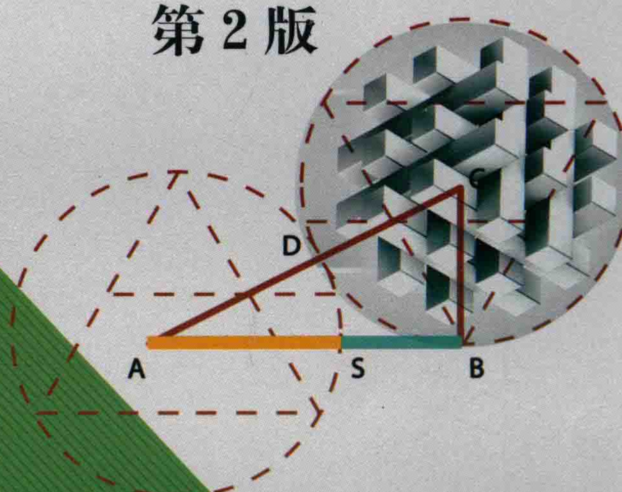
GAODENG SHUXUE

北京邮电大学世纪学院数理教研室　编

高等数学（下）

第2版



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

“2014年度民办教育发展促进项目—重点特点专业建设、北京邮电大学世纪学院数学课程改革与实践”资助项目

高等数学(下)

(第2版)

北京邮电大学世纪学院数理教研室　编
本册主编　杨　硕

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内 容 简 介

本书是普通高等学校基础课程类应用型规划教材，体现了高等数学课程的特色及应用型高校的教学特点，以教育部非数学专业数学基础课教学指导分委员会制定的新的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”为依据，按照既要继承优秀传统，又要改革创新、适应新形势的精神，突出高等数学严谨的知识体系，保持经典教材的优点，又考虑到学生的学习状况和接受程度。在力求保持数学体系完整与严谨的基础上，优化内容，论述深入浅出，通俗易懂。

本书共十二章，分上、下两册，下册包括：空间解析几何与向量代数、多元函数的微分法及其应用、重积分、曲线积分和曲面积分、无穷级数。书末附有习题和综合练习题及参考答案。

本书具有结构严谨、逻辑清晰、重视问题的引入、强调理论的应用、文字流畅、叙述详尽、例题和习题丰富、便于自学等优点，可供普通高等学校和独立学院工科各专业的学生选用。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下 / 北京邮电大学世纪学院数理教研室编．--2 版．-- 北京 ：北京邮电大学出版社，2015.5
ISBN 978-7-5635-4313-7

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①北…　Ⅲ．①高等数学－高等学校－教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 071291 号

书　　名：高等数学（下）
著作责任者：北京邮电大学世纪学院数理教研室　编
责 任 编 辑：满志文
出 版 发 行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号（邮编：100876）
发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京鑫丰华彩印有限公司
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张：18
字　　数：443 千字
版　　次：2015 年 5 月第 1 版　2015 年 5 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-4313-7　　定　价：36.00 元

· 如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社发行部联系 ·

第 2 版前言

本书是在《高等数学(上)》(ISBN 978-7-5635-2018-3 北京邮电大学出版社,2009 年出版)的基础上,参照新修订的工科类本科数学基础课程教学基本要求,结合应用型教学的改革实践修订而成的.

本次修订的主要指导思想是:在满足工科类本科数学基础课程教学基本要求的前提下,降低对理论推导的要求,注重基本知识的掌握和基本能力的培养. 主要的修订工作包括:

1. 修订了第 1 版中的错误;
2. 删减了部分烦琐的例题和习题;
3. 加工润色了部分文字,使内容更容易阅读和理解.

参加本次修订工作的有:杨硕、汪彩云、向文、蒋卫等. 衷心感谢北京邮电大学世纪学院基础部的领导和同仁,感谢数理教研室的其他老师提出了宝贵的意见.

由于编者水平有限,书中难免存在不妥之处,敬请广大专家、同行和读者不吝赐教.

作　者

目　　录

第 8 章　空间解析几何与向量代数

解析几何的基本思想是用代数的方法来研究几何. 在平面解析几何中，通过坐标法把平面上的点与一对有次序的数对应起来，把平面上的图形和方程对应起来，从而可以用代数方法来研究几何问题. 空间解析几何也是按照类似的方法建立起来的.

正如平面解析几何的知识对学习一元函数微积分是不可缺少的一样，空间解析几何的知识对学习多元函数微积分也是必要的.

为了把代数运算引到几何中来，最根本的做法就是设法把空间的几何结构有系统地代数化、数量化. 因此在这里我们首先在空间引进向量以及它的线性运算，并通过向量来建立空间坐标系，然后利用坐标讨论向量的运算，并介绍空间解析几何的有关内容.

8.1　向量及其线性运算

8.1.1　向量概念

在力学、物理学以及日常生活中，我们经常遇到许多的量，例如温度、时间、质量、密度、功、长度、面积与体积等，这些量在规定的单位下，都可以由一个数来完全确定，这种**只有大小的量称作数量**. 另外还有一些量，例如位移、力、速度、加速度等，它们不但有大小，而且还有方向，称这种**既有大小又有方向的量为向量**（又称**矢量**）.

我们用有向线段来表示向量，有向线段的起点与终点分别称作向量的起点与终点，有向线段的方向表示向量的方向，而有向线段的长度代表向量的大小. 起点是 A，终点是 B 的向量记作$\boldsymbol{AB}$，有时用黑体字母表示，如 $\boldsymbol{a}$.（图 8.1）

向量的大小称作向量的模，也称向量的长度. 向量$\boldsymbol{AB}$或 $\boldsymbol{a}$ 的模分别记作$|\boldsymbol{AB}|$或$|\boldsymbol{a}|$.

模等于 1 的向量称作单位向量. 与向量 $\boldsymbol{a}$ 具有同一方向的单位向量称作向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量，常用 $\boldsymbol{e}_a$ 来表示.

模等于 0 的向量称作零向量，记作 $\boldsymbol{0}$. 它是起点和终点重合的向量，零向量的方向可以看作是任意的.

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模相等且方向相同，那么称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等. 记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

需要注意的是，两个向量是否相等与它们的起点无关，只由它们的模和方向决定，我们以后运用的正是这种起点可以任意选取，而只由模和方向决定的向量，这样的向量通常称作**自由向量**. 也就是说，向量可以任意平行移动，移动后的向量仍然代表原来的向量.

与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等，方向相反的向量为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$.

如图 8.2 所示，作 $\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{OB}=\boldsymbol{b}$，规定不超过 π 的 $\angle AOB$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记为 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$，即

$$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$$

当 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$ 或 π 时，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

当 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{2}$ 时，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

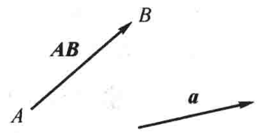


图 8.1

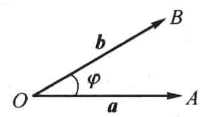


图 8.2

8.1.2 向量的线性运算

1. 向量的加法

物理学中的力与位移都是向量. 作用于一点的两个不共线的力的合力，可以用“平行四边形法则”求出. 如图 8.3 所示的两个力 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{AD}$ 的合力，就是以 AB，AD 为邻边的平行四边形 $ABCD$ 的对角线向量 $\boldsymbol{AC}$. 两个位移的合成也可以用“三角形法则”求出，如图 8.4 所示，连续两次位移 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BC}$ 的结果，相当于位移 $\boldsymbol{AC}$.

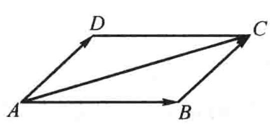


图 8.3

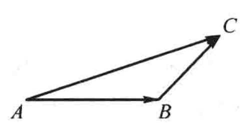


图 8.4

抽出物理意义，我们规定向量的加法运算如下：

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A 为起点作向量 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为起点作向量 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 AC(图 8.5)，那么向量 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这种作出两向量之和的方法称作向量相加的**三角形法则**.

我们也有向量相加的**平行四边形法则**：

当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时，作向量 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{AD}=\boldsymbol{b}$，以 AB，AD 为边作平行四边形 $ABCD$，连接对角线 AC(图 8.6)，向量 $\boldsymbol{AC}$ 即为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

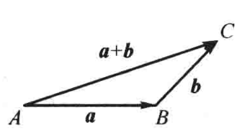


图 8.5

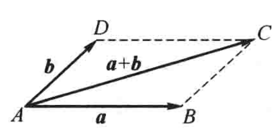


图 8.6

不难证明，向量的加法符合下列运算规律：

(1) 交换律　　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

(2) 结合律　　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

由于向量的加法满足交换律与结合律，所以三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 相加，不论它们的先后顺序与结合顺序如何，它们的和总是相同的，因此都可以简单地写成

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$$

推广到任意有限个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的和，就可以写成

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$$

有限个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 相加的作图法，可以由向量的三角形求和法则推广如下：第一个向量的终点作为第二个向量的起点，相继作向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，再以第一个向量的起点为起点，最后一个向量的终点为终点作向量，这个向量即为所求的和. 以 5 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_5$ 相加为例作图(图 8.7)：作向量 $\boldsymbol{OA}_1=\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3=\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4=\boldsymbol{a}_4$，$\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{A}_5=\boldsymbol{a}_5$，则有

$$\boldsymbol{OA}_5=\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5$$

特别地，当 A_5 与 O 重合时，它们的和为零向量 $\boldsymbol{0}$.

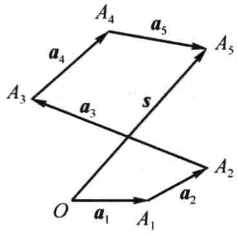


图 8.7

这种求和的方法称作**多边形法则**.

2. 向量的减法

前面我们已经定义了向量 $\boldsymbol{a}$ 的负向量 $-\boldsymbol{a}$，由此我们给出向量减法的规定.

设有向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，规定向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $-\boldsymbol{a}$ 的和为向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差，记为 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，即

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$$

特别地，当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时，有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$$

根据向量加法的三角形法则，如图 8.8 所示，作向量 $\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{OB}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{BC}=-\boldsymbol{a}$，则

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{OC}=\boldsymbol{AB}$$

由此得到向量减法的三角形法则，如图 8.9 所示，作向量 $\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

如果以 OA，OB 为一对邻边构成平行四边形 $OACB$，那么显然它的一条对角线向量 $\boldsymbol{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，而另一条对角线向量 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$(图 8.10).

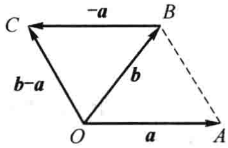


图 8.8

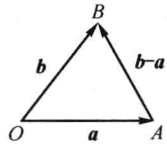


图 8.9

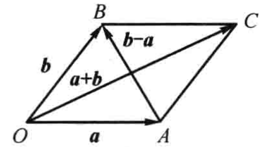


图 8.10

由三角形两边之和大于第三边的原理，对于任何两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，有下列不等式

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \quad 和 \quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$

其中等号分别在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向和反向时成立.

【例 8.1.1】 在平行六面体中(图 8.11),设$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{AD}=\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{AA_1}=\boldsymbol{c}$,试用向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 来表示对角线向量$\boldsymbol{AC_1}$,$\boldsymbol{A_1C}$.

解:
$$\boldsymbol{AC_1}=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BC}+\boldsymbol{CC_1}=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AD}+\boldsymbol{AA_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$$
$$\boldsymbol{A_1C}=\boldsymbol{A_1A}+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BC}=-\boldsymbol{AA_1}+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AD}=-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$$
或者
$$\boldsymbol{A_1C}=\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{AA_1}=(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AD})-\boldsymbol{AA_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$$

【例 8.1.2】 用向量方法证明:对角线互相平分的四边形是平行四边形.

证明:设四边形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 交于 O 点且互相平分(图 8.12),由图可以看出
$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AO}+\boldsymbol{OB}=\boldsymbol{OB}+\boldsymbol{AO}=\boldsymbol{DO}+\boldsymbol{OC}=\boldsymbol{DC}$$
因此,$\boldsymbol{AB}\parallel\boldsymbol{DC}$且$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{DC}|$,即四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

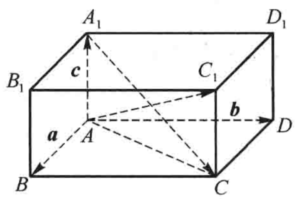


图 8.11

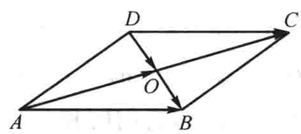


图 8.12

3. 向量与数的乘法

我们规定:实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量,记作 $\lambda\boldsymbol{a}$,它的模
$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$$
当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向;当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向;当 $\lambda=0$ 时,$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$,即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量.

对于非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与其单位向量 $\boldsymbol{e}_a$,显然下面的等式成立
$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a \quad 或 \quad \boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$$
由此可知,一个非零向量除以它的模便是它的单位向量.

不难证明,向量与数的乘积符合下列运算规律:

(1) 结合律 $\qquad \lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$

(2) 分配律 $\qquad (\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$
$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$$
这里 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为向量,λ,μ 为任意实数.

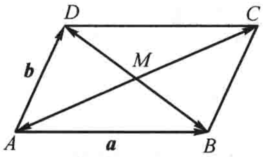


图 8.13

【例 8.1.3】 在平行四边形 $ABCD$ 中,设$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{AD}=\boldsymbol{b}$.试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量$\boldsymbol{MA}$,$\boldsymbol{MB}$,$\boldsymbol{MC}$和$\boldsymbol{MD}$,这里 M 是平行四边形对角线的交点(图 8.13).

解:由于平行四边形的对角线互相平分,所以
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AC}=2\boldsymbol{AM}$$
即
$$-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{MA}$$

于是
$$\boldsymbol{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

因为$\boldsymbol{MC}=-\boldsymbol{MA}$,所以 $\boldsymbol{MC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$. 又因$-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{BD}=2\,\boldsymbol{MD}$,所以 $\boldsymbol{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$. 由于$\boldsymbol{MB}=-\boldsymbol{MD}$,所以 $\boldsymbol{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

由于向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行,因此我们常用向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系. 即有

定理 8.1.1　设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,那么,向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是:存在唯一的实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 即
$$\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}\ (\lambda\text{ 为唯一实数})$$

证明:先证必要性. 设 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,取 $\lambda=\pm\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$,则有 $|\lambda|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时 λ 取正号,反向时 λ 取负号,则 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同向,且 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,故
$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$$

数 λ 的唯一性:假设又有 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$,则$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,从而有 $|\lambda-\mu|\,|\boldsymbol{a}|=0$,而 $|\boldsymbol{a}|\neq0$,故 $|\lambda-\mu|=0$,即 $\lambda=\mu$.

再证充分性:已知 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,则
$$\left.\begin{array}{l}\text{当 }\lambda=0\text{ 时},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\\ \text{当 }\lambda>0\text{ 时},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\text{ 同向}\\ \text{当 }\lambda<0\text{ 时},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\text{ 反向}\end{array}\right\}\Rightarrow\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$$

习题 8.1

1. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$. 试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.
2. 把三角形 ABC 的 BC 边五等分,并把分点 D_1,D_2,D_3,D_4 各与点 A 连接. 试以$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{a}$ 表示向量$\boldsymbol{D_1A}$,$\boldsymbol{D_2A}$,$\boldsymbol{D_3A}$和$\boldsymbol{D_4A}$.
3. 证明三角形两边中点的连线平行且等于第三边的一半.

8.2　空间直角坐标系及向量的坐标

8.2.1　空间直角坐标系的建立

在空间取定一点 O,过点 O 作三条互相垂直的直线 Ox,Oy,Oz,并按右手规则规定 Ox,Oy,Oz 的正方向,即将右手伸直,拇指朝上为 Oz 的正方向,其余四指的指向为 Ox 的正方向,四指弯曲90°后的指向为 Oy 的正方向,如图 8.14 所示. O 称为坐标原点,Ox,Oy,Oz 依

次称为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴),它们构成一个空间直角坐标系. x 轴、y 轴、z 轴上的单位向量分别用 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 来表示(图 8.15).

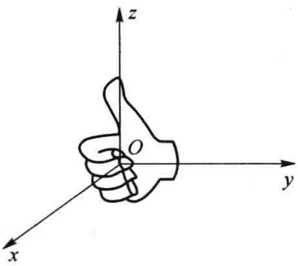


图 8.14

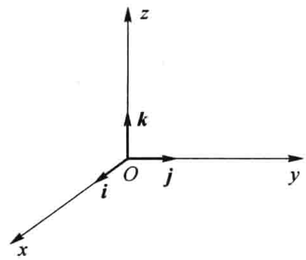


图 8.15

每两条坐标轴所决定的平面称作坐标面,按照坐标面所包含的坐标轴,分别称作 xOy 面,yOz 面,zOx 面. 三个坐标面把空间分成八个部分,称为八个卦限. 含有 x 轴、y 轴与 z 轴正半轴的那个卦限称作第一卦限,在 xOy 面上方,从第一卦限开始按逆时针方向分别是第二、第三、第四卦限. 在 xOy 面下方,第一卦限之下是第五卦限,从第五卦限开始同样按逆时针方向分别是第六、第七、第八卦限,这八个卦限分别用序号Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示(图 8.16).

在空间直角坐标系下,空间任意一点 M 与有序数组(x,y,z)一一对应,(x,y,z)称为点 M 的坐标,记为 $M(x,y,z)$. 显然在坐标面上的点的坐标有一个为零. 例如 xOy 面上的点的坐标中 $z=0$. 在坐标轴上的点的坐标中有两个为零,例如 x 轴上的点的坐标中 $y=z=0$. 原点的坐标为$(0,0,0)$,如图 8.17 所示.

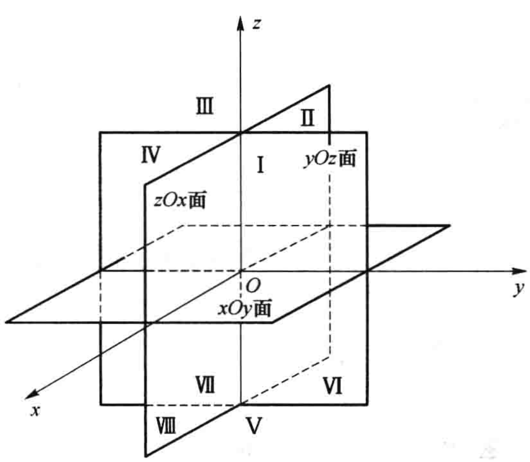


图 8.16

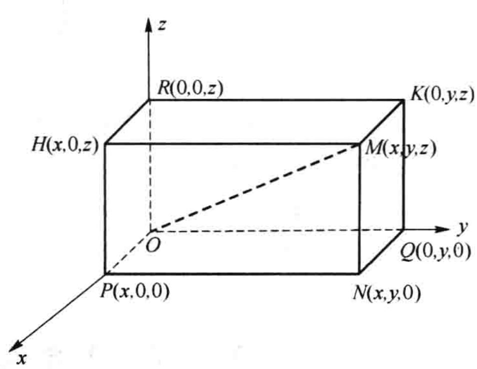


图 8.17

8.2.2 向量的坐标

任给向量 $\boldsymbol{r}$,对应有点 M,使$\boldsymbol{OM}=\boldsymbol{r}$. 这里向量$\boldsymbol{OM}=\boldsymbol{r}$ 称为点 M 关于原点 O 的向径.

在空间直角坐标系中,以 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别表示 x,y,z 轴上的单位向量,设点 M 的坐标为 $M(x,y,z)$,如图 8.18 所示,则有

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{OM}=\boldsymbol{OP}+\boldsymbol{PN}+\boldsymbol{NM}=\boldsymbol{OP}+\boldsymbol{OQ}+\boldsymbol{OR}$$

又由
$$\boldsymbol{OP}=x\boldsymbol{i},\boldsymbol{OQ}=y\boldsymbol{j},\boldsymbol{OR}=z\boldsymbol{k}$$

因此
$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

此式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标分解式，$x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{j}$，$z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿三个坐标轴方向的分向量. 向量 $\boldsymbol{r}$ 也可表示成 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=\{x,y,z\}$，这里 $\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标表示式. x,y,z 分别称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 x 轴，y 轴，z 轴上的投影，也称 x,y,z 为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标.

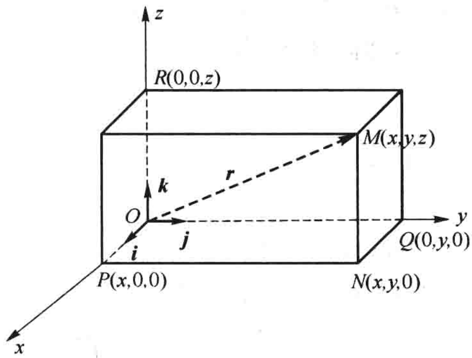


图 8.18

8.2.3　用向量起点和终点的坐标表示向量

1. 用向量起点和终点的坐标表示向量

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，则向量

$$\boldsymbol{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$$

证明：由图 8.19 知，

$$\boldsymbol{OM}_1=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{OM}_2=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$$

由向量的减法运算得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M_1M_2}&=\boldsymbol{OM}_2-\boldsymbol{OM}_1\\&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\\&=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}\end{aligned}$$

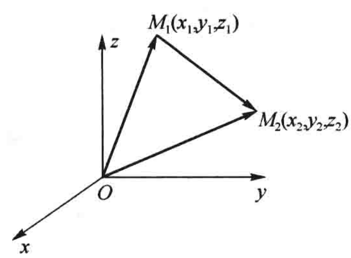


图 8.19

2. 利用坐标作向量的线性运算

两向量和的分量等于两向量对应分量的和.

设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，则有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\}$$

证明：因为
$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$$

那么
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})+(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

所以
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\}$$

同理,两向量差的分量等于两向量对应分量的差,即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\{a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z\}$$

数乘向量等于这个数与向量的每个分量相乘,即

$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}(\lambda\text{ 为实数})$$

平行向量对应坐标成比例.

当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时,$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}\Leftrightarrow\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,坐标表示式为

$$\{b_x,b_y,b_z\}=\lambda\{a_x,a_y,a_z\}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}$$

从而有 $b_x=\lambda a_x,b_y=\lambda a_y,b_z=\lambda a$,即向量 $\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$ 与 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ 平行等价于

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$$

【例 8.2.1】 已知四点 $A(1,-2,3)$,$B(4,-4,-3)$,$C(2,4,3)$ 和 $D(8,6,6)$,求 $2\,\boldsymbol{AB}-3\,\boldsymbol{CD}+4\,\boldsymbol{CA}$.

解:因为

$$\boldsymbol{AB}=\{4-1,-4-(-2),-3-3\}=\{3,-2,-6\}$$

$$\boldsymbol{CD}=\{8-2,6-4,6-3\}=\{6,2,3\}$$

$$\boldsymbol{CA}=\{1-2,-2-4,3-3\}=\{-1,-6,0\}$$

所以

$$\begin{aligned}2\,\boldsymbol{AB}-3\,\boldsymbol{CD}+4\,\boldsymbol{CA}&=2\{3,-2,-6\}-3\{6,2,3\}+4\{-1,-6,0\}\\&=\{6,-4,-12\}-\{18,6,9\}+\{-4,-24,0\}\\&=\{-16,-34,-21\}\end{aligned}$$

【例 8.2.2】 已知两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 以及实数 $\lambda\neq-1$,在直线 AB 上求点 M,使 $\boldsymbol{AM}=\lambda\,\boldsymbol{MB}$.

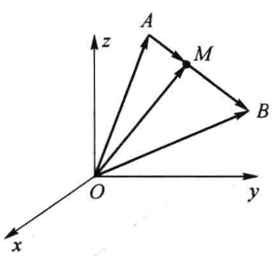


图 8.20

解:设 M 的坐标为 (x,y,z),如图 8.20 所示.

由于

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{AM}&=\lambda\,\boldsymbol{MB}\\\boldsymbol{AM}&=\boldsymbol{OM}-\boldsymbol{OA}\\\boldsymbol{MB}&=\boldsymbol{OB}-\boldsymbol{OM}\end{aligned}\right\}$$

因此

$$\boldsymbol{OM}-\boldsymbol{OA}=\lambda(\boldsymbol{OB}-\boldsymbol{OM})$$

从而

$$\boldsymbol{OM}=\frac{1}{1+\lambda}(\boldsymbol{OA}+\lambda\,\boldsymbol{OB})$$

即

$$\{x,y,z\}=\frac{1}{1+\lambda}\{x_1+\lambda x_2,y_1+\lambda y_2,z_1+\lambda z_2\}$$

所以 M 点的坐标为 $(x,y,z)=\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$.

说明:由例 8.2.2 求得的 M 点的坐标 $(x,y,z)=\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$ 可得线段的定比分点坐标公式.

设线段 AB 两个端点的坐标分别为 $A(x_1,y_1,z_1)$,$B(x_2,y_2,z_2)$,那么分线段 AB 成定比 $\lambda(\lambda\neq-1)$ 的分点 M 的坐标是

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

当 $\lambda=1$ 时,点 M 为 AB 的中点,于是得中点公式:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}$$