高級中学課本代数第二册

教学参考书

河北省教育厅教研室主編

河　北　人　民　出　版　社

編者的話

为了帮助高中代数教师，特别是新参加工作的教师，钻研教材，改进教法，提高教学质量，我們于1958年初委托石家庄、秦皇島、天津等市教育局組織一部分教师編写了这一套高中代数教学参考书。书中主要內容是教学目的、教材分析和教法建議等。在分析教材和提供教法时都注意到了教材的科学系統性和加强三結合方面的內容。今年 9 月第一次印刷出版前，蒙人民教育出版社数学編輯室审閱和修正。

今年11月初中央教育部确定把这套参考书再次印刷供应全国。为了进一步貫徹党的教育方針，体現八届八中全会的精神，我們又作了一次修訂。但由于时間仓促和我們的水平所限，距离教育方針的要求仍然很远；迫切希望教师同志們对书中存在的缺点和錯誤以及不足之处提出批評建議，以便再版时修訂补充。

河北省教育厅教研室

1959年11月

目　录

第五章 数列

一、教学目的

(一)使学生明确数列的概念，掌握等差数列和等比数列的主要公式，并能熟练地运用它們解决实际問題。

(二)使学生明确数列的极限的概念，掌握数列极限存在的判定方法，并能用极限的定理以求无穷遞縮等比数列的和与化循环小数为分数。

(三)通过各种数列公式的应用，培养学生分析問題的能力并提高其解方程等的运算技能和技巧。

(四)通过数列的学习，引导学生观察数列的各項与項数的內在联系及其发展規律，以培养其辯証唯物主义观点和邏輯思維能力。

(五)通过介紹一些我国古代数学家在研究等差数列、等比数列和极限等問題上的成就，培养学生热爱祖国和热爱科学的优良品德。

二、教材編排系統和教学进度

本章教材包括：1.数列，2.等差数列，3.等比数列，4.数列的极限，5.无穷遞縮等比数列五个內容。是在学生已經学过函数相依关系及一元二次方程、二元二次方程組等知識基础上提出的。这段教材一方面密切联系着整个代数教学目的中的“发展学生关于函数相依关系和它的图象的概念”、“列出方程和解方程”、

“作出代数式的恒等变形”等問題；一方面为将来学习高等数学中极限的理論打下初步基础；同时也为学生学习高中几何課中圓的周长与面积，圓錐、圓柱与球的表面积和体积等問題准备必要的知識。

这一章教材共用18个課时进行教学：

Ⅰ.数列	2課时
Ⅱ.等差数列	3課时
Ⅲ.等比数列	4課时
Ⅳ.数列的极限	6課时
Ⅴ.无穷递縮等比数列	3課时

三、教学时应当注意的事項

(一)与几何課进度的配合問題

几何課在讲圓的周长的定义时，須要用到数列极限性质的知識，在教学中应与几何教师密切联系，防止发生几何用在先、代数讲在后的互相脫节的現象。

(二)在日常生活和生产劳动中，有許多关于等差数列、等比数列的实际問題，在教学这两个課題时，应注意密切結合，以培养学生应用这些知識解决实际問題的能力。

(三)关于数列的极限的教学

极限是数学分析中的基本知識，它研究变量的变化規律，一般学生較难接受。但是在这里并不要求全面透徹地讲解极限的理論。教师应深入細致地体会大綱的規定和教材的內容，結合学生具体情况进行教学。

大綱要求教給学生：1.什么叫数列的极限，2.递增有界或递

非为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbo

减有界的数列一定有极限存在，3. 怎样用算术运算求某些数列的极限。至于所有定理则一律不加証明，直接引用。

教材§81 講解数列极限的定义，§83 定理(2) 講解递增或递减的有界数列必定有一个极限，§83 定理(3)—(6) 講解求极限的有关定理，教材是按照大綱的精神編写的，教学时不必加深和扩大。

学生在这一章的学习中将遇到与以往不同的情况，特别是由常量到变量、由有穷到无穷的变化，因此在教学中要特别注意：

1. 在第一課講授数列的概念时就要很好地注意与本段教材的联系，为学习本段教材打好基础。应該給学生建立好"无穷"的概念，并要求学生对于有穷、无穷、递增、递减、摆动、常数列以及有界、无界等概念获得清楚的認識。

2. 在这段教材的学习中，学生需要理解与思考的东西較多，教师应遵循"从生动的直观到抽象的思維，再由抽象的思維到实踐"，这一唯物的認識論原理，在教学中充分利用数列的图象，使学生先通过鮮明的直观，对所講的定义或定理得到深信不疑的感性認識，再講定义、定理；然后举出具体实例（例題或习題），按照定义或定理一步一步地进行推証或运算，以使学生順利地接受理論知識，学会运用这些知識，并在运用中加深理解与記忆。

3. 講本段教材时，有些預备知識如果学生不够熟悉，可事先給以适当的講解。如关于极限定义中的絕对值不等式 $|a_n - A| < \varepsilon$，可加以簡单的說明。如：

$i.$ $|x| < 1$ 这个絕对值不等式相当于双联不等式

$-1 < x < 1$。

$ii.\ |a_n-2|<\frac{1}{100}$ 卽 $-\frac{1}{100}<a_n-2<\frac{1}{100}$ 亦卽

$2-\frac{1}{100}<a_n<2+\frac{1}{100}$。

$iii.\ |a_n-A|<\varepsilon$ 卽 $-\varepsilon<a_n-A<\varepsilon$ 亦卽

$A-\varepsilon<a_n<A+\varepsilon$。

并可說明 $|x-A|<\varepsilon$ 中的 x 卽表示与 A 点的距离小于 ε 的各点，也就是以 A 为中心，以 ε 为半徑向左右两方作弧，在数軸上所截綫段內部的一切点。

(四)本章教材中公式較多，应要求学生在徹底理解的基础上，通过演算习题加以記忆。

I. 数列

第1課

課題：数列的定义和种类(§ 73)。

注意事項：

1. 在引言中可簡单地向学生說明本学期的大致进度、本章主要內容及本章与几何課的联系等問題，以便使学生明确学习目的，并启发其学习兴趣。

2. 講授数列的定义时可采用下面的方法：

(1)挂出課前根据教材写好12个例題的小黑板，說明如黑板上每一行都是按照一定順序排列在一起的一些数，象这样依照某种法則排列着的一列数，叫做数列。

(2)引导学生观察它們各自的內在联系与共同規律：卽每个数列在一个确定的位置上都有一个确定的数。这样，根据函

数的定义，就可以把一个数列里的数看做它所在位置的号数的函数。这个函数的自变量是位置的号数(其值为自然数)，而对应的函数值就是数列里的各个数。由此得出定义:“数列就是自变量取自然数值的函数”。

(3)可从习题二十一第1题中选一些题目，让学生写出各数列的前5項。

3. 講授数列的种类时，可按下列順序进行:

(1)选定几个数列(如教材内4, 6, 10)引导学生按各数列項数的有穷无穷作对比，得出有穷数列与无穷数列的定义，并把12个数列按如上两类分开。

(2)結合課前画好的教材內12个数列前几項在数軸上的图象，选几个适宜的例子(如1, 3, 5, 12)让学生按数列中数值变化的情形作对比，得出遞增数例、遞减数列、摆动数列和常数列的定义(参看附录)，并把12个数列按如上的四类分开。

(3)选出几个适宜的数列(如3, 11, 2, 12)引导学生按数列中任何一項的絕对值是否小于某个正数作对比，得出有界数列与无界数列的定义，并把12个数列按如上的两类分开。

在这里須向学生說明，所有有穷数列都是有界的，而无穷数列则有些是有界的，有些是无界的。不要将有界数列与有穷数列相混淆，将无界数列与无穷数列相混淆。

(4)关于数列的种类，可以作如下的小結:

(i)按照項数的有穷无穷可以分为$\begin{cases}\text{有穷数列}\\\text{无穷数列}\end{cases}$

(ii)按照各項数値的变化情况可以分为$\begin{cases}\text{遞增数列}\\ \text{遞减数列}\\ \text{摆动数列}\\ \text{常 数 列}\end{cases}$

(iii)按照任何一項的絕对値是否都小于某一个正数，

可以分为$\begin{cases}\text{有界数列}\\ \text{无界数列}\end{cases}$

(5)可用习題二十一第2題及第3題中的几个小題让学生作当堂練习。

4. 可从习題二十一第1題到第3題及第8題中选取适当的几个題目留作学生課外作业，并向学生說明在作业中判断数列遞增或遞减时，現在只从观察（或試驗）是否"后一項比前一項大"或"后一項比前一項小"即可，不必一定要証明 $a_{n+1}>a_n$ 或 $a_{n+1}<a_n$。

〔附录〕关于遞增、遞减数列的定义，在法捷耶夫著的代数学下册151頁内是这样的（詞句及例略有更动）

(1)如果数列的每一个后面的項不小于其前面的項，也就是說 $a_{n+1}\geqslant a_n$，这个数列叫做遞增数列，如由 $\sqrt{3}$ 精确到1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001, ……的不足近似値組成的数列：1, 1.7, 1.73, 1.732, 1.7320, 1.73205, ……便是遞增数列（注意第4項与第5項数値相等）。

如果数列的每一个后面的項大于其前面的項，也就是說 $a_{n+1}>a_n$，这个数列叫做严正遞增数列。

(2)如果数列的每一个后面的項不大于其前面的項，也就是說 $a_{n+1}\leqslant a_n$，这个数列就叫做遞减数列。

如果数列的每一个后面的項小于其前面的項，也就是說 $a_{n+1}<a_n$，这个数列叫做严正递减数列。

第 2 課

課題：数列的通項公式(§74)。

注意事項：

1. 本节課开始时可以先提出类似下面的問題以复习数列的定义和种类：

(1)什么叫做数列？試举例說明。

(2)数列可以怎样分类？各有什么特点？

(3)回答习題二十一第8題中的几个小題。

2. 讲数列的通項公式时，可以先用实例引出数列的一般形式 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n\cdots\cdots$ 說明 a_n 叫做数列的通項，如果它能用式子表示出来，那个式子便叫做数列的通項公式。然后，引导学生从数列定义中数列各項的数值与它所在項数的关系着想，通过观察分析找出变化規律，写出通項公式来，并作一些簡单练习。如：

$1,2,3,4,\cdots\cdots$ 各項数值与它所在項数一致，得 $a_n=n$；

$2,4,6,8,\cdots\cdots$ 各項数值是它所在項数的2倍，得 $a_n=2n$；

$1,3,5,7,\cdots\cdots$ 各項数值比它所在項数的2倍少1，得 $a_n=2_n-1$；

$11,21,31,41,\cdots\cdots$ 各項数值是它所在項数的10倍加1，得 $a_n=10_n+1$；

$1,4,9,16,\cdots\cdots$ 各項数值是它所在項数的平方，得 $a_n=n^2$；

$-1,-1,-1,-1,\cdots\cdots$ 这是常数列，$a_n=-1$；

$\frac{2}{2},\frac{3}{5},\frac{4}{8},\frac{5}{11},\cdots\cdots$ 这时应說明遇到数列的各項都是分数的

时候，一般可以从分子、分母分别考察。如本例各項的分子都比它所在項数多1，而分母都比它所在項数的3倍少1，故得

$$a_n=\frac{n+1}{3n-1}$$

3.通过求数列通项公式的过程，应向学生指出具体問題具体分析的工作方法，以培养其在这方面的能力。

4.应当告訴学生，并不是所有数列都能很容易地写出它的通項公式来，有的是比較难写出，如§73例(9)，(10)，有的不能写出，如$\sqrt{2}$的不足近似值或过剩近似値数列和质数数列等。

5.练习根据通項公式写出数列的前几項以及某指定的一項，或检查某数是不是这个数列的一項时，要使学生再一次回想数列是自变量取自然数値的函数，这样他們就容易理解了。可用习題二十一第9题与第10題(2)为例作板演示范。第10題(2)可以这样来解：若100是这数列的第n項，則$100=n(n+2)$，解之得$n=-1\pm\sqrt{101}$，所得n的值不是自然数，故知100不是这个数列的一項。

6.可从习題二十一的第4題到第7題和第10題中选择适量的題目留做学生課外作业。

II. 等差数列

第3課

課題：等差数列的意义及通項公式(§75、§76)。

注意事項：

1.在本节課的开始，可先复习数列的定义，再通过具体事例写出三个不同的等差数列，引导学生找出它們的共同点，从而引出等差数列的定义。

2.在学生理解了等差数列的定义以后，可以指出：若$d>0$，

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbo

則数列是遞增的；若 $d<0$，則数列是遞减的；若 $d=0$，則数列是常数列。任何常数列，都可以看做是特殊的等差数列，即 $d=0$ 的等差数列。因为常数列的第 n 項等于 a_1，有旁常数列的前 n 項的和等于 na_1 都很容易求出；所以碰到常数列的时候，可以不必用等差数列的公式来进行計算。

3. §76等差数列的通項公式的求出，是通过数列的第一、二、三、四項几个特例归納成一般的法則。这样講学生較易接受，同时因为学生还沒有学过数学归納法，不能用数学归納法作严格的証明（用数学归納法的严格証明見附录）。

4. 講例1时，可說明公式 $a_n=a_1+(n-1)d$，在 a_1 及 d 已知时，a_n 是 n 的一次函数。这个函数的自变量(n)之值，只許可取自然数。有了这个公式便可求等差数列中任何一項的值。最好叫学生实际驗証所得結果是否正确，例如，逐次写出各項：40, 37, 34, 31, 28, 25, 22, 19, 16, 13, 10, 7（每項都等于其前一項减3，即加負3），到第12項，恰得7，可見結果正确。这样就能防止学生形式主义地死記公式。

5. 講例2时，可說明已知公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 中任意三数，均可求出其余一数。如，已知 a_n、a_1、d 求 n。便是解关于 n 的一元一次方程。最好也叫学生实际驗証。否則，学生有时得的 n 不是正整数，也会認为它是正确的答案（第3、第4兩例，得出結果后，最好也叫学生实际驗証）。

6. 講例3时，可說明：对于一个等差数列，如果已經知道 a_1 和 d，那末所有的項都很容易求得，因此求等差数列中的未知項，一般可以先求出 a_1 和 d，例1和例2就是这样。在本題中，a_1 和 d 都不容易直接求得，因此需要列出方程組来解。本題已

知两个項的值，就可以把它們列成两个含 a_1 与 d 的方程，組成方程組，求出 a_1 和 d，代入通項公式即可求出 a_{10}。

7. 講例 4 时，可說明这类題目实际上是已知 a_1, a_n 及 n 求 d，再进而求 $a_2, a_3, \cdots\cdots a_{n-1}$ 的問題(它的一般解法見附录)。

8. 可通过习題二十二第 7 題(1)講解等差中項的定义，并指出三数 x、A、y 中，A 是否等于 $\frac{x+y}{2}$ 是判別三个数是否成等差数列的主要方法，作証明題时常常要用到它。

9. 可以叫学生口答类似习題二十二中第 1——第 3 与第 7 (2) 中的一些小題，作当堂巩固。

10. 习題二十二第 4 題——第 7 題，可选作学生課外作业。

〔附录〕

1. 求証：等差数列的通項公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$。

証明：(1) 当 $n=1$ 时，左边 $= a_1$，右边 $= a_1 + (1-1)d$ $= a_1$ 等式成立。

(2) 假設当 $n=k$ 时(k 为自然数)等式成立，

即 $a_k = a_1 + (k-1)d$，

两边同加 d，得 $a_k + d = a_1 + (k-1)d + d$。

实际上 $a_k + d = a_{k+1}$

$$\therefore \quad a_{k+1} = a_1 + kd$$

这就是說，当 $n=k+1$ 的时候，等式也是成立的。

根据(1)、(2)，就可以断定对于任意的自然数 n，这个等式都能成立。

2. 求在 a、b 之間插入 m 个数，使它們和 a、b 成等差数列。

解：

$\because$ a 为首項，b 为第 $m+2$ 項

$\therefore$ $a+(m+2-1)d=b$

$$d=\frac{b-a}{m+1}$$

$\therefore$ 所求的 m 个数依次为 $a+\frac{b-a}{m+1}$, $a+\frac{2(b-a)}{m+1}$,

$$a+\frac{3(b-a)}{m+1}, \cdots\cdots, a+\frac{m(b-a)}{m+1}。$$

第4課

課題：等差数列前 n 項和的公式(§77)。

注意事項：

1. 在本节課的开始，可从习題二十二第1題——第3題中选取若干題叫学生口答。

2. 配合講前 n 項和的公式用的图34可預先画在小黑板上，中間的折綫最好用色粉笔画，以便使学生清楚地看出两部分是等积的图形，其中每一部分都等于 S_n。

3. 例1比較簡单，可叫学生口答，并要他們能够答出前 n 个自然数之和等于什么$\left[S_n=\frac{n(n+1)}{2}\right]$。

如已知首項 a_1，公差 d，項数 n 求 S_n 用公式

$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$ 比較方便。其推証方法，除課本所指出的以外，亦可用下法：

$$S_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots\cdots+[a_1+(n-1)d]$$
$$=na_1+d+2d+3d+\cdots\cdots+(n-1)d$$

$$=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$$

4. 例 2 所得公式簡单易記，可要求学生在充分理解的基础上牢牢記忆，以备应用。

5. 例 3 应用 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$ 求 n 时，是解关于 n 的二次方程，要告訴学生，此时 n 的許可值为正整数，并要說明理由。

6. 講例 4 时，可引导学生分析等差数列的通項公式或求 n 項和的公式中都含有两个未知条件，故不能单独利用这两个公式，分别求出 a_1 及 n，而必須同时利用这两个公式解二元二次方程組。

为了使学生充分了解这一类問題，也可告訴他們，等差数列的問題共有五个量，如已知其中任意三个，卽可求出其余两个，(共有 $C_5^3=C_5^2=\frac{5\times4}{1\times2}=10$ 种題目，教师可不必向学生說明)，其中有的題目可以直接代入一个公式求出，有的(如本例)则必須同时代入两个公式（通項公式及求和公式）解二元二次方程組。这种方程組，最高为 2 次，且一定包含一个一次方程，所以利用已有的知識都能解决。

7. 可自习題二十二第 8——第 12 題中选取适量的題，留作学生課外作业。

其中习題二十二第 9 題(3)，12 題可做适当的提示，今将 12 題(2)解之如下，仅供参考：

$S_1=8,\qquad S_2=26,\qquad S_3=54$ 卽

$a_1=8,\qquad a_1+a_2=26,\qquad a_1+a_2+a_3=54,$

$\therefore\ a_1=8,\qquad a_2=18,\qquad a_3=28$。

第5課

課題：有关等差数列問題的練习。

注意事項：

1. 在本节課的开始，可复习等差数列的主要內容。如，等差数列、等差中項的定义、通項公式及求和公式等。

2. 可以类似复习題五第7題(1)、第8題及习題二十二第16題、第21題的題目为例，进行講解。以培养学生分析問題的能力，及解題的技能技巧。

3. 講复习題五第7題(1)时，可通过一系列的問題指給学生思考的方向，使他們能够自覚地得出解决問題的方法，如：

(1)已知条件是什么？求証条件是什么？

(2)若 a, b, c 三数成等差数列，則它們之間有什么数量关系？$\left(b=\dfrac{a+c}{2}\right)$

(3)三数之間有什么数量关系，便能判定这三数成等差数列？$\left(b=\dfrac{a+c}{2}\right)$

4. 講授复习題五第8題时，可指出設三边为a_1, a_2, a_3，或設三边为 $a, a+d, a+2d$，都不如設三边为 $a-d, a, a+d$方便；特别是当已知三項的和及其他条件，求成等差数列的3个数时，这样做尤其方便；若已知四項的和及其他条件求該四項时，設这四項为 $a-3d, a-d, a+d, a+3d$ 較为方便，其余依次类推。

玆将复习題五第8題解之如下，仅供参考。

設直角三角形的三边分别为 $a-d, a, a+d$，

則$(a+d)^2=a^2+(a-d)^2$ (勾股定理)

$$a^2+2ad+d^2=a^2+a^2-2ad+d^2$$

$$a^2=4ad$$

$$\because \quad a\neq 0 \quad \therefore \quad a=4d,$$

$$a-d=3d, a+d=5d,$$

依大小順序排列三边为$3d, 4d, 5d$。

$\therefore$其比为3∶4∶5。

5.讲授习題二十二第21題时，可参考課本第7頁及第15頁的注，适当給学生介紹我国古代数学书籍內关于数列的內容，使学生知道我們的祖先早已在数列問題的研究上有了伟大的成就，以激发其爱国热情及学习兴趣。（見附录）

6.可就以上各例說明：等差数列的习題有两类：一类是証明題，一类是計算題。对計算題中的应用題，应着重培养学生运用等差数列公式的技能技巧。

7.习題二十二第13，14，15題可供学生当堂练习用。

8.习題二十二第17——第20題及复习題五第7題(2)第9題等均可供选留学生課外作业之用。

〔附录〕

周髀算經成书的年代大約是公元前一世紀到公元一世紀初。

孙子算經大約是晋朝（公元三、四世紀）的著作。

张邱建算經大約是南北朝（公元五、六世紀）的著作。

这三本书都曾在唐朝划在算經十书之內（見严敦杰著：中国古代数学的成就）。

习題二十二第21題解法如下，仅供参考。

設有x人

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com