C \\ E & F-2\mu G \end{vmatrix}} \left(\frac{P}{2} \right), \\ M_0 &= \frac{-2\mu \begin{vmatrix} A & D \\ E & H \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B-2\mu C \\ E & F-2\mu G \end{vmatrix}} \left(\frac{P}{2} \right) = -2\mu \theta_0, \\ Q_0 &= -\frac{P}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

其中 y_0 , θ_0 , M_0 , Q_0 为接头断面处的挠度、挠角、弯矩、剪力;

μ 为弹性铰的弹性系数, $\mu = \frac{EI_p}{\xi}$; $M_0 = \mu \varphi$, φ 为弹性铰两边杆件轴线的交角。

当结构、载荷都呈对称时, 在本文中所采取的坐标系情况下:

$$M_0 = -2\mu\theta_0; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} A &= F_1(k_1 l_1) + \alpha F_2(k_1 l_1) + \beta F_3(k_1 l_1), \\ B &= \frac{1}{k_1} [F_2(k_1 l_1) + \alpha F_3(k_1 l_1) + \beta F_4(k_1 l_1)], \\ C &= -\frac{1}{k_1^2 EI_p} \left[F_3(k_1 l_1) + \alpha F_4(k_1 l_1) - \frac{\beta}{4} F_1(k_1 l_1) \right], \\ D &= -\frac{1}{k_1^3 EI_p} \left[F_4(k_1 l_1) - \frac{\alpha}{4} F_1(k_1 l_1) - \frac{\beta}{4} F_2(k_1 l_1) \right], \\ E &= -k_1 [4F_4(k_1 l_1) + \beta F_2(k_1 l_1) + 2\gamma F_3(k_1 l_1)], \\ F &= [F_1(k_1 l_1) - \beta F_3(k_1 l_1) - 2\gamma F_4(k_1 l_1)], \\ G &= -\frac{1}{k_1 EI_p} \left[F_2(k_1 l_1) - \beta F_4(k_1 l_1) + \frac{1}{2} \gamma F_1(k_1 l_1) \right], \\ H &= -\frac{1}{k_1^2 EI_p} \left[F_3(k_1 l_1) + \frac{\beta}{4} F_1(k_1 l_1) + \frac{1}{2} \gamma F_2(k_1 l_1) \right], \\ \alpha &= 2 \left(\frac{k_1}{k} \right)^3, \quad \beta = 2 \left(\frac{k_1}{k} \right)^2, \quad \gamma = 2 \left(\frac{k_1}{k} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

F_1 , F_2 , F_3 , F_4 为括弧内相应数值的克雷洛夫函数值。

为了具体应用这一公式, 作者做了一个实例计算, 并且为了能与 Данилов 教授所导出的公式进行比较, 因此计算数据完全引用他的例题中所采用的资料^[2], 详见表 3。

从以上结果可以看出, 采用分二段变刚度弹性基础梁的解比用集中作用在接头处附加假想力的办法所得之值有所增加。但是这种解法基本上还是把实际上一些单个的枕木支承视为在跨间连续分布的轨道基础, 同时在刚度变化情况下所得公式具体计算相当繁复。所以作者又进一步研究得出即比较吻合实际而且又便于实用的解, 下节就是本文所建议采纳的一种计算方法。

表 3

计 算 数 据			
项 目	符 号	单 位	数 值
I-a 型钢轨惯性矩	I_p	cm ⁴	1400
钢轨弹性模量	E	kg/cm ²	2.1×10^6
1600 根/公里 枕木碎石道床轨道基础弹性系数	u	kg/cm ²	292
非接头区线路相对刚性系数	k	cm ⁻¹	0.0125
接头区范围	l_1	cm	25
接头区线路相对刚性系数	k_1	cm ⁻¹	0.01324
弹性铰变形系数	ξ		80

續上表

各項計算參數值			
α	2.377	D	$-15.2541 \frac{1}{k_1^3 E I_p}$
β	2.244	E	$11.3753 k_1$
γ	2.118	F	-22.7886
A	-34.8417	G	$28.4774 \frac{1}{k E I_p}$
B	$-4.3399 \frac{1}{k_1}$	H	$17.0839 \frac{1}{k_1^2 E I_p}$
C	$-13.0823 \frac{1}{k_1^2 E I_p}$		
計算結果比較			
項 目	按本節推導公式		按 Данилов 解
接头弯矩 M_0	12.3 P kg cm		12.04 P kg cm
鋼軌中部弯矩 M	20 P "		20 P "
$\frac{M_0}{M}$	0.615		0.602

四、按彈性鉸接多彈性支點梁的解法

1. 基本假定的討論

鋼軌支承在枕木上無疑可以看作是多彈性支點的連續梁。魚尾鉸對鋼軌的約束作用，若要先分析清楚它們彼此作用的接觸力然後求解鋼軌及魚尾鉸的彎曲課題，則是極其複雜的。但是如果在還沒有確切掌握彼此相互作用具體規律時，就以最簡單的方法假設它們之間相互作用力的圖示，在這一基礎上所進行的計算必然是不可能與實際很好的吻合。因此本文認為以實驗方法來確定各種類型接头魚尾鉸對鋼軌約束作用的力學參數，然後再進行與之相應的理論計算，這樣所推出的公式，將可能得到既接近實際情況又較為簡便的解。因之本文採取以下二個基本假設：

- (1) 將鋼軌視為多支點彈性基礎梁；
- (2) 魚尾鉸對鋼軌的約束作用可視為一個彈性鉸。

其變形系數仍用前節所述定義確定不予重複。

不难看出这两点基本上是择取了前面二种解法假设的合理部分。

2. 計算圖示與力學分析原理：

(i) 方程的建立：见图 3 所示。

其中鋼軌接头处枕木間距為 $2l_1$ ，其餘為 l 。載荷 P 作用在接头上，由於結構的對稱性可以歸結為解圖3b所示的問題，其中 M_0 為接头弯矩作為未知載荷作用於右端， R_i 為第 i 支點的反力， M_i 為第 i 支點上的未知弯矩。為計算簡便起見，將圖b的問題又可化為c、d問題的疊加，而圖c及圖d為僅先求解單位力與單位力矩作用在右端時的結果然後乘以相應

的“ $\frac{P}{2}$ ”及“ M_0 ”即可，故其中所标的符号 $R_i(m)$ 分别为单位力或单位力矩的外载荷作用下第 i 支点的反力， $M_i(m)$ 分别为单位力或单位力矩的外载荷作用下第 i 支点的未知弯矩，显然有

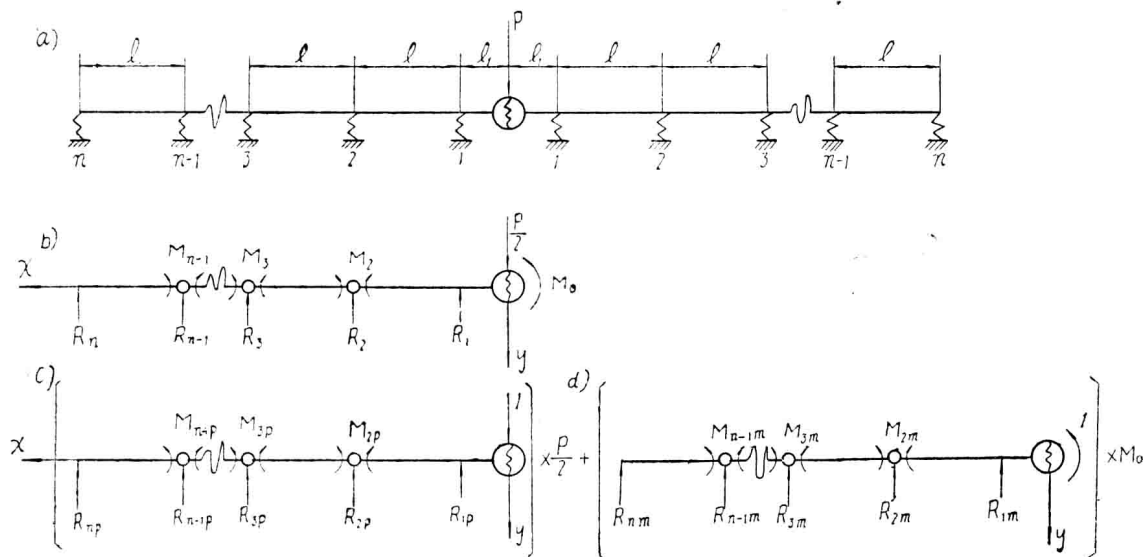


图3. 多弹性支点弹性铰接梁计算图

$$\left. \begin{aligned} R_i &= R_{ip} \cdot \frac{P}{2} + R_{im} \cdot M_0, \\ M_i &= M_{ip} \cdot \frac{P}{2} + M_{im} \cdot M_0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

根据每个支点处杆件的变形条件，对 c 、 d 每一图示都可以得到如下相应的一组方程：

$$\begin{pmatrix} \delta_{22} & \delta_{23} & \delta_{24} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \delta_{32} & \delta_{33} & \delta_{34} & \delta_{35} & 0 & \cdots & 0 \\ \delta_{42} & \delta_{43} & \delta_{44} & \delta_{45} & \delta_{46} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \delta_{ii-2} & \delta_{ii-1} & \delta_{ii} & \delta_{ii+1} & \delta_{ii+2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \delta_{n-1,n-3} & \delta_{n-1,n-2} & \delta_{n-1,n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_2(p_m) \\ M_3(p_m) \\ M_4(p_m) \\ \vdots \\ M_{n-1}(p_m) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta_2(p_m) \\ \Delta_3(p_m) \\ \Delta_4(p_m) \\ \vdots \\ \Delta_{n-1}(p_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

根据弹性铰的变形条件可得：

$$\varphi = \theta_{0+} - \theta_{0-} = \frac{\zeta}{EI} M_0, \text{ 在对称情况下可化为} \quad 2\theta_{0+} = -2\theta_{0-} = \frac{\zeta}{EI} M_0. \quad (8)$$

以上连同 M_0 共有 $n-1$ 个未知数，有 $n-1$ 个独立方程，因此可以求解。

根据莫尔定理，其中：

$$\left. \begin{aligned} \delta_{ij} &= \Sigma \int \frac{m_i m_j ds}{EI} - \Sigma R_{ki} y_{kj}, \\ \Delta_i(p_m) &= \Sigma \int \frac{m_i m(p_m) ds}{EI} - \Sigma R_{ki} y_{k(p_m)o} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

m_i, m_j 分别为对应于第 i, j 支座上的单位力矩梁内所产生的弯矩;

$m_{(m)}^{(p)}$ 为外载荷 $P = 1$ 或 $M_0 = 1$ 作用下梁内所产生的弯矩;

R_{ki} 为由于第 i 支点上作用的单位力矩在第 k 支点上所引起的反力;

$y_{ki}, y_{k(m)}^{(p)}$ 分别为由第 j 支座上作用的单位力矩及外载荷在第 k 支点上所引起的下沉。

(ii) 求解步骤:

首先由方程组 (7) 可解得 $M_{2(m)}^{(p)} \cdots M_{n-1(m)}^{(p)}$, 从而可得对应于图 c, d 中的各支点的反力

$$\left. \begin{aligned} R_{1p} &= \frac{M_{2p}}{l} + (1 + \alpha_1) \cdot 1, \\ R_{2p} &= \frac{-2M_{2p}}{l} + \frac{M_{3p}}{l} - \alpha_1 \cdot 1, \\ &\dots\dots\dots \\ R_{np} &= \frac{M_{n-1}}{l} \circ \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} R_{1m} &= \frac{M_{2m}}{l} - \frac{1}{l}, \\ R_{2m} &= -\frac{2M_{2m}}{l} + \frac{M_{3p}}{l} + \frac{1}{l}, \\ &\dots\dots\dots \\ R_{nm} &= \frac{M_{n-1m}}{l} \circ \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其中 $\alpha_1 = \frac{l_1}{l}$ 。

其次利用初参数法计算接头处角变形, 对于图 c 可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{R_{1p}}{D} &= y_{0p} + \theta_{0p} l_1 + \frac{1 \cdot l_1^3}{6EI}, \\ \frac{R_{2p}}{D} &= y_{0p} + \theta_{0p} (l_1 + l) + \frac{1 \cdot (l_1 + l)^3}{6EI} - \frac{R_{1p} l^3}{6EI} \circ \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

相减得:

$$EI \theta_{0p} = -C_{1p} l^2 \circ$$

$$\text{其中 } C_{1p} = \left[\gamma (R_{1p} - R_{2p}) - \frac{R_{1p}}{6} + \frac{1 + 3\alpha_1 + 3\alpha_1^2}{6} \right], \quad (13)$$

$$\gamma = \frac{EI}{Dl^3} \circ$$

同理对于图 c 可得

$$EI \theta_{0m} = C_{1m} l,$$

$$\text{其中 } C_{1m} = \left[\gamma l (R_{2m} - R_{1m}) + \frac{l}{6} R_{1m} + \frac{1 + 2\alpha_1}{2} \right] \circ \quad (14)$$

由第 (13), (14) 两式即得接头左端点 (即 $x = 0 -$, 点) 的挠角

$$\theta_{0-} = \theta_{0p} \cdot \frac{P}{2} + \theta_{0m} \cdot M_0 = \frac{-C_{1p} l^2 \left(\frac{P}{2} \right) + C_{1m} l \cdot M_0}{EI} \circ$$

由于对称性:

$$\varphi = -2\theta_0 = \frac{2C_{1p}l^2\left(\frac{P}{2}\right) - 2C_{1m}lM_0}{EI}。$$

最后代入接头处弹性铰的变形条件 (8) 式得:

$$\frac{2C_{1p}l^2\left(\frac{P}{2}\right) - 2C_{1m}lM_0}{EI} = \frac{\zeta M_0}{EI}。$$

化简即得接头弯矩如下:

$$M_0 = \frac{C_{1p}l^2}{2C_{1m}l + \zeta} \cdot P。 \quad (15)$$

当取 $\zeta = 0$ 时的特殊情况下即得出用多弹性支点连续梁方法解得钢轨整体连接时最大正弯矩, 而 $\zeta = \infty$ 即得多弹性支点连续外伸梁的解。

3. 计算 M_0 的实用简化公式

以上我们讨论了在接头左右各取 n 个支点计算的精确解法, 但是我们清楚的了解到每边多加一个支点计算的工作量只是乘法运算就要增加 $3(n+1)$ 倍, 显然 n 越大计算越繁, 而计算结果的精确度当 n 取到一定数目以后, 它的提高却是极其有限的, 所以在计算中我们不能认为支点数目取得越多越好, 所以我们首先每边取了 3 个支点进行计算进而每边取 5 支点时又作了实例计算以验证其解。

(i) 当取 $n = 3$ 时

方程组只剩下第一个公式, $M_3 = 0$ 。

$$\left. \begin{aligned} \delta_{22} &= \frac{6}{Dl^2} + \frac{2}{3} \frac{l}{EI}, \\ \Delta_{2p} &= -\frac{l_1 l}{6EI} + \frac{1}{Dl} + \frac{3l_1}{Dl^2}, \\ \Delta_{2m} &= \frac{1}{6} \frac{l}{EI} - \frac{3}{Dl^2}。 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

于是可以解出

表 4

	M_2	R_1	R_2	R_3
$P=1$	$\frac{\frac{\alpha_1}{6} - \gamma - 3\gamma\alpha_1}{\frac{2}{3} + 6\gamma}$	$\frac{\frac{2}{3} + \frac{5}{6}\alpha_1 + 5\gamma + 3\gamma\alpha_1}{\frac{2}{3} + 6\gamma}$	$\frac{-\alpha_1 + 2\gamma}{\frac{2}{3} + 6\gamma}$	$\frac{\frac{1}{6}\alpha_1 - \gamma - 3\gamma\alpha_1}{\frac{2}{3} + 6\gamma}$
$M_0=1$	$\frac{3\gamma - \frac{1}{6}}{\frac{2}{3} + 6\gamma}$	$-\frac{3\gamma + \frac{5}{6}}{\frac{2}{3} + 6\gamma} \cdot \frac{1}{l}$	$\frac{1}{\frac{2}{3} + 6\gamma} \cdot \frac{1}{l}$	$\frac{3\gamma - \frac{1}{6}}{\frac{2}{3} + 6\gamma} \cdot \frac{1}{l}$

$$C_{1p} = \frac{18\gamma^2 + 18\gamma^2\alpha_1 + 26\gamma\alpha_1 + 5\gamma + \frac{7}{6}\alpha_1 + 2\alpha_1^2 + 18\gamma\alpha_1^2}{6\left(\frac{2}{3} + 6\gamma\right)}, \quad (17)$$

$$C_{1m} = \frac{\frac{7}{6} + 26\gamma + 4\alpha_1 + 36\gamma\alpha_1 + 18\gamma^2}{6\left(\frac{2}{3} + 6\gamma\right)}, \quad (18)$$

$$M_0 = -\frac{C_{1p}l^2}{2C_{1m}l + \zeta} P, \quad (19)$$

$\zeta = 0$ 时得在载荷 P 作用下没有接头时钢轨的最大正弯矩:

$$M = -\frac{C_{1p}l^2}{2C_{1m}l} P,$$

而
$$\frac{M_0}{M} = \frac{2C_{1m}l}{2C_{1m}l + \zeta} \circ \quad (20)$$

为了便于同前面二节所提到的解进行比较, 我们仍采用表 1 中计算 43kg 钢轨鱼尾钣弯矩时所引用的数据, 现将计算结果列于表 5。

表 5

γ	α_1	l_{cm}	ζ_{radcm}^*	C_{1p}	C_{1m}	M_0	M	$\frac{M_0}{M}$
0.8347	0.3958	63.16	80	0.9808	1.4357	14.97 P	21.57 P	0.694

(ii) 当取 $n = 5$ 时,

不难算出方程组 (7) 式中各系数值

$$\left. \begin{aligned} \delta_{22} = \delta_{33} = \delta_{44} &= \frac{6}{Dl^2} + \frac{2}{3} \frac{l}{EI}, \\ \delta_{23} = \delta_{32} = \delta_{34} = \delta_{43} &= \frac{l}{6EI} - \frac{4}{Dl^2}, \\ \delta_{42} = \delta_{24} &= -\frac{1}{Dl^2}, \\ \Delta_{2p} &= -\frac{l l_1}{6EI} + \frac{1}{Dl} + \frac{3l_1}{Dl^2}, \\ \Delta_{3p} &= -\frac{l_1}{Dl^2}, \\ \Delta_{4p} &= 0, \\ \Delta_{2m} &= \frac{l}{6EI} - \frac{3}{Dl^2}, \\ \Delta_{3m} &= \frac{1}{Dl^2}, \\ \Delta_{4m} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

用与上相同数据算出

$$C_{1p} = 0.866,$$

$$C_{1m} = 1.3755.$$

根据 (20) 式可以算得 $\frac{M_0}{M} = 0.685$ 。

由此可见, 在计算接头弯矩与钢轨最大弯矩之比时, 取 3 个支点计算所得结果与 5 个支点时是相当接近的。所以为了简化计算每边只取 3 个支点进行计算是可以的。

为了工程上实用方便起见, 我们绘制了一套用每边采取 3 支点时钢轨接头弯矩计算图表, 由图中可以查出在一定的轨道基础情况下所对应的 C_{1p} 、 C_{1m} 的系数, 从而可以较简便的得到有关钢轨接头的计算数值。在图 4 中我们给出了当每公里铺设 1600 根枕木, 枕木系数

* ζ 数值采用 Данилов 解算例中所引用的数据。

在 $10^4 \sim 10^5 \text{ kg/cm}$ 时采用 43kg 及 50kg 二种型式的钢轨在二种磨耗 (3mm 及 6mm) 情况下的一种图例。

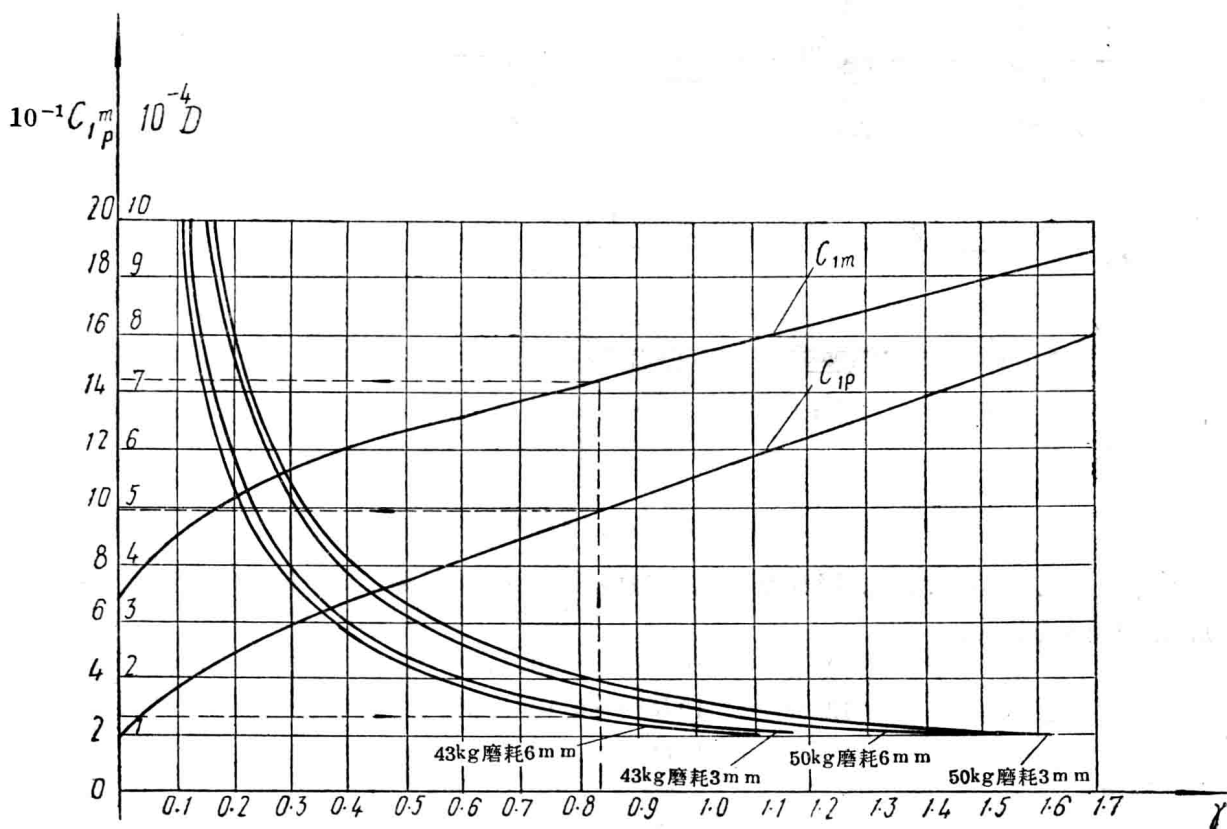


图4. 钢轨接头静力计算图表

五、钢轨接头垂直动力的分析

机车车辆沿钢轨运行, 经过接头时由于接头破坏了钢轨的整体性, 钢轨变形曲线及其导数有第一类间断点, 至使轮心轨迹的导数亦不连续, 从而增加车轮对钢轨的动力影响。这一事实可以从车轮越过接头时, 撞击钢轨头所发生的音响及钢轨端头磨损, 变形的增加得到感性的说明。本文根据振动理论作了理论上具体的分析。

1. 接头区轨道自振频率的计算:

如图 5 所示, 钢轨支承在 6 个弹性支点上 (接头每边选 3 个), 以集中质量法考虑钢轨及连同钢轨一起振动的枕木的质量, 设想这些质量逐段集中在相应的弹性支点上。因此这就归结为解六个自由度的振动问题。由于结构及载荷的对称, 所以在解第一自振频率时, 利用对称性可化简为求解三个自由度的问题, 即如图 5b 中所示。

当 $P(t) = 0$ 即建立自由振动的方程组为:

$$\begin{pmatrix} -m_1\delta_{11} & -m_2\delta_{12} & -m_3\delta_{13} \\ -m_1\delta_{21} & -m_2\delta_{22} & -m_3\delta_{23} \\ -m_1\delta_{31} & -m_2\delta_{32} & -m_3\delta_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

设 $y_i(t) = y_i \sin(\omega t + \alpha)$,