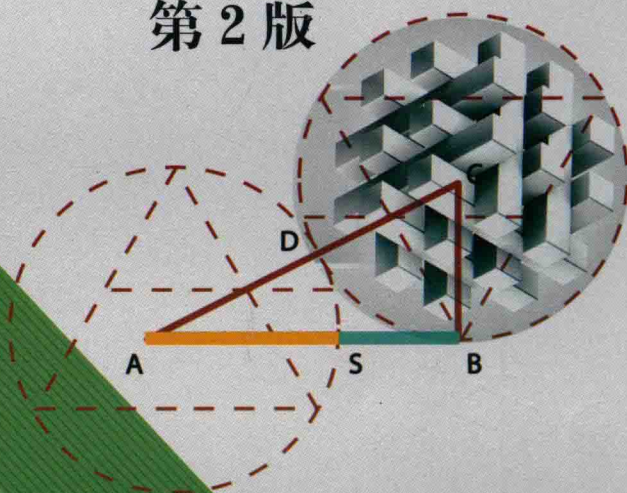


GAODENG SHUXUE

北京邮电大学世纪学院数理教研室 编

高等数学 (下)

第2版



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

“2014 年度民办教育发展促进项目—重点特点专业建设、北京邮电大学世纪学院数学课程改革与实践”资助项目

高等数学(下)

(第 2 版)

北京邮电大学世纪学院数理教研室 编
本册主编 杨 硕



北京邮电大学出版社
[www. buptpress. com](http://www.buptpress.com)

内 容 简 介

本书是普通高等学校基础课程类应用型规划教材,体现了高等数学课程的特色及应用型高校的教学特点,以教育部非数学专业数学基础课教学指导分委员会制定的新的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”为依据,按照既要继承优秀传统,又要改革创新、适应新形势的精神,突出高等数学严谨的知识体系,保持经典教材的优点,又考虑到学生的学习状况和接受程度。在力求保持数学体系完整与严谨的基础上,优化内容,论述深入浅出,通俗易懂。

本书共十二章,分上、下两册,下册包括:空间解析几何与向量代数、多元函数的微分法及其应用、重积分、曲线积分和曲面积分、无穷级数。书末附有习题和综合练习题及参考答案。

本书具有结构严谨、逻辑清晰、重视问题的引入、强调理论的应用、文字流畅、叙述详尽、例题和习题丰富、便于自学等优点,可供普通高等学校和独立学院工科各专业的学生选用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下 / 北京邮电大学世纪学院数理教研室编. --2版. --北京:北京邮电大学出版社, 2015.5
ISBN 978-7-5635-4313-7

I. ①高… II. ①北… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 071291 号

书 名: 高等数学(下)

著作责任者: 北京邮电大学世纪学院数理教研室 编

责任编辑: 满志文

出版发行: 北京邮电大学出版社

社 址: 北京市海淀区西土城路 10 号(邮编:100876)

发行部: 电话: 010-62282185 传真: 010-62283578

E-mail: publish@bupt.edu.cn

经 销: 各地新华书店

印 刷: 北京鑫丰华彩印有限公司

开 本: 787 mm×1 092 mm 1/16

印 张: 18

字 数: 443 千字

版 次: 2015 年 5 月第 1 版 2015 年 5 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-4313-7

定 价: 36.00 元

· 如有印装质量问题,请与北京邮电大学出版社发行部联系 ·

第 2 版前言

本书是在《高等数学(上)》(ISBN 978-7-5635-2018-3 北京邮电大学出版社, 2009 年出版)的基础上, 参照新修订的工科类本科数学基础课程教学基本要求, 结合应用型教学的改革实践修订而成的.

本次修订的主要指导思想是: 在满足工科类本科数学基础课程教学基本要求的前提下, 降低对理论推导的要求, 注重基本知识的掌握和基本能力的培养. 主要的修订工作包括:

1. 修订了第 1 版中的错误;
2. 删减了部分烦琐的例题和习题;
3. 加工润色了部分文字, 使内容更容易阅读和理解.

参加本次修订工作的有: 杨硕、汪彩云、向文、蒋卫等. 衷心感谢北京邮电大学世纪学院基础部的领导和同仁, 感谢数理教研室的其他老师提出了宝贵的意见.

由于编者水平有限, 书中难免存在不妥之处, 敬请广大专家、同行和读者不吝赐教.

作 者

目 录

第 8 章 空间解析几何与向量代数	1
8.1 向量及其线性运算	1
8.1.1 向量概念	1
8.1.2 向量的线性运算	2
习题 8.1	5
8.2 空间直角坐标系及向量的坐标	5
8.2.1 空间直角坐标系的建立	5
8.2.2 向量的坐标	6
8.2.3 用向量起点和终点的坐标表示向量	7
8.2.4 向量的模、方向余弦的坐标表示	9
8.2.5 向量在轴上的投影	11
习题 8.2	12
8.3 数量积与向量积	13
8.3.1 两向量的数量积	13
8.3.2 两向量的向量积	15
习题 8.3	18
8.4 曲面及其方程	19
8.4.1 曲面方程的概念	19
8.4.2 旋转曲面	20
8.4.3 柱面	23
8.4.4 二次曲面	24
习题 8.4	26
8.5 空间曲线及其方程	27
8.5.1 空间曲线的一般方程	27
8.5.2 空间曲线的参数方程	28
8.5.3 空间曲线在坐标面上的投影	29
习题 8.5	32
8.6 平面及其方程	32
8.6.1 平面的点法式方程	32
8.6.2 平面的一般方程	34

8.6.3 平面的截距式方程	35
8.6.4 两平面的夹角	36
8.6.5 点到平面的距离公式	37
习题 8.6	38
8.7 空间直线及其方程	39
8.7.1 空间直线方程	39
8.7.2 两直线的夹角	42
8.7.3 直线与平面的夹角	43
习题 8.7	43
8.8 本章小结	44
8.8.1 内容提要	44
8.8.2 基本要求	47
综合练习题	48
第9章 多元函数的微分法及其应用	51
9.1 多元函数及其极限与连续的概念	51
9.1.1 多元函数的定义	51
9.1.2 二元函数的几何意义	53
9.1.3 平面点集	53
9.1.4 二元函数的极限	55
9.1.5 二元函数的连续性	57
9.1.6 有界闭区域上二元连续函数的重要性质	58
习题 9.1	59
9.2 多元函数的偏导数	60
9.2.1 偏导数的概念与计算	60
9.2.2 二元函数偏导数的几何意义	63
9.2.3 二元函数连续与偏导存在的关系	64
9.2.4 高阶偏导数	65
习题 9.2	67
9.3 多元函数的复合函数求导法	68
习题 9.3	72
9.4 多元函数的全微分及其应用	73
9.4.1 全微分的概念	73
9.4.2 函数可微与连续及偏导存在的关系	74
9.4.3 全微分的运算性质	76
习题 9.4	77
9.5 隐函数及其微分法	77
习题 9.5	81
9.6 偏导数的几何应用	82

9.6.1 空间曲线的切线及法平面	82
9.6.2 曲面的切平面及法线	84
9.6.3 函数全微分的几何意义	86
习题 9.6	87
9.7 多元函数的极值及其求法	87
9.7.1 二元函数的极值	87
9.7.2 多元函数的最大值、最小值问题	89
9.7.3 条件极值	91
习题 9.7	94
9.8 方向导数和梯度	95
9.8.1 方向导数	95
9.8.2 函数的梯度	99
习题 9.8	100
9.9 本章小结	101
9.9.1 内容提要	101
9.9.2 基本要求	104
综合练习题	105
第 10 章 重积分	108
10.1 二重积分的概念和性质	108
10.1.1 引例	108
10.1.2 二重积分的定义	110
10.1.3 二重积分的性质	112
习题 10.1	113
10.2 二重积分的计算及其几何应用	113
10.2.1 在直角坐标系下计算二重积分	114
10.2.2 利用极坐标计算二重积分	119
10.2.3 二重积分的几何应用	123
习题 10.2	126
10.3 三重积分的概念及其算法	128
10.3.1 引例和定义	128
10.3.2 在直角坐标系下计算三重积分	129
10.3.3 在柱面坐标下计算三重积分	132
* 10.3.4 在球面坐标中计算三重积分	134
习题 10.3	136
10.4 本章小结	137
10.4.1 内容提要	137
10.4.2 基本要求	141
综合练习题	142

第11章 曲线积分和曲面积分	145
11.1 对弧长的曲线积分	145
11.1.1 对弧长的曲线积分的概念和性质	145
11.1.2 对弧长的曲线积分的计算法	147
习题 11.1	148
11.2 对坐标的曲线积分	149
11.2.1 对坐标的曲线积分的概念和性质	149
11.2.2 对坐标的曲线积分的计算法	152
11.2.3 两类曲线积分的关系	154
习题 11.2	155
11.3 格林公式及其应用	156
11.3.1 格林(Green)公式	156
11.3.2 积分与路径无关的条件及全微分求积	160
习题 11.3	163
11.4 对面积的曲面积分	164
11.4.1 对面积的曲面积分的概念和性质	164
11.4.2 对面积的曲面积分的计算法	165
习题 11.4	167
11.5 对坐标的曲面积分	167
11.5.1 对坐标的曲面积分的概念和性质	167
11.5.2 对坐标的曲面积分的计算法	170
11.5.3 两类曲面积分的关系	173
习题 11.5	174
11.6 高斯公式、通量和散度	175
11.6.1 高斯(Gauss)公式	175
* 11.6.2 沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件	177
* 11.6.3 通量与散度	178
习题 11.6	180
* 11.7 斯托克斯公式、环流量和旋度	180
11.7.1 斯托克斯(Stokes)公式	180
11.7.2 空间曲线积分与路径无关的条件	181
11.7.3 环流量与旋度	182
* 习题 11.7	184
11.8 本章小结	185
11.8.1 内容提要	185
11.8.2 基本要求	191
综合练习题	191

第 12 章 无穷级数	195
12.1 常数项级数的概念和性质	195
12.1.1 常数项级数的概念	195
12.1.2 收敛级数的基本性质	198
习题 12.1	201
12.2 常数项级数的审敛法	202
12.2.1 正项级数及其审敛法	202
12.2.2 交错级数及其审敛法	209
12.2.3 绝对收敛与条件收敛	211
习题 12.2	212
12.3 幂级数	213
12.3.1 函数项级数的概念	213
12.3.2 幂级数及其收敛性	214
12.3.3 幂级数的性质	218
习题 12.3	221
12.4 函数展开成幂级数	221
12.4.1 泰勒级数	221
12.4.2 函数展开成幂级数	223
习题 12.4	229
* 12.5 函数的幂级数展开式的应用	230
12.5.1 近似计算	230
12.5.2 欧拉公式	232
* 习题 12.5	234
12.6 傅里叶级数	234
12.6.1 三角级数	235
12.6.2 三角函数系及其正交性	236
12.6.3 将周期为 2π 的周期函数展成傅里叶级数	237
* 12.6.4 将定义在 $[-\pi, \pi]$ 上及定义在 $[0, \pi]$ 上的函数展成傅里叶级数	242
* 12.6.5 将一般周期函数展成傅里叶级数	244
习题 12.6	248
12.7 本章小结	249
12.7.1 内容提要	249
12.7.2 基本要求	253
综合练习题	253
部分习题参考答案	257

第 8 章 空间解析几何与向量代数

解析几何的基本思想是用代数的方法来研究几何. 在平面解析几何中, 通过坐标法把平面上的点与一对有次序的数对应起来, 把平面上的图形和方程对应起来, 从而可以用代数方法来研究几何问题. 空间解析几何也是按照类似的方法建立起来的.

正如平面解析几何的知识对学习一元函数微积分是不可缺少的一样, 空间解析几何的知识对学习多元函数微积分也是必要的.

为了把代数运算引到几何中来, 最根本的做法就是设法把空间的几何结构有系统地代数化、数量化. 因此在这里我们首先在空间引进向量以及它的线性运算, 并通过向量来建立空间坐标系, 然后利用坐标讨论向量的运算, 并介绍空间解析几何的有关内容.

8.1 向量及其线性运算

8.1.1 向量概念

在力学、物理学以及日常生活中, 我们经常遇到许多的量, 例如温度、时间、质量、密度、功、长度、面积与体积等, 这些量在规定的单位下, 都可以由一个数来完全确定, 这种只有大小的量称作数量. 另外还有一些量, 例如位移、力、速度、加速度等, 它们不但有大小, 而且还有方向, 称这种既有大小又有方向的量为向量(又称矢量).

我们用有向线段来表示向量, 有向线段的起点与终点分别称作向量的起点与终点, 有向线段的方向表示向量的方向, 而有向线段的长度代表向量的大小. 起点是 A , 终点是 B 的向量记作 $\overrightarrow{AB}$, 有时用黑体字母表示, 如 $\mathbf{a}$. (图 8.1)

向量的大小称作向量的模, 也称向量的长度. 向量 $\overrightarrow{AB}$ 或 $\mathbf{a}$ 的模分别记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\mathbf{a}|$.

模等于 1 的向量称作单位向量. 与向量 $\mathbf{a}$ 具有同一方向的单位向量称作向量 $\mathbf{a}$ 的单位向量, 常用 $\mathbf{e}_a$ 来表示.

模等于 0 的向量称作零向量, 记作 $\mathbf{0}$. 它是起点和终点重合的向量, 零向量的方向可以看作是任意的.

如果两个向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的模相等且方向相同, 那么称向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 相等. 记作 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

需要注意的是, 两个向量是否相等与它们的起点无关, 只由它们的模和方向决定, 我们以后运用的正是这种起点可以任意选取, 而只由模和方向决定的向量, 这样的向量通常称作自由向量. 也就是说, 向量可以任意平行移动, 移动后的向量仍然代表原来的向量.

与向量 a 的模相等,方向相反的向量为 a 的负向量,记作 $-a$.

如图 8.2 所示,作 $OA=a, OB=b$,规定不超过 π 的 $\angle AOB$ 称为向量 a 与 b 的夹角,记为 $(\widehat{a,b})$ 或 $(\widehat{b,a})$,即

$$(\widehat{a,b}) = \varphi (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

当 $(\widehat{a,b}) = 0$ 或 π 时,则称向量 a 与 b 平行,记作 $a \parallel b$.

当 $(\widehat{a,b}) = \frac{\pi}{2}$ 时,则称向量 a 与 b 垂直,记作 $a \perp b$.

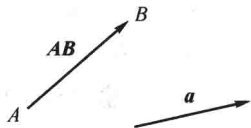


图 8.1

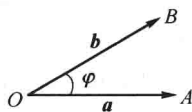


图 8.2

8.1.2 向量的线性运算

1. 向量的加法

物理学中的力与位移都是向量. 作用于一点的两个不共线的力的合力,可以用“平行四边形法则”求出. 如图 8.3 所示的两个力 AB, AD 的合力,就是以 AB, AD 为邻边的平行四边形 $ABCD$ 的对角线向量 AC . 两个位移的合成也可以用“三角形法则”求出,如图 8.4 所示,连续两次位移 AB 与 BC 的结果,相当于位移 AC .

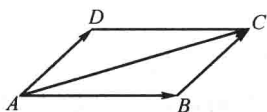


图 8.3

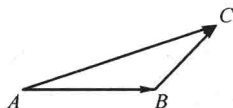


图 8.4

抽出物理意义,我们规定向量的加法运算如下:

设有两个向量 a 与 b ,任取一点 A 为起点作向量 $AB=a$,再以 B 为起点作向量 $BC=b$,连接 AC (图 8.5),那么向量 $AC=c$ 称为向量 a 与 b 的和,记作 $a+b$,即 $c=a+b$. 这种作出两向量之和的方法称作向量相加的三角形法则.

我们也有向量相加的平行四边形法则:

当向量 a 与 b 不平行时,作向量 $AB=a, AD=b$,以 AB, AD 为边作平行四边形 $ABCD$,连接对角线 AC (图 8.6),向量 AC 即为向量 a 与 b 的和,记作 $a+b$.

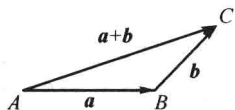


图 8.5

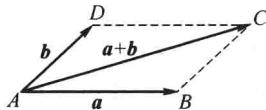


图 8.6

不难证明,向量的加法符合下列运算规律:

(1) 交换律

$$a+b=b+a$$

(2) 结合律

$$(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c$$

由于向量的加法满足交换律与结合律,所以三向量 a, b, c 相加,不论它们的先后顺序与结合顺序如何,它们的和总是相同的,因此都可以简单地写成

$$a+b+c$$

推广到任意有限个向量 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的和,就可以写成

$$a_1+a_2+\dots+a_n$$

有限个向量 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 相加的作图法,可以由向量的三角形求和法则推广如下:第一个向量的终点作为第二个向量的起点,相继作向量 $a_1, a_2, \dots, a_n$,再以第一个向量的起点为起点,最后一个向量的终点为终点作向量,这个向量即为所求的和.

以5个向量 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 相加为例作图(图8.7):作向量 $OA_1 = a_1, A_1A_2 = a_2, A_2A_3 = a_3, A_3A_4 = a_4, A_4A_5 = a_5$,则有

$$OA_5 = s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

特别地,当 A_5 与 O 重合时,它们的和为零向量 0 .

这种求和的方法称作多边形法则.

2. 向量的减法

前面我们已经定义了向量 a 的负向量 $-a$,由此我们给出向量减法的规定.

设有向量 a 和 b ,规定向量 b 与 $-a$ 的和为向量 b 与 a 的差,记为 $b-a$,即

$$b-a=b+(-a)$$

特别地,当 $b=a$ 时,有

$$a-a=a+(-a)=0$$

根据向量加法的三角形法则,如图8.8所示,作向量 $OA=a, OB=b, BC=-a$,则

$$b-a=b+(-a)=OC=AB$$

由此得到向量减法的三角形法则,如图8.9所示,作向量 $OA=a, OB=b$,则 $AB=b-a$.

如果以 OA, OB 为一对邻边构成平行四边形 $OACB$,那么显然它的一条对角线向量 $OC=a+b$,而另一条对角线向量 $AB=b-a$ (图8.10).

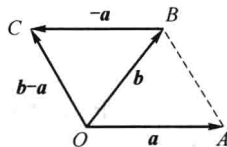


图 8.8

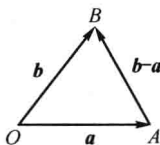


图 8.9

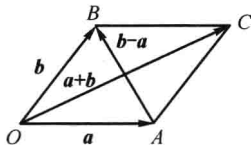


图 8.10

由三角形两边之和大于第三边的原理,对于任何两个向量 a 与 b ,有下列不等式

$$|a+b| \leq |a| + |b| \quad \text{和} \quad |a-b| \leq |a| + |b|$$

其中等号分别在 a 与 b 同向和反向时成立.

【例 8.1.1】 在平行六面体中(图 8.11), 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}, \overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$, 试用向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 来表示对角线向量 $\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{A_1C}$.

解:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC_1} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} \\ &= \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$$

或者

$$\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AA_1} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{AA_1} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$$

【例 8.1.2】 用向量方法证明: 对角线互相平分的四边形是平行四边形.

证明: 设四边形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 交于 O 点且互相平分(图 8.12), 由图可以看出

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DC}$$

因此, $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$ 且 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$, 即四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

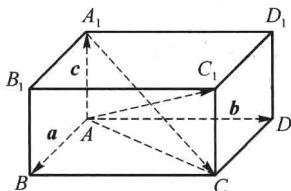


图 8.11

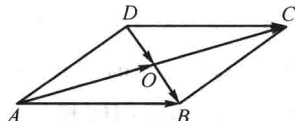


图 8.12

3. 向量与数的乘法

我们规定: 实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量, 记作 $\lambda\boldsymbol{a}$, 它的模

$$|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda| |\boldsymbol{a}|$$

当 $\lambda > 0$ 时, $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向; 当 $\lambda < 0$ 时, $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向; 当 $\lambda = 0$ 时, $|\lambda\boldsymbol{a}| = 0$, 即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量.

对于非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与其单位向量 $\boldsymbol{e}_a$, 显然下面的等式成立

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \boldsymbol{e}_a \quad \text{或} \quad \boldsymbol{e}_a = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$$

由此可知, 一个非零向量除以它的模便是它的单位向量.

不难证明, 向量与数的乘积符合下列运算规律:

(1) 结合律

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = \mu(\lambda\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$$

(2) 分配律

$$(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$$

$$\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$$

这里 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为向量, λ, μ 为任意实数.

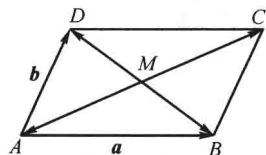


图 8.13

【例 8.1.3】 在平行四边形 $ABCD$ 中, 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$, 这里 M 是平行四边形对角线的交点(图 8.13).

解: 由于平行四边形的对角线互相平分, 所以

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$$

$$-(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = 2\overrightarrow{MA}$$

即

于是

$$\mathbf{MA} = -\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

因为 $\mathbf{MC} = -\mathbf{MA}$, 所以 $\mathbf{MC} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$. 又因 $-\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{BD} = 2\mathbf{MD}$, 所以 $\mathbf{MD} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$. 由于 $\mathbf{MB} = -\mathbf{MD}$, 所以 $\mathbf{MB} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$.

由于向量 $\lambda\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}$ 平行, 因此我们常用向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系. 即有

定理 8.1.1 设向量 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, 那么, 向量 $\mathbf{b}$ 平行于向量 $\mathbf{a}$ 的充分必要条件是: 存在唯一的实数 λ , 使 $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$. 即

$$\mathbf{a} // \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{b} = \lambda\mathbf{a} \quad (\lambda \text{ 为唯一实数})$$

证明: 先证必要性. 设 $\mathbf{a} // \mathbf{b}$, 取 $\lambda = \pm \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$, 则有 $|\lambda| = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$, $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 同向时 λ 取正号, 反向时 λ 取负号, 则 $\mathbf{b}$ 与 $\lambda\mathbf{a}$ 同向, 且 $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda||\mathbf{a}| = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, 故

$$\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$$

数 λ 的唯一性: 假设又有 $\mathbf{b} = \mu\mathbf{a}$, 则 $(\lambda - \mu)\mathbf{a} = \mathbf{0}$, 从而有 $|\lambda - \mu||\mathbf{a}| = 0$, 而 $|\mathbf{a}| \neq 0$, 故 $|\lambda - \mu| = 0$, 即 $\lambda = \mu$.

再证充分性: 已知 $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$, 则

$$\left. \begin{array}{l} \text{当 } \lambda = 0 \text{ 时, } \mathbf{b} = \mathbf{0} \\ \text{当 } \lambda > 0 \text{ 时, } \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ 同向} \\ \text{当 } \lambda < 0 \text{ 时, } \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ 反向} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{a} // \mathbf{b}$$

习题 8.1

1. 设 $\mathbf{u} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - \mathbf{c}$. 试用 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 表示 $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$.
2. 把三角形 ABC 的 BC 边五等分, 并把分点 D_1, D_2, D_3, D_4 各与点 A 连接. 试以 $\mathbf{AB} = \mathbf{c}$, $\mathbf{BC} = \mathbf{a}$ 表示向量 $\mathbf{D}_1\mathbf{A}, \mathbf{D}_2\mathbf{A}, \mathbf{D}_3\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{D}_4\mathbf{A}$.
3. 证明三角形两边中点的连线平行且等于第三边的一半.

8.2 空间直角坐标系及向量的坐标

8.2.1 空间直角坐标系的建立

在空间取定一点 O , 过点 O 作三条互相垂直的直线 Ox, Oy, Oz , 并按右手规则规定 Ox, Oy, Oz 的正方向, 即将右手伸直, 拇指朝上为 Oz 的正方向, 其余四指的指向为 Ox 的正方向, 四指弯曲 90° 后的指向为 Oy 的正方向, 如图 8.14 所示. O 称为坐标原点, Ox, Oy, Oz 依

次称为 x 轴(横轴)、 y 轴(纵轴)、 z 轴(竖轴),它们构成一个空间直角坐标系. x 轴、 y 轴、 z 轴上的单位向量分别用 i, j, k 来表示(图 8.15).

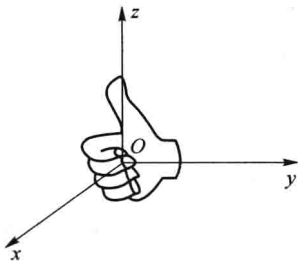


图 8.14

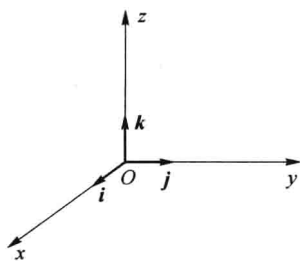


图 8.15

每两条坐标轴所决定的平面称作坐标面,按照坐标面所包含的坐标轴,分别称作 xOy 面, yOz 面, zOx 面. 三个坐标面把空间分成八个部分,称为八个卦限. 含有 x 轴、 y 轴与 z 轴正半轴的那个卦限称作第一卦限,在 xOy 面上方,从第一卦限开始按逆时针方向分别是第二、第三、第四卦限. 在 xOy 面下方,第一卦限之下是第五卦限,从第五卦限开始同样按逆时针方向分别是第六、第七、第八卦限,这八个卦限分别用序号 I、II、III、IV、V、VI、VII、VIII 表示(图 8.16).

在空间直角坐标系下,空间任意一点 M 与有序数组 (x, y, z) 一一对应, (x, y, z) 称为点 M 的坐标,记为 $M(x, y, z)$. 显然在坐标面上的点的坐标有一个为零. 例如 xOy 面上的点的坐标中 $z=0$. 在坐标轴上的点的坐标中有两个为零,例如 x 轴上的点的坐标中 $y=z=0$. 原点的坐标为 $(0, 0, 0)$,如图 8.17 所示.

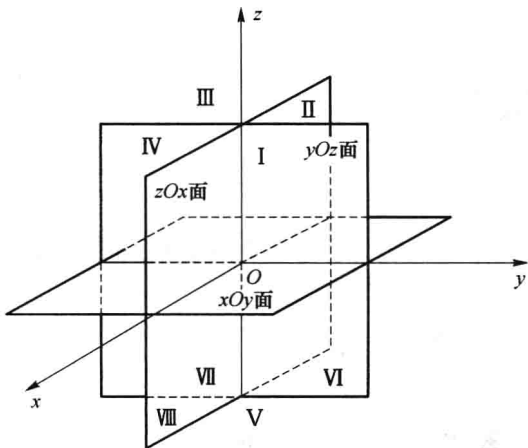


图 8.16

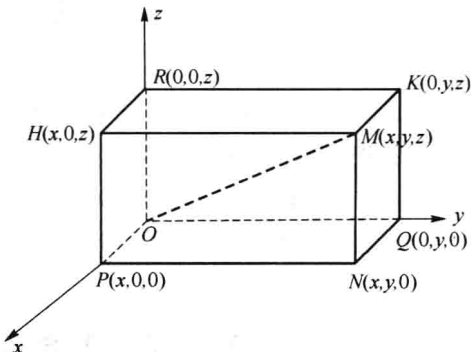


图 8.17

8.2.2 向量的坐标

任给向量 r ,对应有点 M ,使 $OM=r$. 这里向量 $OM=r$ 称为点 M 关于原点 O 的向径. 在空间直角坐标系中,以 i, j, k 分别表示 x, y, z 轴上的单位向量,设点 M 的坐标为 $M(x, y, z)$,如图 8.18 所示,则有

$$r = OM = OP + PN + NM = OP + OQ + OR$$

又由

$$OP = xi, OQ = yj, OR = zk$$

因此

$$r = OM = xi + yj + zk$$

此式称为向量 r 的坐标分解式, xi, yj, zk 称为向量 r 沿三个坐标轴方向的分向量. 向量 r 也可表示成 $r = xi + yj + zk = \{x, y, z\}$, 这里 $r = \{x, y, z\}$ 称为向量 r 的坐标表示式. x, y, z 分别称为向量 r 在 x 轴, y 轴, z 轴上的投影, 也称 x, y, z 为向量 r 的坐标.

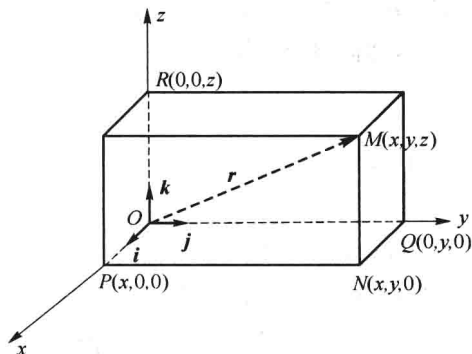


图 8.18

8.2.3 用向量起点和终点的坐标表示向量

1. 用向量起点和终点的坐标表示向量

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 则向量

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

证明: 由图 8.19 知,

$$\overrightarrow{OM_1} = x_1i + y_1j + z_1k$$

$$\overrightarrow{OM_2} = x_2i + y_2j + z_2k$$

由向量的减法运算得

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1M_2} &= \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} \\ &= (x_2i + y_2j + z_2k) - (x_1i + y_1j + z_1k) \\ &= (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k \\ &= \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\} \end{aligned}$$

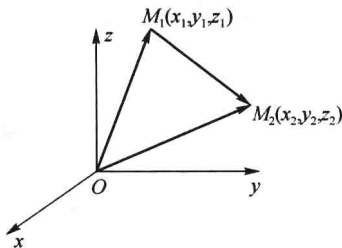


图 8.19

2. 利用坐标作向量的线性运算

两向量和的分量等于两向量对应分量的和.

设 $a = \{a_x, a_y, a_z\}$, $b = \{b_x, b_y, b_z\}$, 则有

$$a + b = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\}$$

证明: 因为

$$a = a_xi + a_yj + a_zk, b = b_xi + b_yj + b_zk$$

那么

$$\begin{aligned} a + b &= (a_xi + a_yj + a_zk) + (b_xi + b_yj + b_zk) \\ &= (a_x + b_x)i + (a_y + b_y)j + (a_z + b_z)k \end{aligned}$$

所以

$$a + b = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\}$$

同理,两向量差的分量等于两向量对应分量的差,即

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\{a_x-b_x, a_y-b_y, a_z-b_z\}$$

数乘向量等于这个数与向量的每个分量相乘,即

$$\lambda \mathbf{a}=\{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}(\lambda \text{ 为实数})$$

平行向量对应坐标成比例.

当 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ 时, $\mathbf{b} \parallel \mathbf{a} \Leftrightarrow \mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$, 坐标表示式为

$$\{b_x, b_y, b_z\} = \lambda \{a_x, a_y, a_z\} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$$

从而有 $b_x = \lambda a_x, b_y = \lambda a_y, b_z = \lambda a_z$, 即向量 $\mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ 与 $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ 平行等价于

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}$$

【例 8.2.1】 已知四点 $A(1, -2, 3), B(4, -4, -3), C(2, 4, 3)$ 和 $D(8, 6, 6)$, 求 $2\mathbf{AB} - 3\mathbf{CD} + 4\mathbf{CA}$.

解: 因为

$$\mathbf{AB} = \{4-1, -4-(-2), -3-3\} = \{3, -2, -6\}$$

$$\mathbf{CD} = \{8-2, 6-4, 6-3\} = \{6, 2, 3\}$$

$$\mathbf{CA} = \{1-2, -2-4, 3-3\} = \{-1, -6, 0\}$$

所以

$$\begin{aligned} 2\mathbf{AB} - 3\mathbf{CD} + 4\mathbf{CA} &= 2\{3, -2, -6\} - 3\{6, 2, 3\} + 4\{-1, -6, 0\} \\ &= \{6, -4, -12\} - \{18, 6, 9\} + \{-4, -24, 0\} \\ &= \{-16, -34, -21\} \end{aligned}$$

【例 8.2.2】 已知两点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$ 以及实数 $\lambda \neq -1$, 在直线 AB 上求点 M , 使 $\mathbf{AM} = \lambda \mathbf{MB}$.

解: 设 M 的坐标为 (x, y, z) , 如图 8.20 所示.

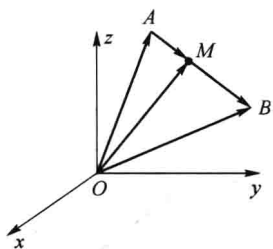


图 8.20

由于

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{AM} &= \lambda \mathbf{MB} \\ \mathbf{AM} &= \mathbf{OM} - \mathbf{OA} \\ \mathbf{MB} &= \mathbf{OB} - \mathbf{OM} \end{aligned} \right\}$$

因此

$$\mathbf{OM} - \mathbf{OA} = \lambda(\mathbf{OB} - \mathbf{OM})$$

从而

$$\mathbf{OM} = \frac{1}{1+\lambda}(\mathbf{OA} + \lambda \mathbf{OB})$$

即

$$\{x, y, z\} = \frac{1}{1+\lambda}\{x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2\}$$

所以 M 点的坐标为 $(x, y, z) = \left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \right)$.

说明: 由例 8.2.2 求得的 M 点的坐标 $(x, y, z) = \left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \right)$ 可得线段的定比分点坐标公式.

设线段 AB 两个端点的坐标分别为 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$, 那么分线段 AB 成定比 $\lambda (\lambda \neq -1)$ 的分点 M 的坐标是

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$$

当 $\lambda = 1$ 时, 点 M 为 AB 的中点, 于是得中点公式:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$