

名校压轴题

熊 斌 主编
八大名校联编

高二数学



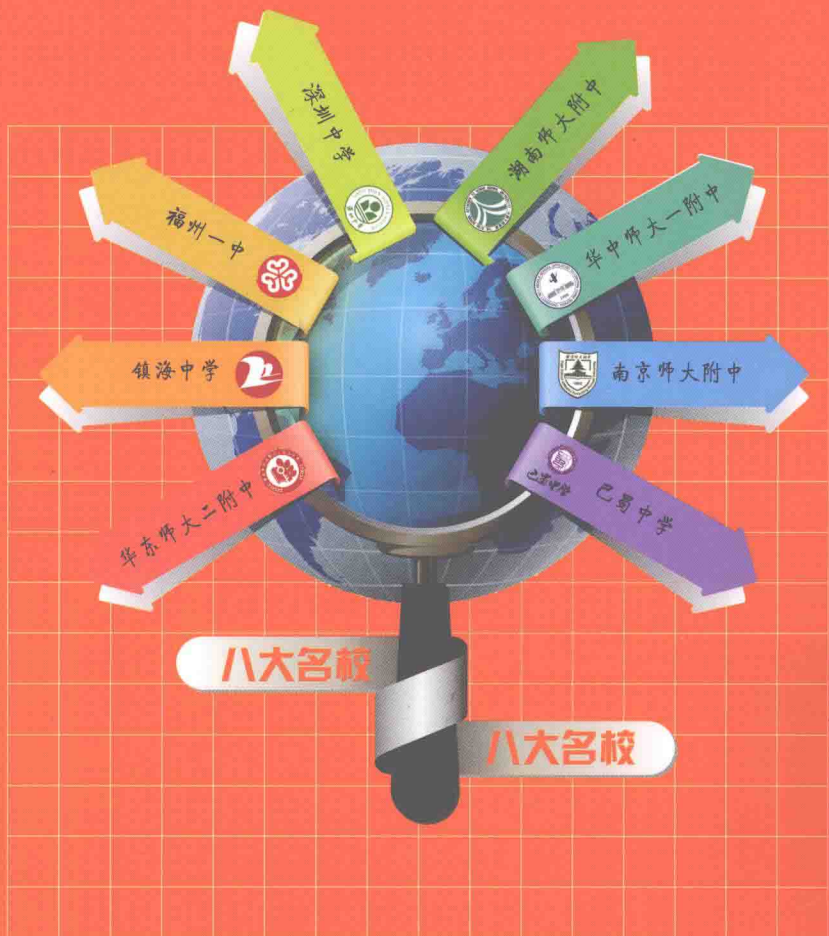
八大名校

八大名校



华东师范大学出版社
著名商标
全国百佳图书出版单位

本书所有压轴题来源于八大名校近年的期中、期末试题



刷名校压轴题，考名牌大学

名校压轴题·高一数学

名校压轴题·高一物理

名校压轴题·高一化学

名校压轴题·高二数学

名校压轴题·高二物理

名校压轴题·高二化学

这里有一群学霸



微信号: tiaozhanyazhouti

ISBN 978-7-5675-3683-8



9 787567 536838 >

定价: 23.00元

www.ecnupress.com.cn

名校压轴题

高二数学

主 编 熊 斌
整理编写 童正卿

 华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

名校压轴题. 高二数学/熊斌主编. —上海:华东师范大学出版社,2015.6

ISBN 978-7-5675-3683-8

I. ①名… II. ①熊… III. ①中学数学课—高中—习题集 IV. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 134434 号

名校压轴题·高二数学

主 编 熊 斌
总 策 划 倪 明
项目编辑 徐 平
特约审读 王小双
装帧设计 黄惠敏

出版发行 华东师范大学出版社
社 址 上海市中山北路 3663 号 邮编 200062
网 址 www.ecnupress.com.cn
电 话 021-60821666 行政传真 021-62572105
客服电话 021-62865537 门市(邮购)电话 021-62869887
地 址 上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网 店 <http://hdsdcbs.tmall.com>

印 刷 者 常熟高专印刷有限公司
开 本 787×1092 16 开
印 张 10.5
字 数 230 千字
版 次 2015 年 8 月第 1 版
印 次 2015 年 8 月第 1 次
印 数 23000
书 号 ISBN 978-7-5675-3683-8/G·8384
定 价 23.00 元

出版人 王 焰

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社客服中心调换或电话 021-62865537 联系)

《名校压轴题》编委会

主编

熊 斌(华东师范大学)

编委(按音序排列)

陈德燕(福建福州一中)

洪燕芬(上海华东师大二附中)

蔡任湘(湖南师大附中)

沈虎跃(浙江镇海中学)

宋晓宇(重庆巴蜀中学)

姚 亮(广东深圳中学)

叶新年(湖北华中师大一附中)

袁青云(江苏南京师大附中)





当你拿到《名校压轴题》时,也许你会有名校指哪些、何为压轴题等疑问。

首先,关于名校,我们想说两点:其一,既然要做《名校压轴题》,当然要选择最好的学校,所以上海的华东师大二附中、江苏的南京师大附中等这些响当当的校名在列其中。其二,为了让这套书适用于全国的小伙伴,我们在名校的地域选择上尽量做到了全覆盖。所以你们不仅可以看到华东地区的镇海中学,也会看到西南地区的巴蜀中学。

其次,何为压轴题?既然确定了8所名校,就让8所名校的资源共享吧。这套书以各校近5年的期中、期末等试卷真题为基础。由各个学科的资深教师对试卷中的压轴题进行了加工整理。这里的压轴题,是指每一张试卷中属于20%的疑难问题,题型涉及填空、选择、大题等。

至此,也许你对《名校压轴题》有了一个初步的认识,你也会深深明白,这套《名校压轴题》是多么的货真价实,名副其实!都说这是一个信息爆炸、资源泛滥的年代,但实际上,真正的名校资源、优质资源是非常稀缺的,也许你会用作业帮、学霸君,拍拍就搜题,可要找到与本书中完全一样的题并非易事。

目前,《名校压轴题》共涉及高一、高二年级,数学、物理、化学三个学科,共6册。为了让读者使用起来更方便,在编排上我们进行了精心的设置。压轴题作为比较难的习题,读者往往会有“听了就懂、看了才会、无从下手”的情况,在学习中把一些疑难问题真正内化为自己的解题能力,练习非常重要。所以本套丛书所有的压轴题按知识模块进行分类,并对相关压轴题的出题形式、出题角度、解题方法进行总结,让读者做到心中有数。编排中,所有的习题都适当留空,供读者思考、练习使用。鉴于压轴题的难度,所以每一道题都配备了详细的解析过程,并对一些特别经典的习题进行了适当点拨。读者在使用过程中,要先读题,认真思考,尽量不要去翻看解析过程和答案。遇到实在解决不了的问题,解析过程与答案可以作为参考,但之后务必再去独立写一遍,只有不断地这样举一反三,把一道题做深做透,才能达到事半功倍的效果。

《名校压轴题》不仅仅是一套教辅学习读物,更是一种优质资源的凝聚,教辅图书千千万,优质资源并不多。我们利用自身的优质平台挖掘到独家的名校学习资源,就是为了服务于莘莘学子,希望切实提高你的学习效率。这也是我们编辑出版这套丛书的初衷,在鱼龙混杂的教辅市场中,我们一直坚持做精品图书,但究竟效果如何,还得通过读者的实践来检验。愿编者们的辛劳,能够转化为你的累累硕果。

华东师范大学出版社教辅分社



熊斌

华东师范大学数学系教授,博士生导师,国际数学奥林匹克研究中心主任,上海市核心数学与实践重点实验室主任。中国数学奥林匹克委员会委员,曾7次担任国际数学奥林匹克中国队领队、主教练,6次获得团体第一,为国争得了荣誉。多次参与中国数学奥林匹克、全国高中数学联赛、全国初中数学竞赛、西部数学奥林匹克、女子数学奥林匹克、国际城市青少年数学邀请赛等竞赛的命题工作。历届全国数学竞赛命题研讨会的组织者。著作等身,在国内外发表论文100余篇,在国内外出版著作超过100部。

从事数学教育、数学竞赛工作约有三十年头了。这么多年来,我曾到过全国各省市多所示范性高中,看见一些名校的硬件设施齐全、高端,软件也具有相当高的水准。也与许多名师进行了交流和广泛的学术探讨。在无数次的交往过程中深深感到,名校之所以成为其他学校学习的榜样,体现在其具有丰富的教学资源,不仅拥有一流的名师,而且在教育、教学、科研、管理等诸多方面都形成了自己鲜明的办学特色。名校名师为我国的基础教育作出的贡献不可低估。

我国幅员辽阔,各地区的经济发展不平衡,教育水平的差异也极大,不少经济欠发达地区的教育资源相当匮乏。为更好地分享名校的教育经验与成果,分享名师的教学实践,经过与部分名师的深入探讨与沟通,有意把一些教学实践的资料给大家分享。现在,经过名校名师的加工和整理,编辑出版了这套《名校压轴题》,奉献给广大读者。

至于《名校压轴题》是否适合教学水平相对一般的学校以及学生,还需要实践的经验。我期待着,来自各个方面的意见和建议。

最后,我要衷心感谢为本套书提供资料 and 具体编写的各位名师,没有他们的辛劳,我的想法是不可能实现的。



本书是《名校压轴题·高二数学》，顾名思义，题目绝大多数来自几个名校的测试真题，且大都取自其中的压轴部分。在编写的过程中，我们发现它有几个特点：

1. 因为各个学校、地区的教学安排、教材选用不同，只综合提炼了函数、数列、不等式、解析几何、计数、概率统计等部分，尽可能地覆盖不同地区高二数学的内容。
2. 难度适中，正好属于“跳一跳摘果子”的程度，对高二学生而言，题目既有一定的综合性，又不偏不怪，有利于在夯实基础的同时，发展数学思维。
3. 答案详细，我们尽最大努力让答案尽可能地详尽以便于读者使用，但囿于时间和水平，很多解答可能并非最优结果。同时，我们鼓励读者原创思考，不被答案束缚，因为满分解答的书写过程未必就是真实的思维过程，多问几个为什么才是由假懂走向真懂的必经之路。



第一章 函数压轴题 / 1

- 一、二次函数综合题 / 1
- 二、导函数与原函数 / 5
- 三、切线相关问题 / 7
- 四、含参数的动函数 / 10
- 五、含参数的动区间 / 15
- 六、恒成立和存在成立 / 19
- 七、函数与不等式的综合 / 23
- 八、函数的零点 / 28
- 九、函数的对称与周期 / 32
- 十、信息题 / 34

第二章 数列压轴题 / 35

- 一、数列与函数、不等式的综合 / 35
- 二、数列与推理 / 38

第三章 不等式压轴题 / 40

第四章 解析几何压轴题 / 42

- 一、离心率及范围 / 42
- 二、定点、定值、定直线 / 45
- 三、轨迹问题 / 50
- 四、焦半径与焦点三角形 / 52
- 五、先猜后证与探索 / 55
- 六、圆相关的综合题 / 57
- 七、一个重要性质 / 61

八、信息题 / 63

第五章 计数原理压轴题 / 66

一、计数 / 66

二、二项式定理 / 67

第六章 概率与统计压轴题 / 69

一、概率 / 69

二、统计 / 72

参考答案 / 76

第一章 函数压轴题

一、二次函数综合题

命题特点分析

1. 二次函数是多项式函数的重要代表,学生在初中就已经接触它,高中对它的考察常常增加:①定义域的限制,与单调性、最值结合;②含参数的讨论,与恒成立问题、根分布问题结合;③零点的情况,与零点存在性、唯一性相结合.

2. 常见解决问题的策略有:①尽可能画图,画图时要关注已知确定的东西,如零点、截距、坐标轴、开口、判别式等;②两个变元或以上,学会变换角度抓主元;③数形结合,务必要保持数形刻画的等价性,不能丢失信息;④已知两个零点,要能想到零点式、对称轴和韦达定理,零点的唯一性常由单调性保证;⑤掌握二次函数、二次不等式、二次方程的内在联系,熟练等价转化和准确表述;⑥恒成立问题可转化成最值问题.

1.1.1 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$.

(1) 若不等式 $f(x) > -2x$ 的解是 $1 < x < 3$,且关于 x 的方程 $f(x) + 6a = 0$ 有两个相等的实根,求 a 、 b 、 c 的值;

(2) 若 $a > 0$, $c = 1$,设方程 $f(x) = x$ 的两个实数根为 x_1 和 x_2 ,且 $|x_1| < 2$, $|x_2 - x_1| = 2$,求实数 b 的取值范围.

1.1.2 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$) 满足:对任意实数 x , 都有 $f(x) \geq x$; 且当 $x \in (1, 3)$ 时, 有 $f(x) \leq \frac{1}{8}(x+2)^2$ 恒成立.

(1) 求证: $f(2) = 2$;

(2) 若 $f(-2) = 0$, 求 $f(x)$ 的表达式;

(3) 在(2)的条件下, 设 $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}mx$, $x \in [0, +\infty)$. 若 $g(x)$ 的图象上的点都位于直线 $y = \frac{1}{4}$ 的上方, 求实数 m 的取值范围.

1.1.3 设函数 $f(x) = m(x^2 + 1) - 2x - 6$.

(1) 若 $f(x) < 0$ 对满足 $|m| \leq 2$ 的一切实数 m 都成立, 求 x 的取值范围;

(2) 是否存在实数 m , 使得 $f(x) < 0$ 对满足 $|x| \leq 2$ 的一切实数 x 都成立? 若存在, 试求出 m 取值范围; 若不存在, 请说明理由.

1.1.4 已知二次函数 $f(x) = x^2 + ax + b$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$.

- (1) 若不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $\{x \mid x < -3 \text{ 或 } x > -1\}$, 求 a, b 的值;
- (2) 在(1)的条件下, 若对于一切 $x \in [0, +\infty)$, 都有 $f(x) > 4mx + 1$ 成立, 求 m 的取值范围;
- (3) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 2)$ 、 $(2, 3)$ 内各有一个零点, 试求 $|3a - 4b - 8|$ 的取值范围.

1.1.5 设二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a > 0)$, 方程 $f(x) - x = 0$ 的两个根 x_1, x_2 满足 $0 < x_1 < x_2 < \frac{1}{a}$.

- (1) 当 $x \in (0, x_1)$ 时, 证明: $x < f(x) < x_1$;
- (2) 若函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = x_0$ 对称, 证明: $x_0 < \frac{x_1}{2}$.

- 1.1.6 函数 $y = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 5$ 在 $[-3, 3]$ 上的最小值是_____.
- 1.1.7 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$. 若方程 $f(x) = x$ 无实根, 求证: 方程 $f[f(x)] = x$ 也无实根.

二、导函数与原函数

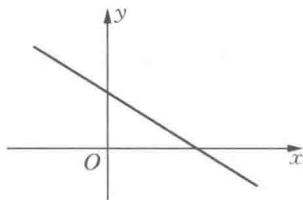
命题特点分析

(1) 导函数和原函数既有联系又有区别,常见的考察点有:①导数的意义,与切线、单调性相结合;②从原函数推断导函数的性质;③从导函数推断原函数的性质.

(2) 常见于填空、选择题型,主要考察学生一定的识图、推断、联想、构造的能力.

(3) 常见的解决问题的策略:①画草图,特别关注特殊点:零点、极值点;②掌握单调性和导函数正负的关系,不能与原函数混淆;③常常需要根据条件特点,找到隐藏的原函数 $x \pm f(x)$ 、 $xf(x)$ 、 $\frac{f(x)}{x}$ 、 $\frac{f(x)}{e^x}$ 等;④若 $f(x) = xg(x)$,则 $f'(0) = g(0)$.

1.2.1 定义在 \mathbf{R} 上的函数 $y = f(x)$ 的图象经过原点,且它的导函数 $y = f'(x)$ 的图象是如图所示的一条直线,则 $y = f(x)$ 的图象经过_____.(将正确的结论对应的序号都填上)



1.2.1 题图

① 第一象限; ② 第二象限; ③ 第三象限; ④ 第四象限.

1.2.2 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的可导函数,且对任意 $x \in \mathbf{R}$ 均有 $f(x) > f'(x)$,则以下结论中正确的有().

- A. $e^{2013} f(-2013) < f(0)$, $f(2013) > e^{2013} f(0)$
 B. $e^{2013} f(-2013) < f(0)$, $f(2013) < e^{2013} f(0)$
 C. $e^{2013} f(-2013) > f(0)$, $f(2013) > e^{2013} f(0)$
 D. $e^{2013} f(-2013) > f(0)$, $f(2013) < e^{2013} f(0)$

1.2.3 已知 $f(x) = \lg x$,函数 $f(x)$ 定义域中任意的 $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$,有如下结论:

- ① $0 < f'(3) < f(3) - f(2) < f'(2)$; ② $0 < f'(3) < f'(2) < f(3) - f(2)$;
 ③ $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$; ④ $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$.

上述结论中正确结论的序号有_____.

1.2.4 对于 \mathbf{R} 上可导的任意函数 $f(x)$,若满足 $\frac{1-x}{f'(x)} \leq 0$,则必有().

- A. $f(0) + f(2) < 2f(1)$ B. $f(0) + f(2) \leq 2f(1)$
 C. $f(0) + f(2) > 2f(1)$ D. $f(0) + f(2) \geq 2f(1)$

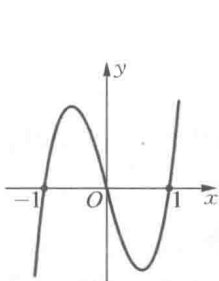
1.2.5 定义域为 \mathbf{R} 的奇函数 $f(x)$,当 $x \in (-\infty, 0)$ 时 $f(x) + xf'(x) < 0$ 恒成立,若 $a = 3f(3)$, $b = f(1)$, $c = -2f(-2)$,则().

- A. $a > c > b$ B. $c > b > a$

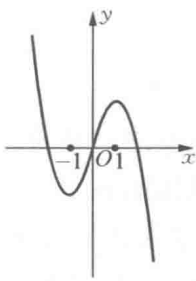
C. $c > a > b$

D. $a > b > c$

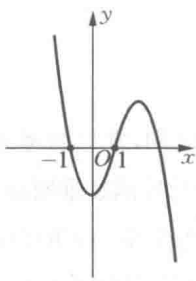
1.2.6 已知函数 $y = xf'(x)$ 的图象如图所示(其中 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数). 下面四个图象中, $y = f(x)$ 的图象大致是().



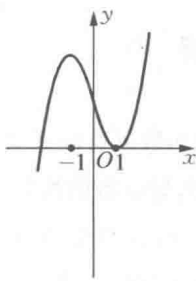
1.2.6 题图



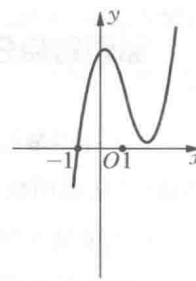
A.



B.



C.



D.

1.2.7 若函数 $f(x) = x(x-1)(2x+1)(3x-1)(4x+1)(5x-1)\cdots(2014x+1)$, 则 $f'(0) =$ _____.

三、切线相关问题

命题特点分析

(1) 切线问题常常以填空题或者解答题的形式呈现,涉及:①导数的几何意义;②求切线方程;③判断切线的数量.

(2) 解决此类问题常见的策略有:①设切点,切点是交点,切点处的导数值就是该切线的斜率;②当切点在圆或者圆锥曲线上时,要能快速写出切线方程;③当切点在圆或者圆锥曲线之外时,要熟悉切点弦所在直线方程的推导.

1.3.1 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x) = x^3 + (3-a)x^2 - 4ax$, 其中 a 为常数.

(1) 当 $a = 1$ 时,求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 当 $0 \leq x \leq 1$ 时,若函数 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得最大值,求实数 a 的取值范围.

1.3.2 已知函数 $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数,在 $(0, 1)$ 上是增函数,函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上有三个零点.

(1) 求 b 的值;

(2) 若 $x = 1$ 是其中一个零点,求 $f(2)$ 的取值范围;

(3) 若 $a = 1$, $g(x) = f'(x) + 3x^2 + \ln x$,试问过点 $(2, 5)$ 可作多少条直线与曲线 $y = g(x)$ 相切?请说明理由.