考研数学命题人土豪金系列丛书

2016

分类归纳+紧贴大纲+考点全覆盖+真题精析+习题精练

考研数学命题人复习全书

题型强化练习参考答案

（数学二）

全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会 编著

北京大学 尤承业 教授 清华大学 徐荣 教授

北京大学 刘德荫 教授 首都师范大学 童武 教授

赠

1 本书每章习题答案与详解 + 2 篇北大、清华数学满分秘笈 + 2 套原命题组成员密押试卷 + 5 大考研命题人快速解题方法 + 8 小时命题人数学串讲精华

登录 www.buaapress.com.cn 获超多增值服务

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

目　　录

第一部分　高等数学

第1章　函数、极限与连续　题型强化练习参考答案

一、选择题

1. [A].

由函数 $f(x)$ 的表达式知，它在实数轴上除点 $x=0, x=1$ 及 $x=2$ 外处处有定义，在它的定义域上有

$$|f(x)| = \left|\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}\right| = \frac{1}{|(x-1)(x-2)|}\cdot\left|\frac{\sin(x-2)}{x-2}\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{|(x-1)(x-2)|}.$$

由此可见 $f(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 内有界，而在任何以 $x=1$ 或 $x=2$ 为端点的开区间内无界. 故应选[A].

2. [B].

由于 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} x\tan x e^{\sin x} = \infty$，故 $f(x)$ 无界. 或考察 $f(x)$ 在 $x_n = 2n\pi + \dfrac{\pi}{4}(n=1,2,\cdots)$ 的函数值，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = +\infty$，可见 $f(x)$ 是无界函数. 故应选[B].

3. [A].

① $x_n = \begin{cases} n, & \text{当 } n \text{ 为偶数时}, \\ 0, & \text{当 } n \text{ 为奇数时}, \end{cases}$ $\quad y_n = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数时}, \\ n, & \text{当 } n \text{ 为奇数时}, \end{cases}$

则 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 都无界. 但 $x_n \cdot y_n = 0$，$\{x_n y_n\}$ 有界. 故[B]不正确.

② 若设 $y_n = 0$，x_n 如①，则 $\{y_n\}$ 有界，$x_n \cdot y_n = 0$，$\{x_n y_n\}$ 有界. 故[C]不正确.

③ $x_n = n, y_n = -n$，$\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都无界，但 $x_n + y_n = 0$，$\{x_n + y_n\}$ 有界，故[D]不正确. 应选[A].

4. [A].

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{t\to+\infty}(1+t)^{\frac{1}{t}} = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{\frac{1}{1+t}} = e^0 = 1$，应选[A].

这里应注意
$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1} = e^{-1} \neq -e.$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{-1} = e^{-1} \neq e.$$

故应选[A].

5. [B].

设 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 为有理数}, \\ \dfrac{1}{x}, & x \text{ 为无理数}, \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \text{ 为有理数，且 } x \neq 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

则
$$f(x)g(x)=0.$$

当 $x\to 0$ 时，$f(x)g(x)\to 0$. 但 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 及 $g(x)$ 都不是无穷小，命题④不正确；且本例中 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $x=0$ 的任何邻域内都无界，但 $f(x)g(x)=0$，在与前相同的邻域内有界，即命题①不正确. 故应选[B].

6. [D].

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=2\cdot 0=0,$$
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=\infty.$$

当 $x\to 1$ 时函数没有极限，也不是 ∞，故应选[D].

7. [B].

因为
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x+3^x-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2+3^x\ln 3}{1}=\ln 2+\ln 3,$$
且 $\ln 2+\ln 3\neq 1$，所以应选[B].

8. [D].

由于当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$\sqrt{1-x^2}-1\sim-\frac{1}{2}x^2$，

故 x^2，$1-\cos x$，$\sqrt{1-x^2}-1$ 是同阶无穷小，可见应选[D].

9. [A].

由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=-1$ 知，当 $x\to 0$ 时，$f(x)\sim -x^2$，于是 $x^nf(x)\sim -x^{n+2}$.

又当 $x\to 0$ 时，$\ln\cos x^2=\ln[1+(\cos x^2-1)]\sim\cos x^2-1\sim-\frac{1}{2}x^4$.

再根据题设有：$2<n+2<4$. 可见 $n=1$，故应选[A].

10. [D].

用排除法. 令
$$\varphi(x)=1-\frac{1}{x^2},\quad f(x)=1,\quad g(x)=1+\frac{1}{x^2}.$$

显然
$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x),$$
且
$$\lim_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}=0.$$
此时
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=1.$$
故[A]和[C]都不正确.

为排除[B]，再令 $\varphi(x)=x-\frac{1}{x^2}$，$f(x)=x$，$g(x)=x+\frac{1}{x^2}$，显然 $\varphi(x)$，$f(x)$，$g(x)$ 满足题设全部条件，但 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$，故应选[D].

11. [A].

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a(e^{\sin x}-1)+b(x-\sin x)}{c\tan x+d(1-\cos x)}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ae^{\sin x}\cos x+b(1-\cos x)}{c\sec^2 x+d\sin x}$.

当 $a\neq 0$ 时，原式 $\neq 0$，故选[A].

12. [D].

[A],[B]显然不对,因为由数列极限的不等式性质只能得出数列“当 n 充分大时”的情况,不可能得出“对任意 n 成立”的性质.

[C]也明显不对,因为“无穷小、无穷大”是未定型,极限可能存在,也可能不存在.

故应选[D].

13. [A].

由基本初等函数的连续性及连续函数的四则运算法则知 $f(x)=\ln x+\sin x$ 在其定义域 $0<x<+\infty$ 内连续,故应选[A].

14. [D].

由 $f(x)$ 是奇函数有 $f(0)=0$. 又因为 $f'(0)$ 存在,所以

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}g(x).$$

又因为 $x=0$ 是 $g(x)$ 的间断点,且 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=f'(0)$,所以 $x=0$ 是 $g(x)$ 的可去间断点. 故应选[D].

15. [B].

$$\text{易计算得} f(x)=\begin{cases}1+x, & |x|<1,\\ \dfrac{1+x}{2}, & |x|=1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}\text{讨论即知.}$$

由题设得极限为

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & |x|<1,\\ \dfrac{1+x}{2}, & |x|=1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$$

可知 $x=-1$,$x=1$ 为函数的分段点,作函数图形可知 $x=1$ 为 $f(x)$ 的间断点, $x=-1$ 为 $f(x)$ 的连续点,因此应选[B].

16. [D].

因为
$$\lim_{x\to 0}(x)=\lim_{x\to 0}f\left(\frac{1}{x}\right)\overset{\frac{1}{x}=y}{=\!=\!=}\lim_{y\to\infty}f(y)=a,$$

从而,当 $a=0=g(0)$ 时, $g(x)$ 在点 $x=0$ 处连续;当 $a\neq 0$ 时, $g(x)$ 在点 $x=0$ 处间断,即 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关. 故应选[D].

二、填空题

1. $\dfrac{6}{5}$.

$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x^2+3x}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}=\frac{6}{5}.$$

2. e.

[解法一]　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}-1\right)^x$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left[1+\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)\right]}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)}.$$

又 $$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)x=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}+\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{2x^2}}{\frac{1}{x}}=1,$$

故原式 $=\mathrm{e}$.

[解法二] 设 $u=\frac{1}{x}$，则当 $x\to\infty$ 时，$u\to 0$. 于是

$$原式=\lim_{u\to 0}(\sin u+\cos u)^{\frac{1}{u}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{u\to 0}\frac{\ln(\sin u+\cos u)}{u}}.$$

而由洛必达法则，得

$$原式=\lim_{u\to 0}\frac{\ln(\sin u+\cos u)}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{\cos u-\sin u}{\sin u+\cos u}=1,$$

故原式 $=\mathrm{e}$.

3. $\mathrm{e}^{\frac{n+1}{2}}$.

此极限是 1^∞ 型未定式.

[解法一]原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\exp\left[\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)\right]$

$$=\exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx})-\ln n}{x}\right],$$

其中大括号内的极限是 $\frac{0}{0}$ 型未定式，因此由洛必达法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx})-\ln n}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{2x}+\cdots+n\mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}=\frac{1+2+\cdots+n}{n}=\frac{n+1}{2}.$$

于是原式 $=\mathrm{e}^{\frac{n+1}{2}}$.

[解法二]由于

$$\frac{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx})^{nx}}{2}=\left[1+\frac{(\mathrm{e}^x-1)+(\mathrm{e}^{2x}-1)+\cdots+(\mathrm{e}^{nx}-1)}{n}\right]^{\frac{1}{x}},$$

又因 $$\lim_{x\to 0}\frac{(\mathrm{e}^x-1)+(\mathrm{e}^{2x}-1)+\cdots+(\mathrm{e}^{nx}-1)}{nx}$$

$$=\frac{1}{n}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{x}+\cdots+\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{nx}-1}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{n}(1+2+\cdots+n)=\frac{n+1}{2},$$

故原式 $=\mathrm{e}^{\frac{n+1}{2}}$.

4. 1, -4.

不难得出

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\mathrm{e}^x-a}(\cos x-b)=\begin{cases}0, & a\neq 1,\text{任何 } b,\\ 1-b, & a=1,\text{任何 } b.\end{cases}$$

从而，若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则必须且只需 $a=1,1-b=5$，即 $a=1,b=-4$.

5. $\dfrac{4}{3}$.

[解法一]

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2x}-\frac{\cos^2x}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x\cos^2x}{x^2\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\frac{1}{4}\sin^22x}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{4}\sin4x}{2x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos4x}{6x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{3x}=\frac{4}{3}.$$

[解法二]

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2x}-\frac{\cos^2x}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin^2x\cos^2x}{x^2\sin^2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x(1-\sin^2x)}{x^4}\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x}{x^4}+\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}+\lim_{x\to0}\frac{x+\sin x}{x}+1$$

$$=1+2\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=1+\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\frac{4}{3}.$$

6. $\dfrac{1}{4}$.

因为
$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\frac{x+1}{x-1}=\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}=\ln e^2=2,$$

所以
$$\lim_{x\to0}\frac{x}{f(2x)}=2,\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{2x}{f(2x)}=\frac{1}{2}\lim_{u\to0}\frac{u}{f(u)}=2.$$

故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{4}$.

7. 16.

$$\text{原式}\xlongequal{\text{令}x=-t}\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{at^2+t+2}-t+1}{\sqrt{t^2-\cos t}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{a+1/t+2/t^2}-1+1/t}{\sqrt{1-(\cos t)/t^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{a}-1}{1}=3.$$

故 $a=16$.

8. $\dfrac{1}{3}$.

$$\lim_{x\to0}\frac{(3+x)^x-3^x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3^x\left[\left(1+\frac{x}{3}\right)^x-1\right]}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}3^x\lim_{x\to0}\frac{e^{x\ln(1+x/3)}-1}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{3}}{x} = \frac{1}{3}.$$

9. 2.

$$\text{原式} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+3\sqrt{n}-n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}} = 2.$$

10. $a=-\dfrac{3}{2}$.

由 $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1 \sim \frac{1}{3}ax^2, \cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$，以及

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -\frac{2}{3}a = 1,$$

可得
$$a=-\frac{3}{2}.$$

11. $\dfrac{1}{1-2a}$.

由于 $\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n = \ln\left[1+\dfrac{1}{n(1-2a)}\right]^n = n\ln\left[1+\dfrac{1}{n(1-2a)}\right]$，

利用等价无穷小代换，有

$$\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right] \sim \frac{1}{n(1-2a)}(n\to\infty).$$

于是
$$\text{原式} = \lim_{x\to\infty} n\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{n}{n(1-2a)} = \frac{1}{1-2a}.$$

12. $4e^{-1}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n}\cdots\frac{(n+n)}{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\exp\left[\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\right] = \exp\left\{\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\right]\right\}$$
$$= e^{\int_0^1 \ln(1+x)\,dx} = 4e^{-1}.$$

三、解答题

1. 属 1^∞ 型

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0^+}\left[1+(\cos\sqrt{x}-1)\right]^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\pi}{x}(\cos\sqrt{x}-1)}.$$

由于
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\pi}{x}(\cos\sqrt{x}-1) = \pi\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}{x} = -\frac{\pi}{2}.$$

故原式 $= e^{-\pi/2}$.

2. [解法一]

因为 $\left(1-x+\dfrac{x^2}{2}\right)e^x = \left(1-x+\dfrac{x^2}{2}\right)\left[1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)\right] = 1+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$，

$$\sqrt{1+x^3}=(1+x^3)^{1/2}=1+\frac{x^3}{2}+o(x^3),$$

所以$$\lim_{x\to0}\frac{\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)e^x-\sqrt{1+x^3}}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\left[1+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]-\left[1+\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3}=-\frac{1}{3}.$$

[解法二]

$$\lim_{x\to0}\frac{\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)e^x-(1+x^3)^{1/2}}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)e^x-1}{x^3}-\lim_{x\to0}\frac{(1+x^3)^{1/2}-1}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(x-1)e^x+\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)e^x}{3x^2}-\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{6x^2}e^x-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}.$$

3.

这是 n 项和式和极限，当各项分母均相同是 n 时，n 项和式

$$x_n=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n}$$

是函数 $\sin\pi x$ 在[0,1]区间上的一个积分和，于是可由定积分 $\int_0^1\sin\pi x\,dx$ 求得极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.

为了求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}$，首先通过放缩化简 n 项和数列：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+0};$$

由于 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+0}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\int_0^1\sin\pi x\,dx=\frac{2}{\pi},$$

据夹逼准则，有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}=\frac{2}{\pi}.$$

4.

【证明】 首先，显然有 $x_n>0$, $\{x_n\}$ 有下界．

证明 x_n 单调减：用归纳法. $x_2=\sqrt{6+x_1}=\sqrt{6+10}=4<x_1$；设 $x_n<x_{n-1}$ 则

$$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}<\sqrt{6+x_{n-1}}=x_n.$$

由此，x_n 单调减. 由单调有界准则，$\lim\limits_{x\to\infty}x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，求 a．在恒等式 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ 两边取极限，得 $a=\sqrt{6+a}$，$a=33$

($a=-2$ 舍去,因为 $x_n>0,a\geqslant 0$).

5.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\exp\left[\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)-\ln n}{x}\right]$

$$=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}\right)$$

$$=\exp\left(\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}\right)=e^{\frac{1}{n}\ln(a_1a_2\cdots a_n)}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

(2)记 $a=\max(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,则

$$a\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{a^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\leqslant f(x)\leqslant\left(\frac{na^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=a.$$

而
$$\lim_{x\to+\infty}a\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}a=a.$$

所以
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=a=\max(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

6.

(1)在区域 $(-\infty,1)$ 内,$y=x$ 的反函数就是它本身,又因函数 $y=x$ 的值域为 $(-\infty,1)$,故其反函数 $x=y$ 的定义域也为 $(-\infty,1)$,于是有 $y=f^{-1}(x)=x(-\infty<x<1)$.

(2)在区间 $[1,4]$ 上由 $y=x^2$ 解出 $x=\pm\sqrt{y}$,因 $x\in[1,4]$,故 $x=\sqrt{y}$;又函数的值域为 $[1,16]$,故其反函数定义域为 $[1,16]$. 于是 $y=f^{-1}(x)=\sqrt{x}(1\leqslant x\leqslant 16)$.

(3)在区间 $(4,+\infty)$ 上由 $y=2^x$ 解出 $x=\log_2 y$. 因函数 $y=2^x$ 的值域为 $(16,+\infty)$,故其反函数定义域为 $(16,+\infty)$,于是 $y=\log_2 x(16<x<+\infty)$.

综上所述,所求反函数也是一分段函数,它的表达式为

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x<1,\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16,\\ \log_2 x, & 16<x<+\infty.\end{cases}$$

7.

【证明】利用不等式 $2|ab|\leqslant a^2+b^2$,有

$$|f(x)|\leqslant 1+\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|\leqslant 2.$$

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

8.

【证明】在所给方程中,用 $\dfrac{1}{x}$ 代替 x 得

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx,$$

联立原方程,消去 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 得

$$(a^2-b^2)f(x)=\frac{ac}{x}-bcx,$$

又 $|a|\neq|b|$,所以 $f(x)=\dfrac{c}{a^2-b^2}\left(\dfrac{a}{x}-bx\right)$. 将 $-x$ 代入 $f(x)$ 表达式得

$$f(-x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(-\frac{a}{x}+bx\right)=-\frac{c}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{x}-bx\right)=-f(x).$$

所以$f(x)$为奇函数.

9.

题中给出了关于$f(x)$及$f(x)$的一个复合函数的等式,此类题目的解法一般是利用变量代换,设法得到一个方程组,然后解出$f(x)$. 为此,令$t=\frac{x}{x-1}$,则$x=\frac{t}{t-1}$,代入原等式得

$$f(t)=af\left(\frac{t}{t-1}\right)+\varphi\left(\frac{t}{t-1}\right).$$

于是得到关于$f(x)$,$f\left(\frac{x}{x-1}\right)$的二元一次方程组:

$$\begin{cases}f\left(\frac{x}{x-1}\right)-af(x)=\varphi(x),\\ f(x)-af\left(\frac{x}{x-1}\right)=\varphi\left(\frac{x}{x-1}\right),\end{cases}$$

解得$f(x)=\frac{1}{1-a^2}\left[a\varphi(x)+\varphi\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]$.

10.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\pi)&=\lim_{n\to\infty}\sin[(\sqrt{n^2+1}-n)\pi+n\pi]\\&=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin(\sqrt{n^2+1}-n)\pi\\&=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0,\end{aligned}$$

这里用到当$n\to\infty$时,$\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\sim\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\to0(n\to\infty)$,又$|(-1)^n|=1$是有界量,根据有界量乘以无穷小仍是无穷小量知$\lim_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\pi)=0$.

11.

因为$\frac{e^{\frac{k+1}{n}}}{n+1}\leqslant\frac{e^{\frac{k+1}{n}}}{n+\frac{k^2}{n^2}}\leqslant\frac{e^{\frac{k+1}{n}}}{n}(k=0,1,\cdots,n-1)$,所以

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k+1}{n}}\leqslant x_n\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k+1}{n}}.$$

又因为

$$\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k+1}{n}}=e^{\frac{1}{n}}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k}{n}}=e^{\frac{1}{n}}\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}(1-e)e^{\frac{1}{n}}\frac{\frac{1}{n}}{1-e^{\frac{1}{n}}}=e-1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k+1}{n}}=1\cdot(e-1)=e-1,$$

由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = e-1$.

12.

令 $x_n = \dfrac{11\cdot 12\cdot 13\cdot\cdots\cdot(10+n)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\cdots\cdot(3n-1)}$，则

$$0 < x_n = \frac{11}{1}\cdot\frac{12}{2}\cdot\frac{13}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{10+n}{3n-4}\cdot\frac{1}{3n-1}.$$

显然，当 $n>7$ 时就有 $3n-4>10+n$，此时（即当 $n>N=7$ 时）

$$0 < x_n < \frac{C}{3n-1},$$

其中 $C = \frac{11}{1}\cdot\frac{12}{2}\cdot\frac{13}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{17}{17}$. 若取 $y_n=0$，$z_n=\dfrac{C}{3n-1}$，则 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=0$，故所求极限为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

13.

$$\text{原式} = \lim_{x\to1}\frac{x(1-x^{x-1})}{1-x+\ln x} = \lim_{x\to1}\frac{x[1-e^{(x-1)\ln x}]}{1-x+\ln x}$$

$$= -\lim_{x\to1}\frac{x[e^{(x-1)\ln x}-1]}{1-x+\ln x} = \lim_{x\to1}\frac{-x(x-1)\ln x}{1-x+\ln x}$$

（因 $e^{(x-1)\ln x}-1\sim(x-1)\ln x$，$x\to1$ 时）

$$\xlongequal{\text{洛必达}} -\lim_{x\to1}\frac{(2x-1)\ln x+(x-1)}{(1/x)-1} = -\lim_{x\to1}\left[\frac{(2x^2-x)\ln x+x(x-1)}{1-x}\right]$$

$$= 1-\lim_{x\to1}\frac{(2x^2-x)\ln x}{1-x} \xlongequal{\text{洛必达}} 1-\lim_{x\to1}\frac{(4x-1)\ln x+(2x-1)}{-1}$$

$$= 1+\lim_{x\to1}[(4x-1)\ln x+(2x-1)] = 1+1 = 2.$$

14.

因为分母为 x^2，将 $\ln(1+x)$ 展至2阶带拉格朗日型余项的麦克劳林公式：

$$\ln(1+x) = x-(1/2)x^2+o(x^2),$$

则
$$\text{原式} = \lim_{x\to0}\frac{x-(1/2)x^2+o(x^2)-(ax+bx^2)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{(1-a)x-(1/2+b)x^2+o(x^2)}{x^2} = 2.$$

于是必有 $1-a=0$，$-(1/2+b)=2$，解之得 $a=1$，$b=-5/2$.

15.

注意到 $\lim\limits_{x\to0+0}2^{\frac{1}{x}}=\infty$，$\lim\limits_{x\to0-0}2^{\frac{1}{x}}=0$，应先计算 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的左、右极限：

$$f(0+0) = \lim_{x\to0+0}f(x) = \lim_{x\to+0}\frac{1-(1/2^{\frac{1}{x}})}{1+(1/2^{\frac{1}{x}})} = 1,$$

$$f(0-0) = \lim_{x\to0-0}f(x) = \lim_{x\to-0}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1} = -1.$$

因 $f(0+0)\neq f(0-0)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的极限不存在，因而在 $x=0$ 处不连续.

16.

(1) 若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点，则必要求

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\infty,$$

即

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-a)(x-1)}{e^x-b}=\frac{(-a)(-1)}{e^0-b}=\frac{a}{1-b}=0.$$

因此，当 $a=0$，$b\neq 1$ 时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点.

(2)若 $x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，则 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 存在. 因为

$$\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=e\left(e^{x-1}-\frac{b}{e}\right)/[(x-a)(x-1)],$$

又当 $x\to 1$ 时，$x-1\to 0$，$e^{x-1}-1\sim x-1$，所以当 $b=e$ 时，有

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{e(e^{x-1}-1)}{(x-a)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{e(x-1)}{(x-a)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{e}{x-a}=\frac{e}{1-a}.$$

第 2 章　导数与微分　题型强化练习参考答案

一、选择题

1. [C].

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\sqrt[5]{x^4}-1}{x}=0 \text{ 即} f'(0)=0.$$

应选[C].

2. [C].

因 $3x^3$ 处处任意阶可导,只需考查 $x^2|x|\triangleq\varphi(x)$,它是分段函数,$x=0$ 是连接点.

$$\varphi(x)=\begin{cases}-x^3, & x\leqslant 0,\\ x^3, & x\geqslant 0,\end{cases}\Rightarrow\varphi'(x)=\begin{cases}-3x^3, & x<0,\\ 3x^3, & x>0,\end{cases}$$

又 $\varphi_+'(0)=(x^3)=(x^3)'_+|_{x=0}=0,\varphi'_-(0)=(-x^3)'_-|_{x=0}=0\Rightarrow\varphi'(0)=0;$

即

$$\varphi'(x)=\begin{cases}-3x^2, & x\leqslant 0,\\ 3x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

同理可得

$$\varphi''(x)=\begin{cases}-6x, & x<0,\\ 6x, & x>0,\end{cases}\quad\varphi''(0)=0;$$

即

$$\varphi''(x)=\begin{cases}-6x, & x\leqslant 0\\ 6x, & x\geqslant 0\end{cases}=6|x|.$$

因 $y=|x|$ 在 $x=0$ 不可导 $\Rightarrow\varphi'''(0)$ 不存在. 故应选[C].

3. [B].

当 $t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时,$x\in(0,1)$,$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3\sin^2t\cos t}{3\cos^2t(-\sin t)}=-\tan t<0,$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(-\tan t)=\frac{d}{dt}(-\tan t)\cdot\frac{dt}{dx}=-\sec^2t\cdot\frac{1}{3\cos^2t(-\sin t)}=\frac{1}{3\cos^4t\sin t}>0.$$

故选[B].

4. [D].

由题设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ 知,$f(0)=0,f'(0)=1$.

令 $F(x)=f(x)-x$,则 $F'(x)=f'(x)-1$,$F''(x)=f''(x)>0$.

于是 $F'(x)$ 在 $(-\delta,\delta)$ 内单调增加,且 $F'(0)=0$. 当 $x\in(-\delta,0)$ 时,$F'(x)<F'(0)=0$;当 $x\in(0,\delta)$ 时,$F'(x)>F'(0)=0$. 可见 $F(x)$ 在点 $x=0$ 处取极小值,也即最小值,从而有 $F(x)>F(0)=0$,即 $f(x)>x$,$x\in(-\delta,\delta)$,故应选[D].

5. [A].

设 $\varphi(x)=f(x)-x$,则 $\varphi'(x)=f'(x)-f,\varphi''(x)=f''(x)$.

由 $f''(x)<0$ 得 $\varphi''(x)<0$,故 $\varphi'(x)$ 单调减少,则当 $x<1$ 时,$\varphi'(x)>\varphi'(1)=f'(1)-1=0$;当 $x>1$ 时,$\varphi'(x)<\varphi'(1)=0$,则 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值. 当 $x\in(1-\delta,1)\cup(1,1+\delta)$ 时,$\varphi(x)<\varphi(1)=f(1)-1=0$,即 $f(x)<x$. 故应选[A].

6. [D].

因为$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+$

$$\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0)x^{n+1}+R_{n+1}(x)$$

$$=f(0)+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0)x^{n+1}+R_{n+1}(x).$$

(由题设$f'(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=0$)

所以当$|x|$很小时,$f(x)-f(0)$与$\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0)x^{n+1}$同号. 而$f^{(n+1)}(0)>0$,当$n$为偶数时,$\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0)x^{n+1}$在$x=0$点两侧异号,$f(0)$不是极值点;当$n$为奇数时,在$x=0$两侧均有$\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0)x^{n+1}>0$,即$f(x)>f(0)$,亦即$x=0$为$f(x)$的极小值点. 因此选[D].

7. [B].

设$f(x)=x^5+2ax^3+3bx+4c$,则

$$f'(x)=5x^4+6ax^2+3b=5(x^2)^2+6a(x^2)+3b.$$

由于$(6a)^2-4\cdot5\cdot3b=12(3a^2-5b)<0$,所以$f'(x)=0$无实根.

又$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f'(x)=+\infty$. 于是$f'(x)>0$.

根据连续函数的介值定理及$f(x)$的严格单调增加性质,知$f(x)$有唯一零点,即方程$f(x)=0$有唯一实根. 应选[B].

8. [A].

为方便记$y=y(x)$. 由$y'=y^2$,逐次求导得

$$y''=2yy'=2y^3,y'''=3!y^2y'=3!y^4,\cdots,\text{归纳可证 }y^{(n)}=n!y^{n+1}.$$

故应选[A].

9. [D].

利用极限的同号性可以判定$f(x)$的正负号:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2>0\Rightarrow\frac{f(x)}{1-\cos x}>0(\text{在 }x=0\text{ 的某空心邻域});$$

由$1-\cos x>0$,有$f(x)>0$,即$f(x)$在$x=0$取极小值. 故应选[D].

10. [D].

函数微分的函数增量的线性主部. 所以本题就是已知微分值、自变量x的增量,反过来求函数的导数值$f'(1)$.

因为 $$dy=f'(x^2)dx^2=2xf'(x^2)dx,$$
所以得 $$0.1=-2f'(1)(-0.1),$$
即$f'(1)=0.5$. 故[D]是正确的.

11. [B].

$$\lim_{x\to+\infty}[f'(x+a)-f'(x)]=\lim_{x\to+\infty}f''(\xi)a(x<\xi<x+a).$$

因$\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)=0$,故$\lim\limits_{x\to+\infty}f''(\xi)=\lim\limits_{\xi\to+\infty}f''(\xi)=0$,即

$$\lim_{x\to+\infty}[f'(x+a)-f'(x)]=0.$$

故应选[B].

12. [C].

由 $\lim\limits_{t\to a}[f(t)-f(x)]=f(a)-f(x)>0$，知必 $\exists\delta>0$，使 $x\in(a-\delta,a+\delta)$ 时 $f(t)-f(x)>0$，即 $\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}>0$，从而

$$\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\geqslant 0.$$

故应选[C].

13. [C].

实质是 $f''(x_0)$ 的取值的正负情况，代入微分方程即得.

将 $f(x)$ 代入方程，有

$$f''(x)+f'(x)-e^{\sin x}=0.$$

将 $x=x_0$ 代入上式，有

$$f''(x_0)=e^{\sin x_0}-f'(x_0)=e^{\sin x_0}>0.$$

故 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取极小值，故[C]为正确选项.

14. [B].

因为函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，故 $f(x)$ 必在点 $x=a$ 处连续，由此可知，若 $f(a)\neq 0$，则存在点 $x=a$ 的一个邻域，使 $f(x)$ 在该邻域内与 $f(a)$ 同号，从而在该领域内 $|f(x)|$ 或恒等于 $f(x)$ 或恒等于 $-f(x)$，即 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处必可导. 可见[C]，[D]不正确.

为了判定选项[A]还是选项[B]正确，可采用举例法：

设 $f(x)=x^2, a=0, f(x)$ 满足 $f(0)=f'(0)=0$，但是 $|f(x)|=f(x)=x^2$ 在点 $x=0$ 处可导，可见[A]不正确. 从而应选[B].

15. [D].

通过变量代换 $t=x+1$ 或按定义由关系式 $f(x+1)=af(1)$ 将 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的可导性与 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性联系起来.

令 $t=x+1$，则 $f(t)=af(t-1)$. 由复合函数可导性及求导法则知，$f(t)$ 在 $t=1$ 可导且

$$f'(t)|_{t=1}=af'(t-1)(t-1)'|_{t=1}=af'(0)=ab.$$

故应选[D].

或按定义考察

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{af(x)-af(0)}{x}=af'(0)=ab.$$

16. [B].

由于 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，$\xi\in(a,b)$，则 $f(x)$ 在 ξ 点可导，因而在 ξ 点连续，故 $\lim\limits_{x\to\xi}[f(x)-f(\xi)]=0$. 所以应选[B].

注意本题也可用排除法求解. 例如：由函数

$$f(x)=\begin{cases}-1, & a\leqslant x<b,\\ 1, & x=b,\end{cases}$$

可知结论(A)不正确，由函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & a\leqslant x<b,\\ a, & x=b,\end{cases}$$

可知结论[C]和[D]都不正确.

17. [C].

$f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数,在 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 内有表达式

$$f(x)=\begin{cases}x-x^2, & 0\leqslant x<\frac{1}{2},\\ x^2-x, & -\frac{1}{2}<x<0,\end{cases}$$

于是 $f'(x)=\begin{cases}1-2x>0, & 0<x<\frac{1}{2},\\ 2x-1<0, & -\frac{1}{2}<x<0,\end{cases}$ $f''(x)=\begin{cases}-2<0, & 0<x<\frac{1}{2},\\ 2>0, & -\frac{1}{2}<x<0.\end{cases}$

即 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点,$(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点. 故应选[C].

18. [C].

设 $f(x)=2-x^2,a=-1,b=1$,则 $f'(x)=-2x$ 在 $[a,b]=[-1,1]$ 上连续,且 $f'(a)=f'(-1)=2>0,f'(b)=f'(1)=-2<0$. 但在 $[a,b]=[-1,1]$ 上 $f(x)\geqslant 1$,即任何点 $x_0\in(a,b)=(-1,1)$ 都使 $f(x_0)\neq 0$. 这表明结论[D]是错误的,故应选[D].

由极限的保号性质及导数的定义知,从

$$f'(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$$

可得,存在 $x_0\in(a,b)$,使得 $\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}>0$,即 $f(x_0)>f(a)$,这表明结论[A]正确,类似可证结论[B]正确. 由闭区间上连续函数的介值定理可知结论[C]正确.

19. [D].

由题设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导,且 $f(x)=f(x+4)$,两边对 x 求导,得 $f'(x)=f'(x+4)$,故 $f'(5)=f'(1)$.

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{-x}=\frac{1}{2}f'(1)=-2$,故 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的切线斜率为 $f'(5)=-2$. 所以应选[D].

20. [C].

由于当 $x\to 0$ 时 $\sin\frac{1}{x^2}$ 为有界变量,$\sqrt{|x|}$ 为无穷小量,故

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x^2}=0,\quad 且\quad f(0)=0.$$

于是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 从而[A],[B]不正确.

又因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\sin\frac{1}{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x^2}$ 不存在,即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导,所以应选[C].

21. [C].

由 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导知,$f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续,在 (x_1,x_2) 内可导,由拉格朗日中值定理知,存在一点 ξ,使

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),\quad x_1<\xi<x_2.$$

所以应选[C]. 因为由 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导知,$f(x)$ 在 $[a,b]$,$[x_1,b]$,$[a,x_2]$ 上连