中学数学专题丛书

叶尧城 主编

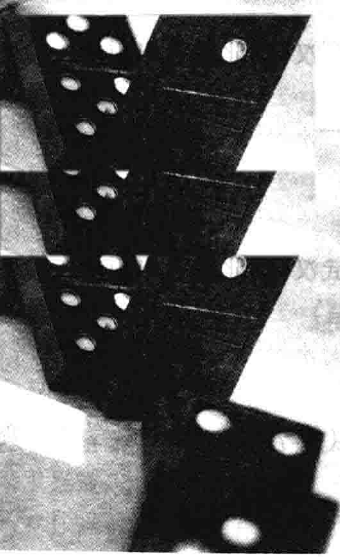
刘楚炤 编著

向量及其应用

ZHONGXUE SHUXUE ZHUANTI CONGSHU

湖北教育出版社

8



中学数学专题丛书

叶尧城 主编

向量及其应用

刘楚炤 编著

8

湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

向量及其应用/刘楚昇编著.—武汉:湖北教育出版社,2002
(中学数学专题丛书/叶尧城主编)
ISBN 7-5351-3164-6

Ⅰ.向… Ⅱ.刘… Ⅲ.向量(数学)-中学-教学参考资料 Ⅳ.G634.623

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 095564 号

出版 发行:湖北教育出版社
网 址:http://www.hbedup.com
武汉市青年路 277 号
邮编:430015 传真:027-83619605
邮购电话:027-83669149

经 销:新 华 书 店
印 刷:湖北新华印务有限公司 (430034·武汉市解放大道 145 号)
开 本:787mm×1092mm 1/32 8 印张
版 次:2002 年 4 月第 1 版 2002 年 7 月第 2 次印刷
字 数:154 千字 印数:5 001-8 000

ISBN 7-5351-3164-6/G·2569 定价:10.50 元

总　序

随着素质教育的深入推进,需要我们在素质教育的理念与课堂教学之间架设一座桥梁,以便顺利地使素质教育进入主渠道。桥梁如何构建?改革教材成为了人们选择的突破口!当前,国家教育部教材审定委员会审定通过的几套教材正为愈来愈多的师生所选用,新教材在"为所有的学生打好共同基础"上将有所作为。然而,我国幅员辽阔,地区间的教育水平的差异大,个体间学习水平的差异大。如何真正地体现"以学生发展为本",发展学生的个性特长,让他们在科学素质、创新意识和能力上有不同程度的提高,还需要通过特定的教学过程来完成,其中应有好的素材和高质量的课外读物(而非散见于市面上的"检测题"、"同步练习"、"习题集"等)。因此,我们数学教育工作者有义务、有责任向新世纪的中学生提供一套与新教材配套的课外读物,以专题讲座的形式,帮助学生了解知识的发生、发展过程,学会分析、解决问题的思想方法,深化、拓宽相关知识。

有鉴于此,我们组织了湖北省一批有丰富教学经验和教学研究工作经验的享受政府津贴的专家、特级教师和高级教师编写了这套《中学数学专题丛书》。丛书共有 18 个小册子,各册相对独立又相互联系,小册子的内容是与中学数学新教材相对应或相关的。它力求以生动简练的笔触,介绍一点数

学史料，有助于学生吸收各种不同的数学经验，理解各种不同的数学思想观点，体会数学的人文价值；着力反映知识的纵横联系，并以范例的形式予以说明；精选典型例题，揭示重难点，说明重在何处，难在哪里，如何理解，着重分析解题思路，阐释思想方法；选编与日常生活、生产及与其他学科相关的问题，引导学生重视数学的应用。各册都配备了一定数量的习题，供读者练习。对数学有浓厚兴趣的学生，可系统阅读，也可以根据个人的具体情况有选择性地使用。概括地讲，该套丛书具有如下特点：

1. **帮助学生夯实基础**。通过知识精讲、典例剖析、归纳小结，落实基础知识。

2. **帮助学生培养能力**。精选思想性强的综合题，启迪学生的思维，开阔学生的思路，落实数学思想方法的学习。

3. **引导学生关注应用**。精选密切联系生活实际和社会实践的应用题，促进学生养成用数学的意识。

4. **引导学生崇尚创新**。精选提问的方向不确定或答案不确定的探索性、开放性问题，培养学生的探究能力。

5. **引导学生走向成功**。选材涵盖了高考和全国数学联赛的内容和题型，有益于读者在高考和数学竞赛中创造佳绩，走向成功。

由于编写与新教材配套的课外读物对于我们是一种新的尝试，难免出现这样或那样的疏漏和不足，敬请读者提出批评和建议，以便再版时修改，使这套丛书成为受广大师生欢迎的中学数学课外读物。

叶尧城

2002年1月

前　　言

“向量”对高中学生来说，并不陌生。在数学（如复数）和物理（如力学）学习中都曾见过面。遗憾的是现行中学教材尚未系统、全面地介绍向量的知识。可喜的是近年由国家教委颁布的《全日制普通高级中学数学教学大纲》（供试验用）增加了向量的内容：平面向量、空间向量及其加法，减法，数乘，数量积，坐标表示等，并编写了相应的教材，这是中学数学课程改革的重大举措之一。

为什么这样说呢？我们不妨先从中学几何教材的演变，阐述增加向量内容的意义。欧几里得（Euclid）的《几何原本》作为几何学的标志，2000多年来，对世界的数学教育曾产生过深刻的影响。我国现行几何教材也基本上是欧氏几何传统内容，解题方法主要是欧氏几何的综合方法。但是，随着时代的飞跃发展，数学作为应用广泛的主要基础学科，也从内容到形式产生了深刻的变化。因此，把传统的欧氏几何仍作为现代中学几何的主要内容已不适宜。但是，把欧氏几何完全排斥也是不妥的。由于初、高中数学教学大纲的有机衔接，使初中的平面几何与高中的立体几何融为一体。初中主要采用传统的欧氏几何方法，高中则继承欧氏几何中有较高教育价值的部分，如严密的逻辑推理、准确的数学语言等，结合向量的方法处理平面几何和立体几何问题。由于向量有线性运算、数量积、向量积，它既有线段表达式，又有坐标表达式。这样，把几何学的讨论由“定性”推到“定

量”的层面，使空间结构问题可以代数化处理。正因为如此，用向量处理几何问题具有简化功能，可避免添作冗繁的辅助线，且应用广泛。

高中数学增设“向量”，对数学其它教材内容的影响也不可低估。现行教材的复数几何表示及四则运算都应用了向量，向量内容的系统化无疑会深化对复数的理解和掌握。从向量出发，建立的几何与代数的对应，使解析几何的概念和公式阐述更为简洁。以向量作为工具对三角公式的推导、对三角恒等式的构造和证明都有特殊的功效。利用向量恒等式，还可证明和构造代数恒等式，如柯西（Cauchy）不等式等。

向量作为中学其它学科的工具，应用甚广。向量内容的增加，可解决多年来高中数学教材对向量介绍过简，产生的对物理教学不适应的状况。特别是，明显滞后于力学、运动学教学的情况会有所改变。这样，使各学科教学之间互相渗透，以利于综合能力的培养。

现代数学的许多分支的奠基与向量密切相关，而且向量在科学技术方面的实际应用也十分活跃。高中阶段能学会用向量处理数学及其它学科的有关问题，无疑有利于学生的进一步深造和直接参与实际工作。所以说，高中增设“向量”也是教育整体改革的一部分。

本书将《新大纲》要求的内容，适当予以加深、拓宽。增加了向量的数量积（外积）、混合积以及向量在平面几何、立体几何、解析几何、三角与代数等方面应用的例题和习题。力求通过对向量基础知识的介绍及用向量法解题的讲

述，能体现简朴的数学思想。使数学思维能力，特别是创新意识得到培养，从而提高分析问题和解决问题的能力。

全书共分三章。第一章向量与向量运算。系统地介绍向量的基础知识，与新教材不同的是未把平面向量、空间向量分两个层面先后介绍，而是把平面向量融于空间向量之中，集中介绍有共性的概念和运算。这也是一种尝试。第二章向量的应用。分别介绍用向量法处理平面几何和立体几何及其它问题常用的方法，例题的讲述，重在思路分析。重点比较了向量法与传统综合法处理几何问题的利和弊。向量法优点突出，简捷、明快，不需特殊技巧。但也不能否定综合法，如处理有关圆的问题，仍然以综合法为优。两种方法要因题而异，合理运用。第三章研究性课题例说。选了两个课题进行研讨。在《新大纲》中研究性课题是必修内容，旨在创新意识和实践能力的培养。由于此项活动如何开展也是研究性课题。所以只能是“例说”，而不是“范例”。

目录

第一章 向量与向量运算 1

§1 向量的概念 1

§2 向量的线性运算 3

2.1 向量的加法 3

2.2 向量的减法 7

2.3 数乘向量 8

§3 共线向量与共面向量 10

§4 向量的坐标 23

4.1 向量在轴上的射影 23

4.2 空间直角坐标系与向量坐标 25

4.3 向量坐标与分向量 27

4.4 向量的模和方向余弦的坐标表示 28

4.5 向量线性运算的坐标表示 30

§5 向量的数量积(内积) 35

5.1 数量积的意义 35

5.2 数量积的性质 36

5.3 数量积的坐标表示 39

§6 向量的向量积(外积) 51

6.1 向量积的意义 51

6.2 向量积的性质 52

6.3 向量积的坐标表示 55

§7 向量的混合积 60

7.1 混合积的意义 60

7.2 混合积的性质 64

7.3 混合积的坐标表示 65
习题 1 76
第二章 向量的应用 81
§1 向量与平面几何 92
§2 向量与立体几何 118
§3 向量与解析几何 136
§4 向量与三角、代数及其它 150
习题 2 183
第三章 研究性课题例说 189
§1 正多边形向量定理及其应用 189
§2 正弦定理、余弦定理和射影定理的推广 202
习题解答或提示 218

第一章 向量与向量运算

§1 向量的概念

人们在长期生产生活实践中,会遇到两种不同类型的量.如长度、面积、体积、密度、重量、功、流量等,在规定的单位下,这些量都可以用一个实数表示它们的大小,这种量叫做数量(或标量);另一类量如力、力矩、速度、加速度等,它们不仅有大小,而且有方向.例如作用于某物体上的力,它不仅有大小,而且有作用方向.又如物体运动的速度既有快慢之分,又有方向的区别.这类既有数量特性,又有方向特性的量,在几何中往往用向量表示.现给出向量的定义如下:

定义 既有大小又有方向的量叫做**向量**(或矢量).

向量的几何图形是一条有向线段.用有向线段的长度表示向量的大小,用有向线段的方向表示向量的方向.如图 1-1 中,用 A 为始点,

图 1-1

B 为终点的有向线段表示向量,记作 $\overrightarrow{AB}$.在这里,我们用有向

线段表示向量的特征,它是向量的直观形象,但并非向量就是有向线段,有向线段是一条线段,而向量是一个量,二者有联系也有区别.

向量$\overrightarrow{AB}$的大小叫做向量$\overrightarrow{AB}$的模(或长度),记作$|\overrightarrow{AB}|$(或AB).

向量的表示除了用表示有向线段的始点和终点的字母以及箭头外,还可用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 等表示,一般印刷用黑体 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 等,书写用 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 等.

定义 模相等且方向相同的两个向量叫做相等向量.向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等,记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

在上述定义中,两个向量相等,只要它们长度相等、方向相同,并没有要求它们有相同的始点(或终点),向量的始点(或终点)可以取平面(或空间)中的任意一点.我们所讨论的这种没有固定始点(或终点)位置的向量叫做自由向量.因此,对于任意一个向量在不改变它的大小和方向的条件下,可以任意移动.这是向量的一个显著的特征.如图 1-2,若 $ABCD$ 是平行四边形,则认为向量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{CD}$是相等向量.

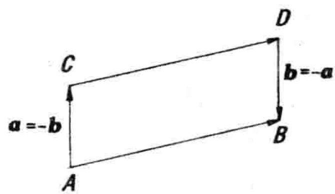


图 1-2

模相等且方向相反的两个向量叫做互反向量.向量$\overrightarrow{AB}$的反向量用$\overrightarrow{BA}$表示,向量 $\boldsymbol{a}$ 的反向量用 $-\boldsymbol{a}$ 表示.如图 1-2,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{b}$,且$\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{DB}$,于是 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$.对于向

量$\overrightarrow{AB}$,显然有$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

特别地,模为零的向量叫做零向量,记作 $\boldsymbol{O}$.零向量的始点与终点重合,它没有确定方向.还规定:零向量都相等.零向量的反向量还是零向量.长度等于1个单位长度的向量,叫做单位向量.

方向相同或相反的非零向量叫做平行向量.如图1-2,$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{CD}$;$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 就是两组平行向量.向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 平行,记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.我们还规定零向量与任一向量平行.由于讨论的是始点可任意选取的自由向量,所以把向量通过平行移动使始点在同一点.这样任一组平行向量都可以移到同一条直线上,因此,平行向量也叫做共线向量.在讨论过程中,两个单位向量一般都不平行,即使平行,也不一定方向相同,所以它们一般都不相等.

向量不能够比较大小,但向量的模是一个实数可以比较大小.

§2 向量的线性运算

21 向量的加法

我们知道质点的位移具有移动的距离和移动的方向两个特征,所以它也是一个向量.某质点如果从点 A 经过位移 $\boldsymbol{a}$ 到点 B,再从点 B 又经过位移 $\boldsymbol{b}$ 到 C,连结 AC,那么$\overrightarrow{AC}$表示的位移 C 就是质点经过两次位移 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 得到的结果.我们即将引入的向量的加法可以说是对物理中的位移通过合理的抽象

和概括得出的，这与数学中的许多概念一样，都可以追溯它的实际背景.

定义 如图 1-3(1)，已知向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，以任意一点 A 为始点，作向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为始点作向量 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$. 我们把以 $\overrightarrow{AB}$ 的始点 A 为始点，$\overrightarrow{BC}$ 的终点 C 为终点的向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和. 记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=C$.

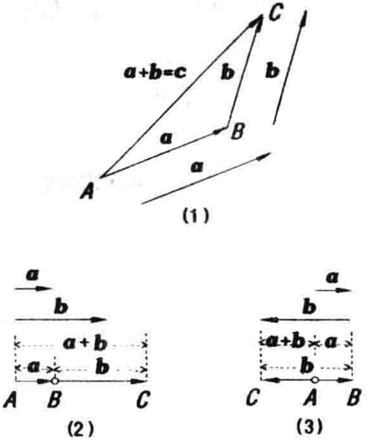


图 1-3

我们把求两个向量和的运算，叫做向量的加法. 上述求向量和的方法，叫做向量加法的三角形法则. 这个法则可以理解为：一动点以 A 点出发按 $\overrightarrow{AB}$ 方向移动到点 B，再由 B 点按 $\overrightarrow{BC}$ 方向移动到点 C，它等价于从 A 点出发按 $\overrightarrow{AC}$ 方向移动到点 C.

值得注意的是，当运用三角形法则时，如果向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线或其中有一个零向量的情况下，A，B，C 三点不能构成三角形.

如图 1-3(2)，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的方向相同；如图 1-3(3)，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相反，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $|\boldsymbol{a}|$、$|\boldsymbol{b}|$ 中较大的向量方向相同.

特别地，对于任何向量 $\boldsymbol{a}$，有

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}.$$

此外,在物理学中,我们知道力是既有大小又有方向的向量.作用于一个质点的两个力,它的合力就是以这两个力为边的平行四边形的对角线上的向量.

我们考察相应的数学模型.如图 1-4,设有向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$,以任意点 O 为始点,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,再以 OA,OB 为边作平行四边形 $OACB$,则该平行四边形上的向量

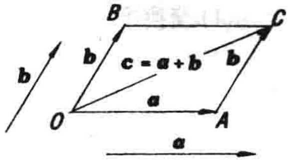


图 1-4

$$\boldsymbol{C}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

这种求向量和的方法,叫做向量加法的平行四边形法则.

以上介绍的两种求向量和的方法不相同.三角形法则是通过平移,依次取前一个向量的终点作为后一个向量的始点,再求和;平行四边形法则是通过平移,从同一始点作两个向量,再求和.结果是相同的.由图 1-4 中,$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,于是有 $\boldsymbol{C}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.由此看来,平行四边形法则与三角形法则相通,结果相同,可谓殊途同归.两种求和方法相得益彰,又各有千秋.

要求多个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{n-1}$,$\boldsymbol{a}_n$ 的和,可将三角形法则予以推广,用向量组成的折线得出.如图 1-5,由空间任一点 O,作 $\overrightarrow{OA_1}=\boldsymbol{a}_1$,由 A_1,作 $\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_2$,$\cdots$,由 A_{n-1},作 $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{a}_n$,得到一向量折线 $OA_1A_2\cdots A_n$.

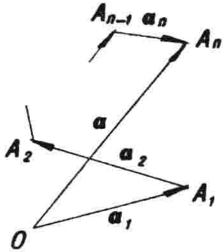


图 1-5

连接 OA_n,则有 $\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}$,即

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n.$$

向量的加法满足下面的运算性质:

(1) 交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

(2) 结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为任意向量.

用三角形法则或平行四边形法则不难证明性质(1),(2).先证(1).如图 1-6,对于不共线的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,作以 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形.则有

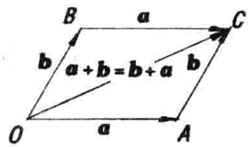


图 1-6

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a},\ \overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}.$$

于是,在△OAC 中,

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC};$$

在△OBC 中,

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}.$$

$\therefore\quad \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ 成立.

当 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 共线时性质(1)仍然成立.

再证(2).如图 1-7,对于三个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$,作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{c}$,连接 AC,BD,AD.由三角形法则有

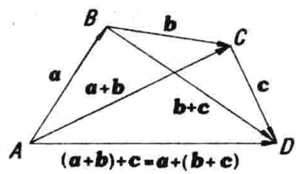


图 1-7

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD};$$

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}.$$

$\therefore(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$成立.

对于 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共线的情况,性质(2)仍然成立.

2.2 向量的减法

任一向量与它的相反向量的和是零向量,即

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}.$$

所以,如果 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是互为相反的向量,即 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$,那么

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的相反向量的和,叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差.记为

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

求两个向量差的运算,叫做向量的减法.

我们知道,减法是加法的逆运算,对向量仍然适用.于是求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差就是求这样一个向量,它与 $\boldsymbol{b}$ 的和等于 $\boldsymbol{a}$,事实上有

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}.$$

即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和等于 $\boldsymbol{a}$.由此,我们得到 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的作图方法.

如图 1-8,已知向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$,在平面内任取一点 O,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,连接 BA,则 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 可表示为以向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点为始点,以向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点为终点的向量.

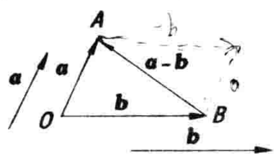


图 1-8

向量的加法还可以推广到平面或空间的多个向量相加,得到向量加法的多边形法则:求若干个向量的和,可通过平移,使一个被加向量的始点依次是上一个被加向量的终点,组成一条折线,最后封闭这条折线的线段所示的向量(它的方向是由折线的始点到折线的终点),就是所求的和.简单地说,封