

中小学教学艺术丛书 刘显国 主编

初中数学解题训练艺术

郭味纯 著

中国林业出版社

中小学教学艺术丛书

初中数学解题训练艺术

郭味纯 著

中国林业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

初中数学解题训练艺术 / 郭味纯著. —北京: 中国林业出版社, 2000.12
(中小学教学艺术丛书)

ISBN 7-5038-2725-4

I. 初... II. 郭... III. 数学课-初中-教学参考资料 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 83595 号

出版: 中国林业出版社 (100009 北京西城区刘海胡同 7 号)

E-mail: cfphz@public.bta.net.cn 电话: 66184477

发行: 新华书店北京发行所

印制: 北京市昌平百善印刷厂

版次: 2000 年 12 月第 1 版

印次: 2000 年 12 月第 1 次

开本: 880mm × 1230mm 1/32

印张: 7.5

字数: 256 千字

印数: 1 ~ 5000 册

定价: 16.00 元

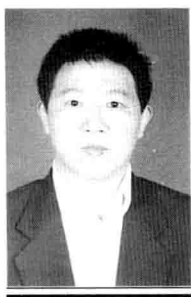
“九五”国家级重点课题
“面向 21 世纪我国中小学教师队伍建设研究”
子课题“教师教学艺术研究”
主持人·刘显国

中小学教学艺术丛书

主编 刘显国

- | | |
|---------------|-------------------|
| ■ 备课艺术 | ● 指导学习艺术 |
| ■ 开讲艺术 | ■ 激发兴趣艺术 |
| ■ 语言艺术 | ■ 思维训练艺术 |
| ■ 课堂提问艺术 | ■ 培养能力艺术 |
| ■ 板书艺术 | ■ 教法选择艺术 |
| ■ 练习设计艺术 | ■ 小学数学解题训练艺术 (I) |
| ■ 反馈教学艺术 | ■ 小学数学解题训练艺术 (II) |
| ■ 掀起课堂教学小高潮艺术 | □ 初中数学解题训练艺术 |
| ■ 复习课艺术 | ■ 初中物理解题训练艺术 |
| ■ 结尾艺术 | ■ 初中化学解题训练艺术 |
| ■ 说课艺术 | ■ 小学作文训练艺术 |
| ■ 评课艺术 | ■ 初中作文训练艺术 |
| ■ 教学过程艺术 | ■ 学法指导艺术 |
| ■ 课堂调控艺术 | ■ 语文德育渗透艺术 |
| ■ 课堂组织艺术 | ■ 多媒体设计艺术 |
| ■ 教改教研艺术 | ■ 活动课设计艺术 |

作者简介



郭味纯，男，1951年生，理学硕士。现任深圳宝安高级中学数学科组长。在大学学报发表教学论文多篇，与人合著出版《中学数学教育学引论》。1995年被评为深圳市优秀教师，1999年被评为广东省南粤教书育人优秀教师。

教学艺术美（代序）

深圳辅导学院教科所 刘显国

教学之所以称为一门艺术，是因为课堂教学给予充分自由创作的余地，可以像美术家、音乐家、艺术家以及文学家和诗人那样，进行艺术创造。教学是一门艺术。而缺乏创造性的艺术，必然显得单调与枯燥。它的创造不仅以独特的个性来发挥和施展自己的才能，还必须与学生配合。学生既是这一创作活动的对象，又是这一创作活动积极的参与者和主要的受益者。这种艺术创作的成果，不是被人称颂的巨幅画卷，不是流传百世的乐章，也不是脍炙人口的诗文名著，而是年轻一代的灵魂，未来世界的主人。教学艺术是教师钻研教材、研究学生、进行创造性劳动的智慧之果。这种传递人类文化与文明、发展人的体魄与智慧、塑造人的心灵的艺术，是通过教师的心血和双手在孩子们的身上精心描绘来进行的，是社会的综合性艺术，是艺术中的艺术。

歌唱家唱出的歌声很美，服装色彩很美，舞台形象很美，一出台就会征服观众，人们可以享受听觉、视觉等感官上富有的神韵的综合美。一曲终了，观众如梦初醒，尽情地鼓掌，这就是演员综合艺术美的魅力的体现。

1998年在深圳举行的全国反馈教学艺术大奖赛，来自全国30名教坛新秀，在2000多人的会场上讲课，生动感人的语言美，活泼开朗的性格美，充满青春活力的形象美，他们讲的课不也是征服了听众吗？大家不是也从他们那儿享受着课堂艺术美吗？他们的课刚结束，人们不也是用掌声、笑声和赞扬声评价他们的综合艺术美吗？

教师虽不是演员，但面对学生讲课同演员面对观众演唱有着异曲同工的作用。一个是以歌声打动人的心弦，一个是以语言启动人们的思维，一个在舞台上，一个在讲台上，一个是面对成千上万的观众，一个是面

对全班学生，演员和教师都肩负着教育人、鼓舞人、塑造人的重任。优秀教师的课为什么人们爱听、爱看、受到启发，能给听众留下强烈的印象，原因就在于课堂教学艺术。

《课堂教学艺术丛书》就是从老师的备课艺术、开讲艺术、板书艺术、语言艺术、提问艺术、组织教学艺术、练习设计艺术、课堂结尾艺术等方面，专题进行研讨，一共 20 余册，集中研究课堂教学艺术，这种艺术又集中表现在教学内容美、教学结构美、教学情感美、板书艺术美、课堂气氛美、教学语言美、教学节奏美等方面。

一、教学内容美

科学知识本身就是一种艺术，包含真与美。通过教材内容所提示的哲理，所归纳出的规律性的知识，以及这些知识的应用价值，能使学生产生一种满足感。教师讲课要像磁石一样，始终牢牢地吸引住学生，使学生的思维活动和情绪同教师的讲课交融在一起，这一切凭借的是知识本身对学生的吸引力。

教师要善于从教材里感受美，提炼美。如数学，如果从美学角度看，数学是一个五彩缤纷的美的世界。英国哲学家罗素说过：“数学，如果正确地看它不但拥有真理，而且有至高的美。”如数的美、式的美、形的美、比例的美、和谐的美……连美术上的比例美、节奏美都是数学上的黄金分割的应用。就圆周长公式 $C=2\pi r$ 来说，它体现了圆周长和半径之间存在的一种简洁、绝妙、和谐的关系。它是数学家的心灵智慧撞击所迸发出来的一种庄严、永恒和宏伟的美。

知识本身潜在的美，是不会自发地起作用的。教师的任务在于挖掘美、渲染美。也就是说，要帮助学生去揭示知识中包含的美、再造美，使原有的美更添色彩。

二、教学的结构美

教学过程的美首先是指教师和学生具体教学活动中所表现出的丰富创造性。师生在教学活动中多种心理能力的协同作战，实现理性因素和非理性因素的交融，从而形成一种活跃、生动的教学气氛。

教师要善于在教学主体部分的一定发展阶段精心安排“小高潮”，会使学生兴奋、愉悦、沉思、体味，在读说写或读说算的训练中，智力宝

库得到有力开发，智慧花蕾悄然绽放。

教学过程的美还指教学在动态中形成的具有美的特征的组合形式，即和谐的教学过程结构。这种结构是由教和学双边活动的协调统一所形成的。教学中的完整性、有序性、节奏性等等，都是和谐的教学过程结构的必备因素，也是其美的核心。

三、教学情感美

情感是教学艺术魅力形成的关键因素。没有真挚、强烈的感情，不可能把课上得成功。教师的感情，犹如诗人的诗兴，犹如一切艺术家的强烈的创作欲望。当他对教材、学生了如指掌时，当他视学生美好形象点燃激情的火焰时，感情激动了，灵感产生了，课堂气氛激活了，教学效果就最佳。教师没有真挚、强烈的感情，没有鲜明的爱憎，没有骨鲠在喉、不吐不快的冲动，是不可能用他的语言去征服学生的。

纵观课堂教学，不难发现，有的教师上课，课堂是晴空万里，艳阳高照，学生就像春天的鲜花，婷婷玉立，抖擞精神。而有的教师上课，课堂乌云密布，雷雨交加，学生就像是暴风雨中的麦苗，趴在课桌上，无精打采。

为什么同一个班的学生，不同的教师上课，学生的学习情绪迥然不同？这就是教学艺术，是教师调节情绪的艺术，是一种“阴转晴”的艺术。

教师丰富、纯洁而高尚的情感，可以左右学生的思想。因此，教师在教学中要始终把握自己的情感。按照情感转移原理，教师先入情——动情——析情——移情。根据这一感情发展过程组织教学就能激发学生的情感。有的教师讲课声情并茂，注重熏陶感染，教师踏进教室就像演员走进摄影棚一样，立刻进入角色，用自己的巨大热情和对学生的关心，对知识的酷爱，对教学的责任感，去激起学生相应的情感体验，使学生体会到教师对自己的爱护和帮助，从而更好地接受教育，接受所传授的知识。

心理学家认为，兴趣与爱好就是一种同愉快情绪相联系的认识倾向性与活动倾向性，当学生情绪高昂时，他就有良好的情趣去学习他所学的东西，效果也特别好。可以说情感是学生乐学、爱学、勤学、巧学的

内在动力。师生之间的情感，给人的一生会留下不可磨灭的记忆。

四、板书艺术美

板书是教师在备课中构思的艺术结晶，是学生感知信息的视觉渠道，是发展学生智力和形成良好的思想品质的桥梁和工具。好的板书不仅在内容上概括剖析，恰到好处，自成一体，浑若天成，而且在形式上因内容不同，重点不同，各具特色，结构精巧，情趣横生。它以确切的科学性，指导学生学习课文，又以独特的艺术魅力，给学生以美的熏陶，美的享受，美的启迪，堪称教学艺术的再创造。

好的板书是课堂教学的“集成块”，它集教材编者的“编路”、课文作者的“文路”、教师的“教路”和学生的“学路”于一体，是教师的微型教案。

好的板书，它要求教师必须根据教材特点，讲究艺术构思，做到形式多样，让学生有自由支配的时间，这样就能达到“此时无声胜有声”的功效。内容系列化、结构整体化、表达情境化，同时，它还要求教师根据教学实际，遵循板书的基本原则，具有明确的目的性、鲜明的针对性、高度的概括性、周密的计划性、适当的灵活性、布局的美观性、内容的科学性、视觉的直观性，这样，才能给学生以清晰、顺畅、整洁、明快的感觉。要做到这一点，还必须做到：

内容美——从用字遣词上看，准确无误，内容精炼；从整体上看，线索分明，重点突出。

形式美——布局合理，排列有序，条理清楚，具有立体美、对称美、奇异美、多样美、和谐美和造型美。

书法美——字迹工整，一丝不苟，合乎规范，美观大方，使学生受到美的陶冶。

五、课堂气氛美

好的课堂气氛，令学生如沐春风，如饮甘泉，人人轻松愉快，个个心驰神往。

在课堂上，往往看到这样两种不同的场面：有的教师精神饱满，生动传情，学生情绪高涨，注意力集中，教与学双方都沉浸在一种轻松愉快的气氛之中，都积极开启智能的机器，共同探索着知识之谜。有的教

师则不甚得法，讲得唇干舌燥，声音嘶哑，而学生则木然置之，毫无反应，整个课堂犹如一潭死水。

好的课堂艺术气氛应是：

有疑问——在课堂上教师要创设问题情境，用疑问开启学生思维的心扉。

有猜想——通过猜想，在头脑中形成一种求知的心理定势。

有惊讶——在课堂上教师要善于释疑学生的迷惘，轻轻点拨后茅塞顿开，心理惊叹不已，惊讶中有说不出的喜悦之情。

有笑声——老师的课堂讲述要生动有趣，幽默诙谐，使得学生不时发出会心的笑声。

有争议——教师要鼓励学生大胆质疑，让学生围绕中心各抒己见，把问题弄明白。

有沉思——在关键问题上教师要留出“空白”让学生探索。

有联想——教师不要把课讲绝了，要留有余地，让学生联想，要透过有限去展现无限。

六、教学语言美

语言是完成教学任务的主要工具，教师的语言美在很大程度上决定着学生学习的效率，教师的语言生动、形象、幽默、风趣、逼真、亲切、自然、充满情和意，学生听了便“如临其境，如见其人，如闻其声”，使教材化难为易，学生得到美的享受。

教师要善于运用自己的声调，以便准确、生动地表达自己的思想和感情，赏心悦目，在潜移默化中受到陶冶、激励和鼓励。教师要善于将教学语言的科学性和教育性，用艺术化的优美形式和方法诉诸学生的感官，使之入耳、入脑、入心灵。

课堂教学效果好坏，虽然受多种因素的影响，但教师的语言艺术往往起到特别重要的作用。特别是教学语言要精当，思路要清晰，讲解抽象的知识必须用生动的事例、直观形象的语言，让学生在语言产生的视觉效应下唤起表象或产生联想和想象。点拨时语言要富有启发性和思考性，给学生一种似隐似现、若明若暗之感，使其有所思、有所想、有所悟，读题、谈话、讲解时语言要运用得体，快慢适度、能突出知识逻辑

重音，字字清晰，声声入耳，讲话要有艺术效果，有幽默感，或开宗明义，或含蓄婉转，或说理比喻，讲解和论述思路正确清晰，论证简洁严密。

七、教学节奏美

教学节奏美能减轻学生身体的劳累，并唤起他们追求新知识的喜悦感。

教学节奏美还表现为对教材内容的处理与安排富有弹性，即有起有伏。教师要根据学生在课堂的反映来调节节奏，使学生的情绪具有弹性。如教师在讲述一些要领阐述一些基本原理时，总是毫不含糊，一字一顿地讲。听这样的内容，学生的思维活动往往是很紧张的，为了把教学组织得十分严密，让学生一字一句不漏地听进去，并记在笔记本上，他们需要高度集中注意力，如果一连两节课让学生处于这样的紧张中，大脑会由于承受不了过重的负担，而转为抑制，兴趣就会降低。因此，在内容的安排上要适度，把一些有趣、新颖、生动的内容穿插进去，使学生的情绪有张有弛。教学在进行了一段以后，让学生有静心回味的的时间，课进行到一阶段后，要让学生有自由支配的时间，这样就能达到“此时无声胜有声”的功效。

课堂教学处处充满着美，教师应引导每个学生从教材、教学、学习中发现美，寻找美，感受美。愿我们的课堂教学都充满教学艺术美，让我们的学生都能享受到教学艺术美。

《中小学教师教学艺术丛书》是在“九五”国家级重点课题“面向 21 世纪我国中小学教师队伍建设研究教师教学艺术研究”成果的基础上，集全国优秀中小学教师的教学艺术成就著集而成，共 20 多分册，至 2000 年底由中国林业出版社陆续出齐并公开发行，旨在提高广大教师的教学艺术水平，促进全面实施素质教育。

新的世纪即将到来，当站在世纪之交的时代制高点远眺时，我们相信，21 世纪将是教学艺术的世纪。

前 言

思维能力是智慧的源泉，是创造的火花。为了培养学生的思维能力，本书集中研究和探讨初中数学解题训练艺术。

它与流行的观点和作法不同的是，本书从一个新的角度来认识和设计解题训练系统。

流行的观点认为，解题训练就是讲解题方法。强调方法本没有什么不对之处，可是，强调的过分就会生出弊端。目前的情况是，各种方法叠出，许多书罗列出几十种甚至一百多种初中数学解题方法，令学生目不暇接，以致不得要领。然而，比方法更重要的、起关键作用的是思维。方法属于工具的层次，当你面临一个问题，你首先得靠观察，回忆、联想和想象等思维活动，靠对问题的分析形成对问题的理解，而后才能根据问题特征选择、尝试方法。因此，方法的背后是思维，思维比方法高一层次，思维对方法起到统摄作用。因此，在大的解题训练过程中，不应该孤立地讲方法。而应该结合思维讲方法，应该将思维“请到”台前来扮演主角。

有鉴于此，本书从揭示思维基础心理活动和思维本质入手，进而展开在解题过程中的思维艺术，最后结合思维介绍重要思想方法及各思想方法衍生的数学专门性方法。我们认为，这是解题训练中一种独具特色的很有效果的设计。

纵观全书，会发现本书有如下几个特色：

1. 本书为初中学生和教师而写，全部采用初中数学实例，大部分例题、习题选自全国各省市中考优秀题例，并标出中考年份，也选了少量“希望杯”等竞赛题。因此，本书可读性强。

2. 每一例题后面都设计安排了与例题相关的跟踪训练题（用方框框出来了），看了例题后即可让读者一试身手，答案附在每章后面。学练结合，能起到立竿见影之效。

3. 本书设计了专门训练某种思维能力的“训练专题”卷，每卷都

2 初中数学解题训练艺术

设置一定的趣味题和游戏题，使学生能轻松快乐地学习。

4. 本书充分吸收现代教育学和心理学的研究成果，注意在训练中激发兴趣。突出思维艺术性和训练的艺术性。注意选择妙、巧、美的习题，并适时给出评价。

5. 作者还将自己的多年积累的教学经验写入书中，这样具有操作性和实效性。

总之，我感到本书作者的写作态度是非常认真的。阅读本书，你会感到被牵引着走进了一个美的数学世界中，这里既有许多激发你的学习兴趣的“珍奇”，又有许多启迪智慧的“明珠”，它促你深入思考，助你提升思维品质，帮你总结解题方法和经验，与你一道共赏解题思维艺术。

中国教育学会反馈教学法研究会会长 刘显国

2000年10月于深圳

目 录

教学艺术美（代序）	刘显国
前 言	刘显国
1 揭开解题思维的神秘面纱	(1)
1.1 兴趣是最好的老师	(1)
1.2 思维的动因——问题	(7)
1.3 思维的细胞——概念	(18)
训练题一——初中数学概念训练专题	
1.4 真理的卫士——逻辑	(26)
1.5 思维的工具——语言	(32)
训练题二——初中数学语言训练专题	
1.6 思维的本质——抽象性、概括性	(41)
跟踪训练参考答案	(50)
2 铸就思维的一般能力	(56)
2.1 观察的艺术	(56)
训练题三——观察能力训练专题	
2.2 注意的艺术	(67)
训练题四——注意能力训练专题	
2.3 记忆的艺术	(75)
训练题五——记忆能力训练专题	
2.4 联想的艺术	(92)
训练题六——联想能力训练专题	
2.5 想象的艺术	(105)
训练题七——想象能力训练专题	
2.6 推理的艺术	(124)
训练题八——推理能力训练专题	
2.7 思维中的情和意	(146)

2 初中数学解题训练艺术

跟踪训练参考答案	(153)
----------	-------

3 磨砺思维方法之剑

3.1 元的思想方法	(164)
------------	-------

3.2 转化的思想方法	(171)
-------------	-------

训练题九——数学思想方法训练专题（一）

3.3 逻辑思想方法	(181)
------------	-------

3.4 计算思想方法	(192)
------------	-------

3.5 数形结合思想方法	(206)
--------------	-------

训练题十——数学思想方法训练专题（二）

跟踪训练参考答案	(216)
----------	-------

附录 I 关于拿破仑问题的一个注记	(223)
-------------------	-------

附录 II 本书所涉及的初等数学明珠	(225)
--------------------	-------

参考文献	(226)
------	-------

1 揭开解题思维的神秘面纱

我们知道,解题过程是一个思维过程,思维能力须得通过解题训练来培养,解题训练之根源是思维。为了提高解题能力,许多人离开思维的普遍原则,老在一些特别的方法和技巧上兜圈子,终因这些方法技巧太多太杂,以致抓不住要领而失败。

其实,解题训练艺术之根本在于思维训练,我们通过解题揭示思维过程和思维方法,从思维高度总结归纳数学中一些重要解题方法,达到直接提高学生思维能力和解题能力之目的。为了认识思维,让我们首先揭开思维的神秘面纱。

1.1 兴趣是最好的老师

如果有人问:“是什么引导你走上以数学和数学教学为职业这条人生道路的?”我会说:“是鸡和兔子引导我爱上数学并献身于数学教学工作的。”其缘由来自如下一个小故事。

小学五年级时,我在家乡的收购站翻旧书,无意间看到一本算术书,没有封面了,书的前面有好多应用题,我看到其中就有“鸡兔同笼”“韩信点兵”等问题,觉得很有趣,爱不释手,就花了几分钱买了这本书。我天天晚上自学它,直到学会了后面的方程内容。我特别惊奇于用方程解应用题,思路来得如此简单,真是妙不可言。自学使我尝到了学习的甜头,并使我在1964年由初一跳级到初三,以后尽管“文革”浩劫耽误了十年,但凭着对数学的兴趣,我在最艰苦的岁月里仍自学完高中数学和大学部分数学。确有许多人畏难数学。但我却觉得它虽然难,却能挑战我们的智力,是一门富含思维艺术的学科,我乐此不疲,以致我在1978年恢复高考后考上大学,继而考上数学专业研究生。

上述经历使我懂得了,对于学生来说,什么最重要——兴趣最重要。正如最具智慧头脑的爱因斯坦所说:“兴趣是最好的老师。”

现在让我们回到刚才提到的有趣问题:

【例1】 (鸡兔同笼问题)鸡兔同笼 18 只,共有 60 条足,问笼中几只鸡? 几只兔?

【算术解法】 假设 18 只全为兔,则应有 72 条足,比实际多了 $72 - 60 = 12$ 条足,设想用鸡换兔,每换一只鸡可少 2 条足,所以共需换 $12 \div 2 = 6$ 只鸡。答:共有 6 只鸡和 12 只兔。

这就是我当年学到的解法,从这里我学到了假设思维方法,虽然事实上不可能 18 只全为兔,但可以在想象中假设它是,于是发现它与现实情况有误差,从而在想象中作思维实验:用鸡去换兔,使误差减小到零,从而出现了满足题意的情况,获得问题的解答。在探索真理的茫茫黑夜中,思维像一盏明灯,照亮前程。我觉得小时候正是被解决鸡兔同笼问题的这种巧妙的思维方法所激发,从而对数学产生兴趣的。可以说,是数学思维艺术、一种美,把我从朦胧中唤醒。

词典上给艺术下的定义是:艺术,指富有创造性的方式、方法。(见《现代汉语词典》商务印书馆)我们来看看数学家张景中教授对上述问题独创性的思考就更能体会出什么是思维艺术了。

他先问学生,兔有 4 条足,鸡只有 2 条足,这岂不是太不公平了吗?

学生答:不是不公平,鸡还有两只翅膀呢!

张问:如果翅膀也算足,总共有多少足?

学生答:有 $18 \times 4 = 72$ 条,这说明有 $72 - 60 = 12$ 只翅膀,原来有 6 只鸡(及 12 只兔)。

看了张教授的解法,真叫人称奇,在他三两句点拨之下,疑难顿消,思路特别简单。妙在题中本不涉及翅膀,他却引入翅膀。又奇在将翅膀设想为足,角色换位,使翅膀在这里变成了联接已知和未知的桥梁,实在是匪夷所思。

当然,对于诸如此类的应用题,现在的初中生倾向于用方程(组)方法而很少用上述算术方法求解。例如对于本题,可设鸡兔各有 x 只和 y 只,依题意列出方程组:

$$\begin{cases} x + y = 18 \\ 2x + 4y = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 12 \end{cases} \quad \text{答: (略)}$$