高等学校经济管理类专业
应用型本科系列规划教材

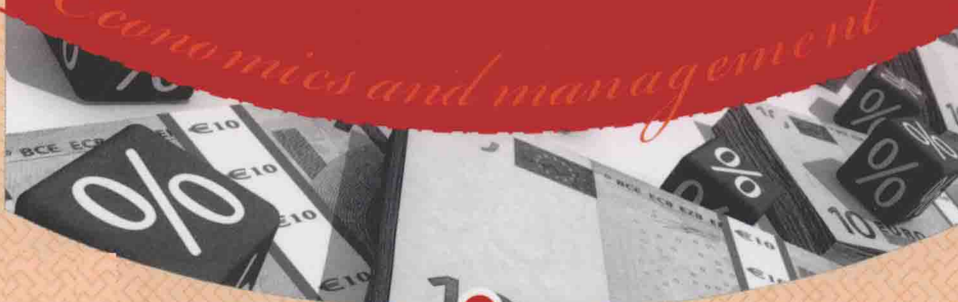
GAODENG XUEXIAO JINGJI GUANLILEI ZHUANYE
YINGYONGXING BENKE XILIE GUIHUA JIAOCAI

微积分学习指导教程

WEIJIFEN XUEXI
ZHIDAO JIAOCHENG

主　编　艾艺红　殷　羽
副主编　徐文华　徐畅凯　田秀霞　葛　杨

Economics and management



重庆大学出版社
http://www.cqup.com.cn

高等学校经济管理类专业
应用型本科系列规划教材

GAODENG XUEXIAO JINGJI GUANLILEI ZHUANYE
YINGYONGXING BENKE XILIE GUIHUA JIAOCAI

微积分学习指导教程

WEIJIFEN XUEXI
ZHIDAO JIAOCHENG

主 编 艾艺红 殷 羽
副主编 徐文华 徐畅凯 田秀霞 葛 杨

Economics ... Management

重庆大学出版社

内容提要

为方便读者使用由重庆大学出版社出版的《微积分》教材，学好大学数学，作者团队编写了与该教材同步配套的“学习指导教程”。该教辅书籍根据教材顺序编排了相应的学习辅导内容，其中每一章节的设计中包括了该章的内容提要、学习重难点、典型例题分析、本章自测题、自测题题解以及对应教材 B 组题的详细解答。上述设计有助于读者在课后自主研读时通过教辅书更好更快地掌握所学知识，在较短时间内取得好成绩。

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习指导教程/艾艺红，殷羽主编. —重庆：重庆大学出版社，2015.8
高等学校经济管理类专业应用型本科系列规划教材
ISBN 978-7-5624-9148-4

Ⅰ.①微… Ⅱ.①艾… ②殷… Ⅲ.①微积分—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 169841 号

高等学校经济管理类专业应用型本科系列规划教材
微积分学习指导教程
主 编 艾艺红 殷 羽
副主编 徐文华 徐畅凯
田秀霞 葛 杨
策划编辑：顾丽萍
责任编辑：李定群 版式设计：顾丽萍
责任校对：关德强 责任印制：赵 晟
*
重庆大学出版社出版发行
出版人：邓晓益
社址：重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号
邮编：401331
电话：(023) 88617190 88617185(中小学)
传真：(023) 88617186 88617166
网址：http://www.cqup.com.cn
邮箱：fxk@cqup.com.cn（营销中心）
全国新华书店经销
重庆五环印务有限公司印刷
*
开本：787×1092 1/16 印张：9 字数：192 千
2015 年 8 月第 1 版 2015 年 8 月第 1 次印刷
印数：1—3 000
ISBN 978-7-5624-9148-4 定价：23.00 元

前　言

大学数学是自然科学的基本语言，是应用模式探索显示世界物质运动机理的主要手段。

为方便读者使用由重庆大学出版社出版的《微积分》教材，学好大学数学，作者团队编写了与该教材同步配套的“学习指导教程”。该教辅书籍根据教材顺序编排了相应的学习辅导内容，其中每一章节的设计中包括了该章的**内容提要、学习重难点、典型例题分析、本章自测题、自测题题解**以及对应教材 B **组题的详细解答**。上述设计有助于读者在课后自主研读时通过教辅书更好更快地掌握所学知识，在较短时间内取得好成绩。

做习题是学好基础课的一个重要环节，通过习题了解课程内容和要求，巩固并提高对课程的理解，得到多方面的训练。和其他课程一样，微积分解题的方法也是多种多样的，书中的算法及证明只是提供读者参考，希望读者能认真学习教材，掌握基本理论及算法，通过独立思考，自己做出习题。

参加本书编写的有艾艺红、殷羽、丁德志、徐畅凯、徐文华、唐建民、吴海洋、李文学、葛杨、田秀霞、王春秀和陈朝舜等。

希望本书能对读者有所帮助，并诚恳地希望读者对本书提出宝贵意见，以便进一步改进。

编　者

2015 年 4 月 16 日

Contents

目录

第1章 函 数

一、内容提要 …… 1
二、学习重难点 …… 2
三、典型例题解析 …… 2
四、本章自测题 …… 5
五、本章自测题题解 …… 6
六、本章B组习题详解 …… 8

第2章 极限与连续

一、内容提要 …… 12
二、学习重难点 …… 13
三、典型例题解析 …… 13
四、本章自测题 …… 15
五、本章自测题题解 …… 18
六、本章B组习题详解 …… 20

第3章 导数与微分

一、内容提要 …… 24
二、学习重难点 …… 25
三、典型例题解析 …… 25
四、本章自测题 …… 29
五、本章自测题题解 …… 30
六、本章B组习题详解 …… 33

第4章 微分中值定理与导数的应用

一、内容提要 …… 38
二、学习重难点 …… 39
三、典型例题解析 …… 39
四、本章自测题 …… 41
五、本章自测题题解 …… 44
六、本章B组习题详解 …… 47

第5章 不定积分

一、内容提要 …… 51
二、学习重难点 …… 52
三、典型例题解析 …… 52
四、本章自测题 …… 55
五、本章自测题题解 …… 58
六、本章B组习题详解 …… 60

第6章 定积分

一、内容提要 …… 67
二、学习重难点 …… 68
三、典型例题解析 …… 68
四、本章自测题 …… 70
五、本章自测题题解 …… 73
六、本章B组习题详解 …… 78

第7章 多元函数微积分

一、内容提要 …… 83
二、学习重难点 …… 84
三、典型例题解析 …… 84
四、本章自测题 …… 89
五、本章自测题题解 …… 92
六、本章B组习题详解 …… 98

第8章 无穷级数

一、内容提要 …… 104
二、学习重难点 …… 105
三、典型例题解析 …… 105
四、本章自测题 …… 110
五、本章自测题题解 …… 113
六、本章B组习题详解 …… 115

第9章 微分方程与差分方程初步

一、内容提要 …… 122
二、学习重难点 …… 122
三、典型例题解析 …… 123
四、本章自测题 …… 127
五、本章自测题题解 …… 129
六、本章B组习题详解 …… 133

第 1 章

函　数

一、内容提要

函数

- 定义：$\forall x \in D \xrightarrow{f}$ 唯一确定 $y=f(x)\in Z$：两个非空集合 D（定义域）Z（值域）之间的单值对应法则 f
- 分类
  - 基本初等函数

函数	定义域	值域
常数：$y=c$	$(-\infty,+\infty)$	$\{c\}$
幂函数：$y=x^{a}\ (a\neq 0)$	视 a 值而定	随 a 而定
指数函数：$y=a^{x}\ (a>0, a\neq 1)$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$
↕ 互为反函数		
对数函数：$y=\log_a x\ (a>0, a\neq 1)$	$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
三角函数：$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$
三角函数：$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$
三角函数：$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$	$(-\infty,+\infty)$
三角函数：$y=\cot x$	$x\neq k\pi$	$(-\infty,+\infty)$
三角函数：$y=\sec x=1/\cos x$		
三角函数：$y=\csc x=1/\sin x$		
↕ 互为反函数		
反三角函数：$y=\arcsin x$	$[-1,1]$	$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$
反三角函数：$y=\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$
反三角函数：$y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$	$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$
反三角函数：$y=\operatorname{arccot} x$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,\pi)$

  - ↓ 有限次四则运算及复合运算
  - 初等函数
- 初等函数基本性质
  - 单调性：$\forall x_1,x_2\in D$，当 $x_1<x_2$，有 $\begin{cases} f(x_1)<f(x_2)，f(x) \text{ 为 } D \text{ 上的单调递增函数} \\ f(x_1)>f(x_2)，f(x) \text{ 为 } D \text{ 上的单调递减函数} \end{cases}$
  - 奇偶性：$\forall x\in D$，且 $-x\in D$，若 $\left.\begin{cases} f(-x)=f(x)，\text{称 } f(x) \text{ 为 } D \text{ 上的偶函数} \\ f(-x)=-f(x)，\text{称 } f(x) \text{ 为 } D \text{ 上的奇函数} \end{cases}\right\}$ D 是关于原点对称的定义域
  - 有界性：$\forall x\in D$，$\exists M$，s. t. $\left.\begin{cases} f(x)\leqslant M，f(x) \text{ 在 } D \text{ 上有上界} \\ f(x)\geqslant M，f(x) \text{ 在 } D \text{ 上有下界} \\ |f(x)|\leqslant M，f(x) \text{ 在 } D \text{ 上有界} \end{cases}\right\}$ f 有界 $\Leftrightarrow$ 既有上界也有下界
  - 周期性：$\forall x\in D$，若 $f(x)=f(x+T)$，T 为最小正周期，D 为定义域且是无穷区间

表 1.1 经济学中的几个常见函数及关系

	成 本	收 益	利 润
函数	$C=C_{固}+C_{变}$	$R=PQ$	$L=R-C$
平均函数	$\overline{C}=\dfrac{C}{Q}$	$\overline{R}=\dfrac{R}{Q}=p$	$\overline{L}=\dfrac{L}{Q}$
边际函数	C'_Q	R'_Q	L'_Q

注:1. 设需求函数为 $Q=f(p)$,其中 p 表示价格,Q 表示需求量、产量、销售量.

2. 边际函数的定义见第 4 章.

二、学习重难点

1. 理解实数与实数绝对值的概念,掌握解简单绝对值不等式的方法.
2. 理解函数、函数的定义域和值域等概念,熟悉函数的表示法.
3. 了解函数的几何特性,并掌握各几何特性的图形特征.
4. 了解反函数的概念;知道函数与其反函数的几何关系;给定函数会求其反函数.
5. 理解复合函数的概念;了解两个(或多个)函数构成复合函数的条件;掌握将一个复合函数分解为较简单函数的方法.
6. 理解基本初等函数及其定义域、值域等概念;掌握基本初等函数的基本性质.
7. 理解初等函数的概念;了解分段函数的概念.
8. 会建立简单应用问题的函数关系式.

三、典型例题解析

【例 1.1】 函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}+\arcsin\dfrac{3-2x}{5}$的定义域为________.

解 由题意得

$$\begin{cases}3-x>0\\ -1\leqslant\dfrac{3-2x}{5}\leqslant1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<3\\ -1\leqslant x\leqslant4\end{cases}\Rightarrow -1\leqslant x<3$$

故定义域为$[-1,3)$.

【例 1.2】 若函数$f(x)$的定义域为$[1,2]$,则$f\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$的定义域为________;函数$f\left(x-\dfrac{1}{4}\right)+f\left(x+\dfrac{1}{4}\right)$的定义域为________.

解 由题意得,$1\leqslant\dfrac{1}{x+1}\leqslant2\Rightarrow\dfrac{1}{2}\leqslant x+1\leqslant1\Rightarrow-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant0$

故$f\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$的定义域为$\left[-\dfrac{1}{2},0\right]$.

$$又由\begin{cases}1\leqslant x-\dfrac{1}{4}\leqslant2\\ 1\leqslant x+\dfrac{1}{4}\leqslant2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{5}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{9}{4}\\ \dfrac{3}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{7}{4}\end{cases}\Rightarrow\dfrac{5}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{7}{4}$$

故$f\left(x-\frac{1}{4}\right)+f\left(x+\frac{1}{4}\right)$的定义域为$\left[\frac{5}{4},\frac{7}{4}\right]$.

【例 1.3】 设$f(x-1)=x^2+2x+1$,则$f(x)=$________.

解 方法1:(做变量替换)令$x-1=t$,则

$$x=t+1$$

故

$$f(x-1)=f(t)=(t+1)^2+2(t+1)+1=t^2+4t+4$$

故

$$f(x)=x^2+4x+4$$

方法2:(等式右边凑关于$x-1$的表达式)

$$f(x-1)=(x-1)^2+4x=(x-1)^2+4(x-1)+4$$

故

$$f(x)=x^2+4x+4$$

【例 1.4】 设$f(x)=x^2$,$f[\varphi(x)]=2^{2x}$,则函数$\varphi(x)=$________.

解 因$f(x)=x^2$

故

$$f[\varphi(x)]=[\varphi(x)]^2=2^{2x}=(2^x)^2$$

故

$$\varphi(x)=2^x$$

【例 1.5】 设$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\0 & |x|\geqslant 1\end{cases}$,则$f\{f[f(x)]\}=$________.

解 当$|x|<1$时,$f(x)=1$,此时$|f(x)|\geqslant 1$,则

$$f[f(x)]=0$$

同理,则

$$f\{f[f(x)]\}=1$$

同理,当$|x|\geqslant 1$时,则

$$f(x)=0,f[f(x)]=1,f\{f[f(x)]\}=0$$

综上,故

$$f\{f[f(x)]\}=\begin{cases}1 & |x|<1\\0 & |x|\geqslant 1\end{cases}$$

【例 1.6】 函数$y=\sin\frac{1}{x}$在其定义域内是________.

A. 周期函数 B. 单调函数 C. 偶函数 D. 有界函数

解 由于$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$,故$y=\sin\frac{1}{x}$在其定义域内是有界函数. 故选 D.

【例 1.7】 某种产品每台售价 90 元,成本 60 元,若顾客一次购买 100 台以上,则实行降价,降价方法为:当一次性销售量$x>100$时,所买的全部产品降价$\frac{x-100}{100}$(元/台),但最低价为 75 元/台.

(1)试将每台的实际销售价p表示为销售量x的函数;

(2)把利润 L 表示成一次性销售量 x 的函数;

(3)当一次性销售量为 1 000 台时,厂家可获多少利润?

解 (1)由题意得,当 $x\leqslant 100$ 时,实际售价为

$$p=90 \text{ 元/台}$$

当 $x>100$ 时,实际售价为

$$p=[90-(x-100)\times 0.01]=-0.01x+91(\text{元/台})$$

另一方面,由 $-0.01x+91\geqslant 75$ 得

$$x\leqslant 1\ 600$$

故当 $100<x\leqslant 1\ 600$ 时,实际售价为

$$p=-0.01x+91(\text{元/台})$$

当 $x>1\ 600$ 时,实际售价为

$$p=75(\text{元/台})$$

综上,实际售价 p 与销售量 x 的函数关系为

$$p=\begin{cases}90 & x\leqslant 100\\ -0.01x+91 & 100<x\leqslant 1\ 600\\ 75 & x>1\ 600\end{cases}$$

(2)收入函数为

$$R(x)=px=\begin{cases}90x & x\leqslant 100\\ -0.01x^2+91x & 100<x\leqslant 1\ 600\\ 75x & x>1\ 600\end{cases}$$

成本函数为

$$C(x)=60x$$

故利润函数为

$$L(x)=R(x)-C(x)=\begin{cases}30x & x\leqslant 100\\ -0.01x^2+31x & 100<x\leqslant 1\ 600\\ 15x & x>1\ 600\end{cases}$$

(3)由(2)可知

$$L(1\ 000)=-0.01\times 1\ 000^2+31\times 1\ 000=21\ 000(\text{元})$$

【例 1.8】 某厂每天生产 60 个产品的成本为 300 元,每天生产 80 个产品的成本为 340 元.

(1)求其线性成本函数;

(2)该厂每天的固定成本和生产一个产品的可变成本各为多少?

解 (1)由于成本函数为线性函数,故设产量为 x,则成本函数为

$$C(x)=ax+b$$

又由 $\begin{cases}300=60a+b\\ 340=80a+b\end{cases}$,得

$$\begin{cases}a=2\\ b=180\end{cases}$$

故成本函数为

$$C(x)=2x+180$$

(2)由于

$$C_{固} = C(0) = 180$$

故该厂每天的固定成本为180元;生产一个产品的可变成本为2元.

四、本章自测题

一、填空题

1. 设$f(t)=t\psi(x)$,则$f(1)-f(0)=$________.

2. 设$f(x)=\begin{cases}x, & |x|\leqslant 1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$,则$f(\sin x)\cdot f(1+e^{x})=$________.

3. $y=\sqrt{x^2-4}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$的定义域为________.

4. $f(x)-2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{2}{x}$,则$f(x)=$________.

5. $f(x)=\begin{cases}x, x\geqslant 0\\ \dfrac{1}{x}, x<0\end{cases}$,则$f[f(x)]=$________.

6. 已知$f(x)=\sin x, f[\varphi(x)]=1-x^2$,则$\varphi(x)=$________.

7. 已知某商品的需求函数、供给函数分别为$Q_d=13-p, Q_s=-20+5p$,则均衡价格$p_e=$________,均衡数量$Q_e=$________.

8. 已知$f[\varphi(x)]=1+\cos x, \varphi(x)=\sin\dfrac{x}{2}$,则$f(x)=$________.

9. 已知$f(x)=\sqrt{x-2}$,则其反函数$f^{-1}(x)=$________.

10. 函数$y=\sin^2 x$由________和________复合而成.

二、单项选择题

1. 函数$f(x)=3^x$,则$f(x+y)=$________.

A. $f(x)f(y)$　　B. $f(2x)$　　C. $f(x)$　　D. $f(y)$

2. 若$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上有定义的函数,则下列________是奇函数.

A. $f(x^3)$　　B. $[f(x)]^3$　　C. $f(x)-f(-x)$　　D. $f(x)+f(-x)$

3. 下列函数中________是偶函数.

A. $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$　　B. $y=x\cos x$

C. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$　　D. $y=\dfrac{1}{1-x}$

4. 设函数$f(u)$的定义域为$0<u<1$,则$f(\ln x)$的定义域为________.

A. $(0,1)$　　B. $(1,a)$　　C. $(0,e)$　　D. $(1,e)$

5. 设$[x]$表示不超过x的最大整数,则函数$y=x-[x]$为________.

A. 无界函数　　B. 单调函数　　C. 偶函数　　D. 周期函数

6. 设函数$f(x)=x+\tan x e^{\sin x}$,则$f(x)$是________.

A. 偶函数　　B. 无界函数　　C. 周期函数　　D. 单调函数

7. 函数$y=\lg(x-1)$在________内有界.

A. $(2,3)$　　B. $(1,2)$　　C. $(2,+\infty)$　　D. $(1,+\infty)$

8. 若在$(-\infty,+\infty)$内$f(x)$单调增加，$\varphi(x)$单调减少，则$f[\varphi(x)]$在$(-\infty,+\infty)$内________.

A. 单调增加　　B. 单调减少

C. 不是单调函数　　D. 增减性难以判定

三、计算题

1. 设函数$y=f(x)$的定义域为$[0,3a]\ (a>0)$，求$g(x)=f(x+a)+f(2x-3a)$的定义域.

2. 已知$\varphi(x+1)=\begin{cases}x^2 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2x & 1<x\leqslant 2\end{cases}$，求$\varphi(x)$及其定义域.

3. 设$g(x)=\begin{cases}2-x & x\leqslant 0\\ x+2 & x>0\end{cases}$，$f(x)=\begin{cases}x^2 & x<0\\ -x & x\geqslant 0\end{cases}$，求$g[f(x)]$.

四、应用题

1. 某商品的单价为100元，单位成本为60元，商家为了促销，规定凡是购买该商品超过200单位时，对超过部分按单价的九五折出售，求成本函数、收益函数和利润函数.

2. 某电视机每台售价为500元时，每月可销售2 000台；每台售价为450元时，每月可增销400台. 试求该电视机的线性需求函数.

3. 某厂生产某商品的可变成本为15元/件，每天的固定成本为2 000元，如果每件商品的出厂价为20元，为了不亏本，该厂每天至少应生产多少件该商品？

五、证明题

设$af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}$，其中$a,b,c$为常数，且$|a|\neq|b|$，试证：$f(-x)=-f(x)$.

五、本章自测题题解

一、填空题

1. $\psi(x)$　　2. $\sin x$　　3. $[-3,-2]\cup[2,4]$　　4. $-\dfrac{2}{3}\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)$　　5. x　　6. $\arcsin(1-x^2)$

7. 5.5；7.5　　8. $2(1-x^2)$　　9. $f^{-1}(x)=x^2+2\ (x\geqslant 0)$　　10. $y=u^2$；$u=\sin x$

二、单项选择题

1. A　　2. C　　3. A　　4. D　　5. D　　6. B　　7. A　　8. B

三、计算题

1. 解：因$y=f(x)$的定义域为$[0,3a]\ (a>0)$，故

$$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 3a\\ 0\leqslant 2x-3a\leqslant 3a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 2a\\ \dfrac{3}{2}a\leqslant x\leqslant 3a\end{cases}\Rightarrow\dfrac{3}{2}a\leqslant x\leqslant 2a$$

故定义域为$\left[\dfrac{3}{2}a,2a\right]$.

2. 解：令$u=x+1$，则$x=u-1$

于是

$$\varphi(u)=\begin{cases}(u-1)^2 & 0\leqslant u-1\leqslant 1\\ 2(u-1) & 1<u-1\leqslant 2\end{cases}$$

故

$$\varphi(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & 1\leqslant x\leqslant 2\\ 2(x-1) & 2<x\leqslant 3\end{cases}$$

因此，$\varphi(x)$的定义域为$[1,2]\cup(2,3]=[1,3]$.

3. 解：因 $g(u)=\begin{cases}2-u & u\leqslant 0\\ u+2 & u>0\end{cases}$，令 $u=f(x)$，故

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x) & f(x)\leqslant 0\\ f(x)+2 & f(x)>0\end{cases}$$

因$f(x)\leqslant 0\Leftrightarrow x\geqslant 0$，此时

$$f(x)=-x$$

又因$f(x)>0\Leftrightarrow x<0$，此时

$$f(x)=x^2$$

故

$$g[f(x)]=\begin{cases}2+x & x\geqslant 0\\ x^2+2 & x<0\end{cases}$$

四、应用题

1. 解：设购买量为 x 单位，则成本函数为

$$C(x)=60x$$

收益函数为

$$R(x)=\begin{cases}100x & x\leqslant 200\\ 20\ 000+(x-200)\times 95 & x>200\end{cases}=\begin{cases}100x & x\leqslant 200\\ 95x+1\ 000 & x>200\end{cases}$$

利润函数为

$$L(x)=R(x)-C(x)=\begin{cases}40x & x\leqslant 200\\ 35x+1\ 000 & x>200\end{cases}$$

2. 解：设电视机的市场需求量为 Q 台，单位价格为 p 元，线性函数为

$$Q=a-bp\qquad a,b>0$$

当 $p=500$ 元时，$Q=2\ 000$，得

$$Q=a-500b=2\ 000\tag{1}$$

当 $p=450$ 元时，$Q=2\ 400$，得

$$Q=a-450b=2\ 400\tag{2}$$

由式(1)、式(2)得

$$a=6\ 000,b=8$$

故所求需求函数为

$$Q=6\ 000-8p$$

3. 解:设每天生产该商品 x 件,则每天成本(元)为

$$C(x) = 15x + 2\,000$$

每天收入 $R(x) = 20x$,为了每天不亏本,则

$$R(x) \geqslant C(x)$$

即

$$20x \geqslant 15x + 2\,000$$

得 $x \geqslant 400$(件),即若要不亏本,则每天至少应生产该商品 400 件.

五、证明题

证:把 x 换成$\frac{1}{x}$,代入

$$af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{x} \qquad ①$$

得

$$af\left(\frac{1}{x}\right) + bf(x) = cx \qquad ②$$

因 $|a| \neq |b|$,则① $\times a -$ ② $\times b$ 得

$$(a^2 - b^2)f(x) = \frac{ac}{x} - bcx$$

即

$$f(x) = \frac{1}{a^2 - b^2}\left(\frac{ac}{x} - bcx\right)$$

故

$$f(-x) = \frac{1}{a^2 - b^2}\left(-\frac{ac}{x} + bcx\right) = -f(x)$$

六、本章 B 组习题详解

一、填空题

1. 设 $f(x)$ 的定义域为 $[1,2]$,则 $f(1 - \lg x)$ 的定义域为________.

解:因为 $f(x)$ 的定义域为 $[1,2]$,故

$$1 \leqslant 1 - \lg x \leqslant 2$$

$\Rightarrow -1 \leqslant \lg x \leqslant 0$

即

$$\lg 10^{-1} \leqslant \lg x \leqslant \lg 1 \Rightarrow 10^{-1} \leqslant x \leqslant 1$$

故 $f(1 - \lg x)$ 的定义域为 $\left[\frac{1}{10}, 1\right]$.

2. 设函数 $f(x) = \sin x$, $f[g(x)] = 1 - x^2$,则 $g(x) =$________,其定义域为________.

解:因为 $f(x) = \sin x$,故

$$f[g(x)] = \sin[g(x)] = 1 - x^2$$

故

$$g(x) = \arcsin(1 - x^2)$$

又因为

$$-1 \leqslant 1-x^2 \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant 2$$

故定义域为$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

3. 函数 $y=\ln(2-\ln x)$ 的定义域为________.

解:由题意得

$$\begin{cases}2-\ln x>0\\ x>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\ln x<2=\ln \mathrm{e}^2\\ x>0\end{cases} \Rightarrow 0<x<\mathrm{e}^2$$

故定义域为$(0,\mathrm{e}^2)$.

4. 若$f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^3+x}{x^4+1}$,则$f(x)=$________.

解:$f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x+\dfrac{1}{x}}{x^2+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{x+\dfrac{1}{x}}{x^2+\dfrac{1}{x^2}+2-2}=\dfrac{x+\dfrac{1}{x}}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2}$

故$f(x)=\dfrac{x}{x^2-2}$.

5. 已知某商品的需求函数,供给函数分别为 $Q_d=100-2p$, $Q_s=-20+10p$,则均衡价格 $p=$________.

解:令

$$Q_d=Q_s \Rightarrow p=10$$

二、单项选择题

1. 如果函数$f(x)$的定义域为$[1,2]$,则函数$f(x)+f(x^2)$的定义域为( ).

A. $[1,2]$　　B. $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

C. $[1,\sqrt{2}]$　　D. $[-\sqrt{2},-1]\cup[1,\sqrt{2}]$

解:由题意得

$$\begin{cases}1 \leqslant x \leqslant 2\\ 1 \leqslant x^2 \leqslant 2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1 \leqslant x \leqslant 2\\ x \geqslant 1 \text{ 或 } x \leqslant -1 \text{ 或 } -\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}\end{cases} \Rightarrow 1 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$$

故选 C.

2. $f(x)=\dfrac{1}{\lg|x-5|}$的定义域为( ).

A. $(-\infty,5)\cup(5,+\infty)$　　B. $(-\infty,4)\cup(4,+\infty)$

C. $(-\infty,6)\cup(6,+\infty)$　　D. $(-\infty,4)\cup(4,5)\cup(5,6)\cup(6,+\infty)$

解:由题意得

$$\begin{cases}\lg|x-5| \neq 0\\ |x-5|>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|x-5| \neq 1\\ x \neq 5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x-5 \neq \pm 1\\ x \neq 5\end{cases} \Rightarrow x \neq 4,5,6$$

故选 D.

3. 设$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}+\lg(x-2)$,那么,$f(x+a)+f(x-a)\left(0<a<\dfrac{1}{2}\right)$的定义域为( ).

A. $(2-a,3-a)$　　B. $(2+a,3-a)$

C. $(2-a,3+a)$　　D. $(2+a,3+a)$

解：$f(x)$的定义域为

$$\begin{cases}3-x>0\\x-2>0\end{cases}\Rightarrow 2<x<3$$

故

$$\begin{cases}2<x+a<3\\2<x-a<3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2-a<x<3-a\\2+a<x<3+a\end{cases}\Rightarrow 2+a<x<3-a$$

故选 B.

4. 下列函数中为偶函数的是(　　).

A. $f(x)=\begin{cases}x-1 & x>0\\0 & x=0\\x+1 & x<0\end{cases}$　　B. $f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\0 & x=0\\-1 & x<0\end{cases}$

C. $f(x)=\begin{cases}2x^2 & x\leqslant 0\\-2x^2 & x>0\end{cases}$　　D. $f(x)=\begin{cases}1-x & x\leqslant 0\\1+x & x>0\end{cases}$

解：对于选项 D，其定义域为 $\mathbf{R}$.

当 $x<0$ 时，$-x>0$，故

$$f(-x)=1+(-x)=1-x=f(x)$$

当 $x>0$ 时，$-x<0$，故

$$f(-x)=1-(-x)=1+x=f(x)$$

综上，对于 $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $f(-x)=f(x)$.

故选 D.

5. 函数 $y=\lg(\sqrt{x^2+1}+x)+\lg(\sqrt{x^2+1}-x)$(　　).

A. 是奇函数，不是偶函数　　B. 是偶函数，不是奇函数

C. 既不是奇函数，又不是偶函数　　D. 既是奇函数，又是偶函数

解：显然该函数的定义域为 $\mathbf{R}$.

又因为

$$y=\lg(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)=\lg 1=0$$

故选 D.

6. 设 $f(x)=\sin 2x+\tan\frac{x}{2}$，则 $f(x)$ 的周期是(　　).

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. π　　C. 2π　　D. 4π

解：$\sin 2x$ 的周期为 π，$\tan\frac{x}{2}$ 的周期为 2π，而 π 与 2π 的最小公倍数为 2π，故 $f(x)$ 的周期为 2π.

故选 C.

7. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数，则函数 $f(x)+f(2x)+f(3x)+f(4x)$ 的周期是(　　).

A. T　　B. $2T$　　C. $12T$　　D. $\frac{T}{12}$

解：因为 $f(x)$ 的周期为 T，故 $f(2x)$ 的周期为 $\frac{T}{2}$，$f(3x)$ 的周期为 $\frac{T}{3}$，$f(4x)$ 的周期为 $\frac{T}{4}$，

而 $T,\frac{T}{2},\frac{T}{3},\frac{T}{4}$ 的最小公倍数为 T，故 $f(x)+f(2x)+f(3x)+f(4x)$ 的周期为 T.

故选 A.

8. 下列函数中不是初等函数的是(　　).

A. $y=x^x$　　B. $y=|x|$　　C. $y=\operatorname{sgn}x$　　D. $e^x+xy-1=0$

解：对于选项 A，$y=x^x=e^{x\ln x}$ 可看作由 $y=e^u$ 和 $u=x\ln x$ 复合而成，故是初等函数；

对于选项 B，函数 $y=|x|$ 虽然是分段函数，但可变形为 $y=|x|=\sqrt{x^2}$，可看作由 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=x^2$ 复合而成，故是初等函数；

对于选项 C，$y=\operatorname{sgn}x$ 是分段函数，且不能用一个由多个基本初等函数经过有限次四则、复合运算得到的解析式表达，故不是初等函数；

对于选项 D，为隐函数，也是初等函数.

故选 C.

9. 下列函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 中能构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的是(　　).

A. $y=f(u)=\lg(1-u)$，$u=\varphi(x)=x^2+1$

B. $y=f(u)=\arccos u$，$u=\varphi(x)=-x^2+2$

C. $y=f(u)=\frac{1}{\sqrt{u-1}}$，$u=\varphi(x)=-x^2+1$

D. $y=f(u)=\arcsin u$，$u=\varphi(x)=x^2+2$

解：对于选项 B，$y=\arccos u$ 的定义域为 $[-1,1]$，$u=-x^2+2$ 的值域为 $(-\infty,2]$，则

$$[-1,1]\cap(-\infty,2]\neq\varnothing$$

故 $y=f(u)=\arccos u$ 与 $u=\varphi(x)=-x^2+2$ 能复合.

故选 B.