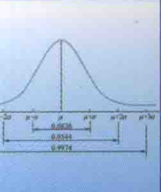
iCourse · 教材

高等农林院校基础课程系列

自主创新
方法先行

概率论与数理统计



主编 王建平 王万雄

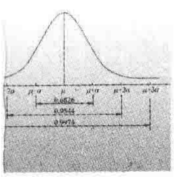
高等教育出版社

iCourse·教材

高等农林院校基础课程系列

自主创新
方法先行

概率论与数理统计



主　编　王建平　王万雄

副主编　张建军　石战红　田　苗

编　委　（按姓名拼音排序）

陈俊英　何春光　牛雪娜　石战红　田　苗

王建平　王万雄　张建军

高等教育出版社·北京

内容提要

本书包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、抽样及抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析、线性回归分析等十章，各章后选配了适量习题，并在书后附有部分习题参考答案。

本书在编写上强调对概率统计的基本概念、基本理论和统计思想的阐释，强调基本方法的应用，力求简洁、清晰地阐释一些概念产生的背景和重要结论的使用方法，并注意了概率统计的理论与实际问题的紧密结合和举例的多样性。本书数字资源与纸质教材紧密结合，包括问一问、典型例题、应用案例、数学史、数学家简介等。

本书可作为高等学校理工类、农林经管类专业的概率论与数理统计课程的教材，也可作为实际工作者的自学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/王建平，王万雄主编.--北京：高等教育出版社，2015.8

iCourse·教材：高等农林院校基础课程系列

ISBN 978-7-04-043455-2

Ⅰ.①概… Ⅱ.①王…②王… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第169357号

项目策划 王 瑜 李光跃 陈琪琳 李艳馥 吴雪梅

策划编辑 杨 帆 责任编辑 杨 波 封面设计 张 楠 责任印制 尤 静

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	大厂益利印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	850mm×1168mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	16.75	版　　次	2015年8月第1版
字　　数	350千字	印　　次	2015年8月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	29.80元

物 料 号 43455-00

iCourse · 数字课程（基础版）

概率论与数理统计

主编　王建平　王万雄

http://abook.hep.com.cn/43455

登录方法：

1. 访问 http://abook.hep.com.cn/43455，单击“注册”。在注册页面输入用户名、密码及常用的邮箱进行注册。已注册的用户直接输入用户名和密码登录即可进入“我的课程”界面。
2. 课程充值：登录后单击右上方“充值”图标，正确输入教材封底标签上的明码和密码，单击“确定”按钮完成课程充值。
3. 在“我的课程”列表中选择已充值的数字课程，单击“进入课程”即可开始课程学习。

账号自登录之日起一年内有效，过期作废。
使用本账号如有任何问题，请发邮件至：
yangfan@hep.com.cn

数字资源　先睹为快

典型例题　　应用案例　　数学史

出版说明

“十二五”是继续深化高等教育教学改革、走以提高质量为核心的内涵式发展道路和农林教育综合改革深入推进的关键时期。教育教学改革的核心是课程建设，课程建设水平对教学质量和人才培养质量具有重要影响。2011 年 10 月 12 日教育部发布了《教育部关于国家精品开放课程建设的实施意见》(教高[2011]8 号)，开启了信息技术和网络技术条件下校、省、国家三级精品开放课程建设的序幕。作为国家精品开放课程展示、运行和管理平台的“爱课程(iCourse)”网站也逐渐为高校师生和社会公众认知和使用。截至目前，已启动 2 911 门精品资源共享课和 696 门精品视频公开课的立项建设，其中的 1 000 多门精品资源共享课和 600 多门精品视频公开课已经在“爱课程(iCourse)”网站上线。

高等教育出版社承担着“‘十二五’本科教学工程”中国家精品开放课程建设的组织实施和平台建设运营的重要任务，在与广大高校，特别是高等农林院校的调研和协作中，我们了解到当前高校的教与学发生了深刻变化，也真切感受到课程和教材建设所面临的挑战和机遇。如何建设支撑学生自主学习和校际共建共享的课程和新形态教材成为现实课题，结合我社 2009 年以来在数字课程建设上的探索和实践，我们提出了“高等农林院校基础课程精品资源共享课及系列教材”建设项目，并获批列入科技部“科学思维、科学方法在高等学校教学创新中的应用与实践”项目(项目编号：2009IM010400)。项目建设理念得到了众多农林高校的积极响应，并于 2012 年 12 月—2013 年 6 月，分别在北京、扬州、武汉、哈尔滨、福建等地陆续召开了项目启动会议、研讨会和编写会议。2014 年，项目成果“iCourse · 教材：高等农林院校基础课程系列”陆续出版。

本系列教材涵盖数学、物理、化学化工、计算机、生物学等系列基础课程，在出版形式、编写理念、内容选取和体系编排上有不少独到之处，具体体现在以下几个方面：

1. 采用“纸质教材+数字课程”的出版形式。纸质教材与丰富的数字教学资源一体化设计，纸质教材内容精炼适当，并以新颖的版式设计和内容编排，方便学生学习和使用；数字课程对纸质教材内容起到巩固、补充和拓展作用，形成以纸质教材为核心，数字教学资源配合的综合知识体系。

2. 创新教学理念，引导自主学习。通过适当的教学设计，鼓励学生拓展知识面和针对某些重要问题进行深入探讨，增强其独立获取知识的意识和能力，为满足学生自主学习和教师教学方法的创新提供支撑。

3. 强调基础课程内容与农林学科的紧密联系，始终抓住学生应用能力培养这一重要环节。教材和数字课程中精选了大量有实际应用背景的案例和习题，在概念引入和知识点讲授上也总是从实际问题出发，这不仅有助于提高学生学习基础课程的兴趣，也有助于加强他们的创新意识和创新能力。

4. 教材建设与资源共享课建设紧密结合。本系列教材是对各校精品资源共享课和教学改革成

果的集成和升华，通过参与院校共建共享课程资源，更可支持各级精品资源共享课的持续建设。

建设切实满足高等农林教育教学需求、反映教改成果和学科发展、纸质出版与资源共享课紧密结合的新形态教材和优质教学资源，实现“校际联合共建，课程协同共享”是我们的宗旨和目标。将课程建设及教材出版紧密结合，采用“纸质教材+数字课程”的出版形式，是一种行之有效的方法和创新，得到了高校师生的高度认可。尽管我们在出版本系列教材的工作中力求尽善尽美，但难免存在不足和遗憾，恳请广大专家、教师和学生提出宝贵意见与建议。

高等教育出版社

2014年7月

前　言

概率论与数理统计作为现代数学的重要分支，在自然科学、社会科学和工程技术的各个领域有着极为广泛的应用，特别是近几十年来，随着计算机的迅速普及，概率论与数理统计在经济、管理、金融、保险、生物、医学等方面的应用得到了长足的发展。正是概率论与数理统计的这种广泛的应用性，使得它成为各类专业大学生最重要的数学必修课程之一。这门课程以丰富的背景、巧妙的思维和有趣的结论吸引学生，使学生在浓厚的兴趣中学习和掌握概率论与数理统计的基本概念、基本方法和基本理论。

概率论与数理统计有别于其他数学分支的重要一点在于，初学者往往对一些重要概念的本质的理解感到困难。考虑到这个原因以及概率论与数理统计应用性广泛的特点，本书在取材与写作上，在如下三个方面做了努力：

1. 注意保持科学性、系统性、严谨性的同时，尽量使用较少的数学知识（仅限于微积分和少量矩阵代数知识），避免过于数学化的论证，力求做到由浅入深、深入浅出、通俗易懂、重点突出、简明扼要。

2. 在基本概念和定理的引入中，力图通过从其实际背景的阐述中抽象而来，使概念和定理成为有源之水、有本之木。在书中设置了“问一问”“典型例题”和“应用案例”，凸显了对概率论与数理统计概念的解释以及相关理论知识的应用，以便帮助读者正确理解概率论与数理统计基本概念的本质。

3. 考虑到概率论与数理统计广泛的应用性，特别注意例题的多样性，很多例子贴近社会、经济、管理以及工农业生产等，以便帮助读者从不同侧面更好地理解概念、掌握方法。

全书共十章，分两大部分。第一部分由前五章组成，讲授概率论的基础知识，包括随机事件及其概率、一维及多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理。第二部分是后五章，讲授数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析和线性回归分析。根据不同专业需要，可以适量选取部分内容讲授。

参加本书编写的有：王建平、王万雄、张建军、史战红、田苗、陈俊英、何春花、牛雪娜，最后由王建平统一定稿，河南农业大学的曹殿立教授仔细阅读了本书部分章节的初稿，提出了许多宝贵意见。感谢高等教育出版社数学分社对本书的支持和督促，没有他们的热心指导和出色的编辑，不可能使本书迅速问世。

由于编者水平所限，不当之处在所难免，恳请广大教师和学生提出宝贵意见，我们将作出进一步的改进。

编　者

2015 年 5 月

目 录

第一章

随机事件及其概率

概率论是研究随机现象及其统计规律性的一门数学学科，是数理统计学的理论基础.本章先介绍概率论中的基本概念——随机事件及其概率，然后讨论随机事件之间的关系、运算以及概率的有关性质和计算等，这些不但是概率论的基本问题，而且也是进一步学习概率论的基础.

数学史：概率论发展史

第一节 随机事件

一、随机现象

虽然自然界和社会上发生的现象千姿百态，但是有一类现象，它在一定条件下必然发生，例如，太阳不会从西边升起；异性电荷相互吸引；在标准大气压下，纯净水加热到 100℃ 必然沸腾；抛掷的物体最终会落到地面等.像这类在一定条件下必然发生或必然不发生的现象，称之为**确定性现象**.

除了上述的确定性现象之外，还有一类现象，例如，抛掷一枚硬币，观察其哪一面朝上，当硬币离开自己的手时，你却不可能确定掉在地上的硬币是正面朝上，还是反面朝上.同样，运动员射击靶标，各次弹着点不尽相同，在一次射击之前无法预测弹着点的确切位置；沸腾了的水中，某个水分子的运动速度、运动方向等却不得而知等.就掷一枚硬币而言，虽然在一次试验中，无法预先知道落地的硬币是正面朝上还是反面朝上，但是历史上曾有不少人作过抛掷硬币的试验，试验表明，一枚均匀的硬币，在大量的试验中，正面朝上和反面朝上的次数接近相等，而且试验的次数越多，就越接近相等.同样，加热中的每个水分子的运动方向、速度等是不确定的，但大量的分子运动的结果却在温度、压强等宏观表现上呈现出某种规律性；大量射击目标的弹着点的位置也具有一定的规律性.这种在大量重复试验或观察中所呈现的规律性称之为**统计规律性**.

应用案例 1.1

像上述在一次试验中可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，但在大量的重复试验或观察下，试验结果呈现统计规律性的现象，我们称之为**随机现象**.

概率论和数理统计就是研究和揭示随机现象以及其内在的统计规律性的一门数学学科，其理论与方法的应用范围非常广泛，几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产、国民经济的各个部门以至于人们的日常生活中.

二、随机试验与样本空间

为了获得随机现象的统计规律性，往往需要在相同条件下对随机现象做大量的试验或重复观察.概率论中对随机现象的一次观察或为观察随机现象而进行的一次试验称为**随机试验**，简称为**试验**，我们通常用 E 表示随机试验.

一般来说,随机试验应该具有如下的特点:

(1) 试验能够在相同的条件下重复进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个,但其所有可能出现的结果,事先都是已知的;

(3) 进行一次试验之前,哪一个结果会出现是不确定的.

由此说明,随机试验所有可能出现的结果将组成一个集合,称这个集合为该试验的**样本空间**,记为Ω.样本空间Ω中的每个元素,也就是试验E的每个结果,称为一个**样本点**.下面看一些随机试验的例子:

E_1:投掷一枚硬币,考察其正面朝上还是反面朝上;用“H”表示正面朝上,“T”表示反面朝上,于是E_1的样本空间为$\Omega_1=\{H,T\}$.

E_2:掷两枚硬币,依次考察其朝上的是正面还是反面;则E_2的样本空间为$\Omega_2=\{HH,HT,TH,TT\}$.

E_3:在一条生产线上,观察某个工作日内生产出的产品中的次品数;则相应于E_3样本空间为$\Omega_3=\{0,1,2,\cdots,n\}$.

E_4:投掷一枚骰子,考察其朝上一面的点数;则相应于E_4的样本空间为$\Omega_4=\{1,2,3,4,5,6\}$.

E_5:某电话交换台,在某一时段内接到的电话呼唤的次数;则相应的样本空间为$\Omega_5=\{0,1,2,\cdots\}$.

E_6:观察某地的年降雨量;则相应的样本空间为$\Omega_6=\{t\mid t\geqslant 0\}$.

E_7:检测某种灯泡的使用寿命;则相应的样本空间为$\Omega_7=\{t\mid t\geqslant 0\}$.

由上述随机试验看出,不同的问题,样本空间一般是不一样的.样本空间的样本点一般来说取决于随机试验和它的研究目的.

三、随机事件的关系及其运算

设Ω为随机试验E的样本空间,称Ω的子集为**随机事件**,简称**事件**.在每次试验中,当且仅当该子集中的一个样本点出现时,称该事件发生.特别地,只含一个样本点的事件称为**基本事件**.

事件一般用大写字母A,B,C等来表示.

例如,前述例子中投掷一枚骰子的试验E_4,样本空间为$\Omega_4=\{1,2,3,4,5,6\}$.$A=\{1,3,5\}$,$B=\{2,4,6\}$均为事件,事件A也可以称为“掷出奇数点”的事件,事件B也可以称为“掷出偶数点”的事件.

> 问一问 1.1
> 样本点与基本事件的关系?

因为事件是样本空间的子集,所以样本空间Ω和不含任何样本点的空集$\varnothing$也是事件.按事件发生的定义,显然,事件Ω在每次试验中都会发生,故称其为**必然事件**;而空集$\varnothing$作为一个事件,在每次试验中都不可能发生,故称其为**不可能事件**.

由上述定义可知,随机事件是样本空间的子集,因此,可以用有关集合论的方

法来描述事件之间的关系和运算，也就是说，事件之间的关系和运算与集合之间的关系和运算是相对应的.

下面讨论事件间的关系及其运算.

（1）**事件的包含**　若事件 A 发生必然导致事件 B 发生（或者说事件 A 的每一个样本点都是事件 B 的样本点），则称事件 B **包含**事件 A，记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$.

比如，在上述 E_4 中，如果事件 $B=\{1,2,3,5\}$，而 $A=\{1,5\}$，则 $A\subset B$.

显然，对任何事件 A，必有 $\Omega\supset A\supset\varnothing$.

（2）**事件的相等**　对于任意两个事件 A 和 B，如果事件 A 发生，那么事件 B 一定发生；反过来，如果事件 B 发生，那么事件 A 一定发生（或者说若 $A\subset B$ 和 $B\supset A$ 同时成立），则称事件 A 与 B **相等**，记为 $A=B$.

（3）**并事件**　事件 A 与事件 B 至少有一个发生的事件（或者说由事件 A 和事件 B 的所有样本点所组成的事件），称为事件 A 与事件 B 的**并**，记为 $A\cup B$.

并事件也称为**和事件**，可记为 $A+B$.

例如事件 $A=\{1,5\}$，$B=\{3,5\}$，则事件 $A\cup B=\{1,3,5\}$.

显然，如果事件 $A\supset B$，则 $A\cup B=A$.

对任何事件 A，一定有 $A\cup\Omega=\Omega$，$A\cup\varnothing=A$.

并事件可以推广到更多事件的情形.例如：n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生的事件可以表示为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.同样，可列个事件的并事件可表示为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

应用案例 1.2

（4）**交事件**　事件 A 与事件 B 同时发生的事件（或者说由事件 A 和事件 B 所共有的样本点所组成的集合）称为事件 A 与事件 B 的**交**，记为 $A\cap B$ 或 AB.交事件通常也称为**积事件**.

比如：在前面所述的试验 E_4 中，如果事件 $A=\{1,3,5\}$，而事件 $B=\{2,3,5\}$，则其交事件为 $A\cap B=\{3,5\}$.

如果事件 $A\supset B$，则 $A\cap B=B$.

显然，对任何事件 A，一定有 $A\cap\Omega=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$.

交事件同样可以推广到多个事件的情形，即 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生的事件可表示为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$，可列个事件同时发生可表示为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

（5）**事件的差**　由属于 A 但不属于 B 的所有样本点所组成的集合，称为事件 A 与 B 的**差**，记为 $A-B$.事件 $A-B$ 也称之为事件 A 发生但事件 B 不发生的事件.

（6）**互不相容事件（互斥事件）**　如果事件 A 和事件 B 不包含相同的样本点，即 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B **互不相容（互斥）**.事件 A 与事件 B 互不相容，即事件 A 与事件 B 不能同时发生.

显然，不同的基本事件是互不相容的.

(7) **互逆事件(对立事件)**　如果对任意两个事件 A,B,满足$A\cap B=\varnothing$,且$A\cup B=\Omega$,则称事件 A 与事件 B 互为**逆事件**.通常也称事件 A 与事件 B 为**对立事件**.A 的对立事件记为$\overline{A}$,也可以表示为样本空间 Ω 与事件 A 的差,即 $\Omega-A$.A 的对立事件$\overline{A}$称之为事件 A 不发生的事件.

由对立事件的定义可知,事件 A 与 B 的差可表示为 $A-B=A\cap\overline{B}$ 或 $A\overline{B}$.

如果 A 为任意事件,则一定有 $A\cap\overline{A}=\varnothing$,$A\cup\overline{A}=\Omega$,$\overline{\overline{A}}=A$,$\overline{\Omega}=\varnothing$,$\overline{\varnothing}=\Omega$.

问一问 1.2
互逆事件与对立事件是否相同？两者有何种关系？

由于事件是样本空间的一个子集,所以事件间的关系与运算自然完全符合集合的关系与运算律,因此,事件之间的关系与运算也可用集合来表示(见图 1-1).从而可以把事件之间的分析讨论转化为对集合的分析讨论,利用集合之间的运算关系来分析事件之间的关系.

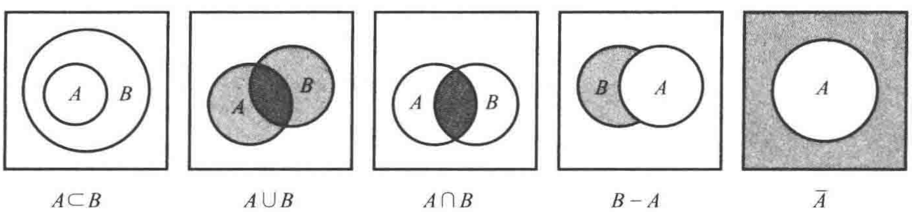


图 1-1　事件的关系

与集合的运算一样,事件间的运算满足下列运算律:

(1) 交换律:$A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) 分配律:$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$;

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C).$$

(4) 德摩根(De Morgan)反演律:

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

数学家小传 1.1

对于 n 个(或者可列个)事件,德摩根反演律仍然成立:

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n}A_k}=\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A_k},\quad \overline{\bigcap_{k=1}^{n}A_k}=\bigcup_{k=1}^{n}\overline{A_k}.$$

例 1　假如投篮 3 次,以 A_1,A_2,A_3分别表示事件“第一、二、三次投中”.试用A_1,A_2,A_3表示以下各事件:

(1) 只投中第一次;(2) 只投中一次;(3) 至少投中一次;(4) 投中次数不多于两次;(5) 至少投中两次;(6) 三次都未投中.

解　(1) 事件“只投中第一次”意味着第一次投中,而第二、三次都没有投中,也就是事件 A_1发生,而事件 A_2和 A_3都没有发生,所以该事件可以表示为 $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$.

(2) 事件“只投中一次”并没有说明哪一次投中,三个事件“只投中第一次”

“只投中第二次”“只投中第三次”中的任意一个发生,都说明事件“只投中一次”发生,由于上述三个事件两两互斥,所以事件“只投中一次”可表示为

$$A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3.$$

(3) 事件“至少投中一次”就是事件“第一、二、三次至少有一次投中”,所以该事件可表示为 $A_1\cup A_2\cup A_3$,或者

$$A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\cup A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3\cup A_1A_2A_3.$$

(4) 事件“投中次数不多于两次”就是事件“一次未投中”“投中一次”“投中两次”的并事件,所以可以表示为

$$\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\cup A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3.$$

(5) 事件“至少投中两次”就是“投中两次”“投中三次”的并事件,所以可以表示为 $A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3\cup A_1A_2A_3$.

(6) 事件“三次都未投中”可以表示为$\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$.

例 2 若 A,B,C 为三个事件,则

解 (1) A 与 B 都发生而 C 不发生可以表示为 $AB\overline{C}$或 $AB-C$ 或 $AB-ABC$;

(2) A,B,C 恰好有一个发生可表示为 $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$;

(3) A,B,C 中至少有一个发生可表示为 $A\cup B\cup C$,或表示为

$$A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup ABC;$$

(4) A 发生而 B 与 C 都不发生可表示为 $A\overline{B}\,\overline{C}$或 $A-B-C$;

(5) A,B,C 都发生可表示为 ABC;

(6) A,B,C 恰好有两个发生可表示为$\overline{A}BC\cup A\overline{B}C\cup AB\overline{C}$.

第二节 随机事件的概率

一、频率、概率的统计定义

除必然事件和不可能事件之外,对于任意一个随机事件来说,它在一次试验中可能发生,也可能不发生.但是,对具有偶然性的随机事件来说,在多次大量的重复试验中,始终受其内蕴的统计规律性所支配,也就是说,随机事件发生的可能性的大小是可以度量的.为此,首先引入频率,用以描述事件发生的频繁程度,进而引出描述事件在一次试验中发生的可能性大小的度量值——概率.

下面,先给出频率的定义.

定义 1 设事件 A 为随机试验 E 的任意事件,在相同的条件下,进行了 n 次试

验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数称为事件 A 发生的**频数**，记为 n_A，称 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$为随机事件 A 在这 n 次试验当中发生的**频率**.

事件 A 发生的频率体现出事件 A 发生的频繁程度，频率越大，说明事件 A 发生的越频繁，这也意味着事件 A 在一次试验中发生的可能性就越大.与此同时，人们也发现，当试验次数很多时，事件 A 发生的频率就会在某个固定的数值附近随机摆动，并且随着试验次数的不断增多，这种摆动的幅度也会越来越小.习惯上，把随机事件频率的这种特性称之为频率的稳定性.

为了探讨上述问题，历史上曾有不少人通过抛掷硬币的试验来验证频率的稳定性这个结论，如果事件 A 表示正面朝上，其试验结果如表 1-1 所示.

表 1-1　抛掷硬币的试验及结果

实验者	n	n_A	$f_n(A)$
德摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰(Buffon)	4 040	2 048	0.506 9
K・皮尔逊(Pearson)	12 000	6 019	0.501 6
K・皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

这些抛掷硬币的试验说明，在大量重复试验中，质地均匀的硬币出现正面的频率总在$\frac{1}{2}$的附近波动，抛掷的次数越多，其波动的幅度就越小.同时也可以看出，对同一事件 A，在不同的重复试验中，频率是不同的.

数学家小传 1.2

由频率的定义容易验证，对于随机试验 E 的任意事件 A，频率具有下列性质：

(1) 非负性：$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2) 规范性：$f_n(\Omega)=1$；

(3) 可加性：若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 两两互不相容(即对于任意两个不同的事件 A_i 和 A_j，总有 $A_iA_j=\varnothing, i\neq j$)，则 $f_n(\bigcup_{i=1}^{m}A_i)=\sum_{i=1}^{m}f_n(A_i)$.

定义 2　在相同的条件下，将同一试验重复进行 n 次，当 n 充分大时，频率 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$总在一个确定的正数 p 附近波动，并且当 n 逐渐增大时，这种波动的幅度逐渐地减小.称这个频率的稳定值 p 为事件 A 发生的概率，记为 $P(A)$.

上述定义中事件的概率，通常称之为概率的统计定义.该定义在肯定随机事件概率存在的同时，也提供了估算概率的方法，也就是说，只要试验的次数足够大，就可以用事件 A 发生的频率来近似代替事件发生的概率.

问一问 1.3

由频率的性质以及频率与概率的关系可知，概率的统计定义具有如下性质：

(1) 非负性：$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；