“十三五”应用型本科基础课规划教材

高等数学学习指导

Advanced Mathematics Learning Guide

主　编　冉庆鹏　李琼琳　范臣君
副主编　陈保周　都俊杰　赵　伟

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

"十三五"应用型本科基础课规划教材

高等数学学习指导

主　编　冉庆鹏　李琼琳　范臣君
副主编　陈保周　都俊杰　赵　伟
参　编　陈　帆　李小飞　秦　川
邓义梅　王安平　张月梅

机 械 工 业 出 版 社

本书包含了培养应用型人才所必备的高等数学知识，是与王安平等编写的《高等数学》(上,下）教材相配套的学习指导书．本书内容顺序与原教材基本一致，每节均划分为4个板块：内容提要、重难点解析、典型例题、同步练习．本书的编写遵循知识完整、重难点突出、例题典型、同步练习融会贯通的原则，突出解题思路，归纳解题方法，注重对学生解题方法和解题能力的培养．

本书可作为学习高等数学课程的配套教材，也可供相关人员参考．

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导/冉庆鹏，李琼琳，范臣君主编．—北京：机械工业出版社，2015.8

“十三五”应用型本科基础课规划教材

ISBN 978-7-111-50846-5

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①冉…②李…③范…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第184580号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：韩效杰　责任编辑：韩效杰　孟令磊
封面设计：路恩中
责任印制：刘　岚
北京京丰印刷厂印刷
2015年8月第1版·第1次印刷
169mm×239mm·16.75印张·342千字
标准书号：ISBN 978-7-111-50846-5
定价：35.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
电话服务　　　　　　　　　　网络服务
服务咨询热线：010-88379833　机 工 官 网：www.cmpbook.com
读者购书热线：010-88379649　机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
　　　　　　　　　　　　　　教育服务网：www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版　　　金 书 网：www.golden-book.com

前　　言

本书包含了培养应用型人才所必备的高等数学知识，与王安平等编写的《高等数学》(上,下) 教材同步，旨在帮助高等工科院校学生学习掌握和应用必备的高等数学知识，提高学生分析问题和解决问题的能力，同时经过足够的训练根号地掌握教材内容.

本书内容顺序与原教材基本一致，笔者结合应用型人才培养、多年从事高等数学教学的实践经验，以及对历年考研数学试题的长期分析和研究，编写了本书. 遵循知识完整、重难点突出、例题典型、同步练习融会贯通的原则编写.

本书每节由下列四部分组成:

内容提要: 归纳每节基本概念、定理、公式与结论.

重难点解析: 梳理每节重难点，总结常用的、重要的解题方法和技巧.

典型例题: 总结本节所涉及的题型，给出详细的解答过程并指出易犯的错误，分析解题思路.

同步练习: 按不同深度将全部题目分为 A，B，C 三级，并用相应的字母标在题号右上角. A 级: 基础练习，为理解教材内容所必需. B 级: 提高类型，有助于对教材内容的深入理解及对解题方法、技巧的进一步提高. C 级: 综合类型，用于提高问题的综合分析能力.

本书由冉庆鹏、李琼琳、范臣君全面负责统筹. 其中第 1、2 章由秦川编写，第 3 章由陈帆编写，第 4 章由赵伟编写，第 5 章由都俊杰编写，第 6、10 章由范臣君编写，第 7、8 章由冉庆鹏编写，第 9 章由陈保周编写，第 11 章由李小飞编写，第 12 章由李琼琳编写.

本书在编写过程中，所参考的文献均在书后列出，作者在此对这些参考书的作者表示感谢. 同时在本书的编写过程中，梁国安给出了许多宝贵的意见和建议，在此一并表示衷心的感谢!

由于作者水平有限，本书中解题方法的指导有可能不是很到位，恳请同行和读者提出宝贵意见，以便我们不断改进提高.

编　者

目　　录

第1章 预备知识

一、内容提要

1. 邻域的概念

设 a，$\delta \in \mathbf{R}$，且 $\delta > 0$，我们把以 $a-\delta$，$a+\delta$ 为端点的开区间 $(a-\delta,\ a+\delta)$ 称为 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\ \delta)$；a 和 δ 分别称为该邻域的**中心**和**半径**.

称 $\overset{o}{U}(a,\ \delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$ 为以 δ 为半径 a 的**去心邻域**.

为了研究方便，开区间 $(a-\delta,\ a)$ 称为 a 的**左 $\boldsymbol{\delta}$ 邻域**；开区间 $(a,\ a+\delta)$ 称为 a 的**右 $\boldsymbol{\delta}$ 邻域**.

2. 函数的概念

设有 x 和 y 两个变量，D 是一个给定的数集，若对于 D 中每一个数 x，变量 y 按照对应法则 f 总有唯一确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作：$y = f(x)$，D 称为这个函数的**定义域**.

自然定义域：使函数 $\boldsymbol{y=f(x)}$ 有意义的 $\boldsymbol{x}$ 的全体值.

3. 常见特殊函数

分段函数：在自变量不同的变化范围内，对应法则用不同式子表示的函数.

(1) 符号函数：$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

(2) 取整函数：$y = [x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

(3) 绝对值函数：$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

可以得到 $y = |x| = x \cdot \operatorname{sgn} x$.

(4) 狄利克雷函数：$y = D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$

4. 函数的简单性态

(1) 单调性；(2) 奇偶性；(3) 有界性；(4) 周期性.

5. 反函数与反三角函数

反函数：设函数 f：$D \to f(D)$ 是单射，则它的逆映射 f^{-1}：$f(D) \to D$ 称为函数 f 的反函数.

正切函数：$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$，余切函数 $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$，

正割函数：$\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，余割函数 $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$，

反正弦函数：$y=\arcsin x$，$x\in[-1,1]$，值域 $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，

反余弦函数：$y=\arccos x$，$x\in[-1,1]$，值域 $y\in[0,\pi]$，

反正切函数：$y=\arctan x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，值域 $y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，

反余切函数：$y=\operatorname{arccot} x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，值域 $y\in(0,\pi)$.

常用公式：$\sin^2x+\cos^2x=1$，$1+\tan^2x=\sec^2x$，$1+\cot^2x=\csc^2x$，

$\sin 2x=2\sin x\cos x$，$\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x=2\cos^2x-1=1-2\sin^2x$.

6. 初等函数

由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算和有限次的复合而构成的并且只用一个解析式表示的函数称为**初等函数**.

7. 平面坐标系(极坐标系)

在平面内取一个定点 O，叫做**极点**，引一条射线 Ox，叫做**极轴**，对于平面中任一点 M，r 表示线段 OM 的长度，θ 表示从 Ox 到 OM 的夹角，r 叫做点 M 的极径，θ 叫做点 M 的极角. (r,θ)为点 M 在极坐标系下的坐标.

二、重难点解析

1. 证明函数的奇偶性时，一些函数并不能一眼看出它的奇偶性，需要应用 $f(x)-f(-x)=0$ 或 $f(x)+f(-x)=0$ 判定方可.

2. 理解初等函数的定义，会把初等函数分解成简单函数，通常分解到只能用简单函数的四则运算表示时就不再分. 一般而言，分段函数不是初等函数，但也有个别的分段函数是初等函数，如绝对值函数经过恒等变形有 $f(x)=|x|=\sqrt{x^2}$，显然是一个初等函数。

3. 熟悉常见的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数的图形，常用基本初等函数的图形来解题.

4. 对于极坐标系与直角坐标系的互化应该熟练掌握，有助于后面知识的学习.

三、典型例题

例 1　设函数 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x$，求 $f(x)$.

解　方法一　令 $\sin\dfrac{x}{2}=t$，则 $\cos x=1-2\sin^2\dfrac{x}{2}=1-2t^2$，即，

$$f(t)=1+(1-2t^2)=2-2t^2,$$

则

$$f(x)=2-2x^2.$$

方法二 因 $\cos x=1-2\sin^2\dfrac{x}{2}$，则 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=2-2\sin^2\dfrac{x}{2}$.

令 $\sin\dfrac{x}{2}=t$，得 $f(t)=2-2t^2$，即 $f(x)=2-2x^2$.

例 2 设 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\leqslant 0,\\ e^x, & x>0.\end{cases}$，$g(x)=\ln x$，求 $f[g(x)]$. $g[f(x)]$.

解 $f[g(x)]=\begin{cases}g(x)^2+1, & g(x)\leqslant 0,\\ e^{g(x)}, & g(x)>0.\end{cases}=\begin{cases}(\ln x)^2+1, & 0<x\leqslant 1,\\ x, & x>1;\end{cases}$

$g[f(x)]=\begin{cases}g(x^2+1), & x\leqslant 0,\\ g(e^x), & x>0.\end{cases}=\begin{cases}\ln(x^2+1), & x\leqslant 0,\\ x, & x>0.\end{cases}$,

例 3 判定函数 $f(x)=\sin x\cdot\operatorname{sgn}x$ 的奇偶性.

解 定义域为 **R**,当 $x>0$ 时，$f(-x)=\sin(-x)\cdot\operatorname{sgn}(-x)=\sin x=\sin x\operatorname{sgn}x=f(x)$；

当 $x<0$ 时，$f(-x)=\sin(-x)\cdot\operatorname{sgn}(-x)=-\sin x=\sin x\operatorname{sgn}x=f(x)$.

故 $f(x)=\sin x\cdot\operatorname{sgn}x$ 是偶函数.

例 4 下列函数是由哪些最简单的函数复合而成?

(1) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$； (2) $y=\ln\sin 2x$.

解 (1) 分解成 $y=\sqrt{u}$，$u=x+\sqrt{x}$；

(2) 分解成 $y=\ln u$，$u=\sin t$，$t=2x$.

例 5 试给出在极坐标系下 $r=\sin\theta$ 的直角方程.

解 由 $r=\sin\theta$，得 $r^2=r\sin\theta$.

而 $r^2=x^2+y^2$，$r\sin\theta=y$，即 $x^2+y^2=y$.

例 6 试给出直角方程 $x^2+y^2=2x$ 在极坐标系下的方程.

解 代入 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，由 $x^2+y^2=2x$ 得 $r^2=2r\cos\theta$，

即 $r=2\cos\theta$.

四、同步练习

1. 选择或填空题.

(1)[A] 函数 $y=\log_2(\log_3 x)$ 的定义域是____________.

(2)[A] 已知函数 $f(x)$ 的定义域 $D=[0,1]$，则函数 $f(x+a)+f(x-a)$ $\left(0<a\leqslant\dfrac{1}{2}\right)$ 的定义域为____________.

(3)[B] 函数 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数是____________.

(4)[B] 设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x<2,\\ x^2-1, & x\geqslant 2,\end{cases}$ 则 $f(f(1))=$____________.

A. 3　　B. 2　　C. 0　　D. 1

2.[A] 设$f(x)=2x^2+6x-3$，求$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$，$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$，并指出$\varphi(x)$与$\psi(x)$中哪个是奇函数哪个是偶函数？

3.[C] 求函数$y=\lg(x+\sqrt{x^2-1})$($x\in[1,+\infty)$)的反函数.

4.[B] 将下列函数分解为最简单的函数：

(1) $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$；

(2) $y=\sin(x^2+\cos x)$.

5.[C] 将$mr\cos^2\theta+3r\sin^2\theta-6\cos\theta=0$化为直角坐标系下的方程.

第 2 章　极限与连续

2.1　数列的极限、函数的极限

一、内容提要

1. 数列极限的定义

设$\{x_n\}$为一数列，如果存在常数a，对于任意给定的正数ε(无论多么小)，总存在正整数N，使得当$n>N$时不等式$|x_n-a|<\varepsilon$成立，则称常数a是数列$\{x_n\}$的极限，或数列$\{x_n\}$收敛于a，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，或$x_n\to a(n\to\infty)$；否则，称数列$\{x_n\}$发散.

2. 收敛数列的性质

(1) **(极限的唯一性)** 如果数列$\{x_n\}$收敛，则它的极限是唯一的；

(2) **(收敛数列的有界性)** 如果数列$\{x_n\}$收敛，则数列$\{x_n\}$一定有界；

(3) **(收敛数列的保号性)** 如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且$a>0$(或$a<0$)，则存在正整数$N$，当$n>N$时的一切$x_n$，有$x_n>0$(或$x_n<0$)；

保号性的推论：如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且存在正整数$N$，当$n>N$时的一切$x_n$，有$x_n>0$(或$x_n<0$)，则$a\geqslant 0$(或$a\leqslant 0$).

(4) **(收敛数列与其子数列间的关系)** 如果数列$\{x_n\}$收敛于a，则它的任一子数列也收敛于a.

3. 函数的极限

(1) $x\to+\infty$时函数$f(x)$的极限：$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上有定义，若存在常数A，$\forall\varepsilon>0$，总$\exists M>0$，当$x>M$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称A为x趋于正无穷大时$f(x)$的极限，记作$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，或$f(+\infty)=A$，或$f(x)\to A(x\to+\infty)$.

(2) $x\to-\infty$时函数$f(x)$的极限：$f(x)$在区间$(-\infty,a]$上有定义，若存在常数A，$\forall\varepsilon>0$，总$\exists M>0$，当$-x>M$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称A为x趋于负无穷大时$f(x)$的极限，记作$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$或$f(-\infty)=A$或$f(x)\to A(x\to-\infty)$.

(3) $x\to x_0$时函数$f(x)$的极限：$f(x)$在点x_0的某个去心邻域内有定义，若存在常数A，$\forall\varepsilon>0$，总$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，$|f(x)-A|<\varepsilon$成立，称常数A为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限，记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，或$f(x)\to A$ $(x\to x_0)$.

类似地，可定义$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

注 以上充要条件常用于讨论分段函数在分段点 $x=x_0$ 处的极限.

4. 函数极限的性质

(1) **(函数极限的唯一性)** 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则此极限必唯一；

(2) **(函数极限的局部有界性)** 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那么存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$；

(3) **(函数极限的局部保号性)** 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，而且 $A>0$(或 $A<0$)，那么存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

二、重难点解析

1. 用定义证明数列的极限时，找到的 N 应该与 ε 有关，即 $N=N(\varepsilon)$.

2. $x\to x_0$ 时函数的极限存在的充要条件是 $x\to x_0^-$ 与 $x\to x_0^+$ 极限均存在且相等，这一知识常用于判断分段函数在分段点的极限是否存在.

3. 函数 $y=\mathrm{e}^x$，$y=\arctan x$ 当 $x\to\infty$ 时需要分左右极限讨论，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$.（类似地，$y=a^x$ 与 $y=\operatorname{arccot}x$ 当 $x\to\infty$ 时也需要分左右极限讨论），而对于 $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$，$y=\arctan\dfrac{1}{x}$当 $x\to0$ 时也需分左右极限讨论.

三、典型例题

例 1 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

证明 设 $x_n=\dfrac{1}{n}$，$\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时有

$$|x_n-0|=\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\varepsilon,$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

例 2 证明：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

证明 这里函数在 $x=1$ 是没有定义的，但是函数当 $x\to1$ 时的极限存在与否和 $x=1$ 处的定义并没有关系. 事实上，$\forall\varepsilon>0$，将不等式$\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$ 约去非零因

子 $x-1$ 后，就化为 $|x+1-2|=|x-1|<\varepsilon$，因此取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-1|<\delta$ 时，就有 $\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$.

分析　用定义证明函数极限时，主要是要找到 $\delta=\delta(\varepsilon)$，$\delta$ 的选取应从需要证明的结论入手.

例3　求 $f(x)=\frac{x}{x}$，$g(x)=\frac{|x|}{x}$ 当 $x\to0$ 时的左右极限，并说明它们在 $x\to0$ 时的极限是否存在.

解　$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=1$；

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{|x|}{x}=1,\quad \lim_{x\to0^-}g(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{|x|}{x}=-1.$$

因此，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$，而 $\lim\limits_{x\to0}g(x)$ 不存在.

例4　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$.

解　由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$ 及 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$，可知 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

例5　设 $f(x)=\begin{cases}x^2+2, & x\geqslant0,\\ 3x+1, & x<0.\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

解　由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x^2+2)=2$，　$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(3x+1)=1$，而 $\lim\limits_{x\to x0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x0^-}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在.

四、同步练习

1. 选择题

(1)[A]　数列 $\{x_n\}$ 有界是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在的(　　).

A. 必要条件　　B. 充分条件　　C. 充分必要条件　　D. 无关条件

(2)[B]　下列说法不正确的是(　　).

A. 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则其极限唯一　　B. 收敛数列必有界

C. 无界数列必发散　　D. 单调数列必收敛

(3)[B]　下列数列 $\{x_n\}$ 中收敛的是(　　).

A. $x_n=(-1)^n\frac{n+1}{n}$　　B. $(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$

C. $x_n=\sin\frac{n\pi}{2}$　　D. $x_n=3^n$

2.[B]　设 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & -1<x<0,\\ 2, & x=0,\\ 2x, & 0<x\leqslant1,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$.

3.[C] 设$f(x)=\begin{cases}a^x, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{x}, & x>0,\end{cases}$（$a>0$ 且 $a\neq 1$），求$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$及$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，并说明$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$是否存在.

2.2　无穷小与无穷大、极限的运算法则

一、内容提要

1. 无穷小的概念

以 0 为极限的变量（函数）称为该极限过程的**无穷小量**，简称**无穷小**.

2. 无穷大的概念

如果在 $x\to x_0$ 时，函数$f(x)$的绝对值$|f(x)|$无限增大，那么$f(x)$称为 $x\to x_0$ 时的**无穷大量**，简称**无穷大**.

3. 无穷小的运算性质

（1）有限个无穷小的代数和仍是无穷小；

（2）有界变量与无穷小的乘积仍是无穷小；

（3）有限个无穷小的乘积还是无穷小；

（4）收敛变量与无穷小的乘积还是无穷小.

4. 无穷小与无穷大的关系

在自变量 x 的同一变化过程中，若 $f(x)$ 为无穷大，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小；反之，若$f(x)$为无穷小，且$f(x)\neq 0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大.

5. 极限的四则运算法则

如果 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，那么

（1）$\lim[f(x)\pm g(x)]$存在，且 $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；

（2）$\lim[f(x)\cdot g(x)]$存在，且 $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB$；

（3）若 $B\neq 0$，则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$存在，且 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

6. 复合函数的极限

设函数 $y=f[\varphi(x)]$ 由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成，

（1）若$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，且在点 x_0 的某个去心邻域内 $\varphi(x)\neq a$，又$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=A$；

（2）若$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$，且$\lim\limits_{u\to\infty}f(u)=A$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=A$.

二、重难点解析

1. 无穷小(大)时一定要标明极限过程；

2. 由于数列是特殊的函数，因此数列的极限求解也有相应的四则运算法则；

3. 在运用无穷小的性质进行解题时，要注意只针对有限个，例如有限个无穷小的代数和仍是无穷小，但无数个无穷小的代数和不一定是无穷小. 例如，$\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}_{n\text{个}}=1$.

4. $\lim[f(x)+g(x)]=\lim f(x)+\lim g(x)$等极限的四则运算的前提是$\lim f(x)$与$\lim g(x)$均存在.

三、典型例题

例 1　求极限$\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}$.

解　当 $x\to0$ 时，x 是无穷小，而$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant1$ 是有界量，从而$\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$.

例 2　求极限$\lim\limits_{x\to3}\frac{x^3+7x-9}{x-3}$.

解　由于$\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{x^3+7x-9}=\frac{3-3}{27+21-9}=0$，因此$\lim\limits_{x\to3}\frac{x^3+7x-9}{x-3}=\infty$.

例 3　求极限$\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$.

解

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}+2)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(\sqrt{x+2}+2)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{(\sqrt{x+2}+2)}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}.$$

例 4　求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+x-3}{x^2+x+2}$.

解

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+x-3}{x^2+x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=5.$$

一般地，当 $a_0\neq0$，$b_0\neq0$，m 和 n 为非负整数时，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\infty, & 当\ m<n,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & 当\ m=n,\\ 0, & 当\ m>n.\end{cases}$$

例 5　求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}=\dfrac{2^{20}3^{30}}{2^{50}}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{30}$.

例 6　求$\lim\limits_{x\to1}\sqrt{\dfrac{x^3-1}{x-1}}$.

解　$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x^2+x+1)=3$；故$\lim\limits_{x\to1}\sqrt{\dfrac{x^3-1}{x-1}}=\sqrt{3}$.

例 7　求$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

解　令$\sqrt[6]{x}=t$，则$x=t^6$，且$t\to1$，

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{t\to1}\frac{t^3-1}{t^2-1}$$

$$=\lim_{t\to1}\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t+1)}=\lim_{t\to1}\frac{t^2+t+1}{t+1}=\frac{3}{2}.$$

例 8　求$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$.

解　$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1}\right)=1.$$

四、同步练习

1. 选择或填空题.

(1)[A]　$\lim\limits_{x\to0}(x+x^2+x^3)=$________.

(2)[A]　$\lim\limits_{x\to0}x\sin x=$____________.

(3)[B]　下列说法正确的为(　　).

A. 任意无穷小量的和是无穷小量　　B. 无穷小量是绝对值很小的数

C. 无穷小量是以零为极限的变量　　D. 无界变量一定是无穷大量

(4)[B] 无穷多个无穷小量之和(　　).

A. 必是无穷小量　　B. 必是无穷大量

C. 必是有界量　　D. 以上各选项均不对

(5)[C] 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$及$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$都不存在，则(　　).

A. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$及$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$一定都不存在

B. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$及$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$一定都存在

C. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$及$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$中恰有一个存在，而另一个不存在

D. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$及$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$有可能都不存在

2.[A] 求极限$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$.

3.[B] 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}\right)$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$.

4.[C] 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x^2-1}(n\in\mathbf{N})$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2}{x^2+1}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3x}{(x-3)^2}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)^2}{x^2+3x}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^4+3x-2}$；

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^2+3x}-\sqrt{2}x)$；　　(8) $\lim\limits_{x\to 3}\sin(x^2+1)$.

2.3　极限的存在准则、两个重要极限

一、内容提要

1. 夹挤准则

如果数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足下列条件：(1) 当 n 充分大时有 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$. 则数列$\{x_n\}$的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

2. 单调有界收敛准则

单调递增有上界的数列必有极限；单调递减有下界的数列必有极限.