

人力资源和社会保障部职业技能鉴定中心 职业技能人才职业导向课程资源

高等职业教育经济管理类双证课程指定教材



世纪全国高等职业教育规划教材

线性代数与线性规划 习题集

XIANXING DAISHU YU XIANXING GUIHUA XITIJI

主 编 李林曙

副主编 陈卫宏 赵 坚 顾静相



中国人民大学出版社

人力资源和社会保障部职业技能鉴定中心
职业技能人才职业导向课程资源
高等职业教育经济管理类双证课程指定教材
21 世纪全国高等职业教育规划教材

线性代数与线性规划 习题集

主 编 李林曙

副主编 陈卫宏 赵 坚 顾静相

中国人民大学出版社

· 北京 ·

目 录

第 1 章 矩阵学习指导	1
一、本章主要内容	1
二、解题方法	4
三、例题解析	4
四、作 业	8
五、问题解答	9
六、第 1 章简单练习及习题答案	10
第 2 章 线性方程组学习指导	15
一、本章主要内容	15
二、解题方法	17
三、例题解析	17
四、作 业	20
五、问题解答	21
六、第 2 章简单练习及习题答案	21
第 3 章 线性规划简介学习指导	24
一、本章主要内容	24
二、解题方法	28
三、例题解析	30
四、作 业	42
五、问题解答	45
六、第 3 章简单练习及习题答案	46
综合练习(一)及参考答案	53
综合练习(二)及参考答案	58

第1章 矩阵学习指导

一、本章主要内容

(一) 主要概念

1. 矩阵概念

定义 1.1 有 $m \times n$ 个数 a_{ij} ($i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$) 排列成一个 m 行 n 列, 并括以方括弧(或圆括弧)的数表

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵, 简称 $m \times n$ 矩阵. 矩阵通常用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示.

2. 方阵 A 的行列式

定义 1.7 n 阶方阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示一个与方阵 A 相联系的数(或表达式), 称为方阵 A 的行列式, 记作 $|A|$ 或 $\det A$.

3. 可逆矩阵

定义 1.8 对于 n 阶方阵 A , 如果有 n 阶方阵 B , 且满足

$$AB = BA = I$$

则称矩阵 A 可逆, 称 B 为 A 的逆矩阵, 记作 A^{-1} .

4. k 阶子式

定义 1.10 在矩阵 A 中, 位于任意选定的 k 行, k 列交叉位置上的 k^2 元素, 按原来的次

序组成的 k 阶子阵的行列式,称为 A 的一个 k 阶子式. 如果子式的值不为零,就称为非零子式.

5. 矩阵 A 的秩

定义 1.11 矩阵 A 的非零子式的最高阶数称为矩阵 A 的秩,记为 $r(A)$ 或秩 (A) .

6. 阶梯形矩阵

形如
$$\begin{bmatrix} \otimes & \times & \times & \times & \cdots & \cdots & \times \\ 0 & \otimes & \times & \times & \cdots & \cdots & \times \\ 0 & 0 & 0 & \otimes & \cdots & \cdots & \times \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$
 的矩阵称为阶梯形矩阵,其中符号 $\otimes$ 表示各行的首

非零元素,符号 $\times$ 表示零或非零元素.

此类矩阵具有以下两个特点:

- (1) 矩阵的零行在矩阵的最下方;
- (2) 各行首非零元素之前的零元素的个数随行的序数增加而增加.

(二) 主要运算

1. 矩阵的相等

定义 1.2 若两个矩阵 $A=[a_{ij}]_{s \times p}$, $B=[b_{ij}]_{r \times q}$, 满足

- (1) 行、列数相同,即 $s=r, p=q$;
- (2) 对应元素相等,即 $a_{ij}=b_{ij} (i=1,2,\cdots,s; j=1,2,\cdots,p)$

则称矩阵 A 与矩阵 B 相等,记为 $A=B$.

2. 矩阵的加法

定义 1.3 设 $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$ 都是 $m \times n$ 矩阵,我们称 $m \times n$ 矩阵 $C=[c_{ij}]$, 其中 $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$

为 A 与 B 之和,记为

$$C=A+B$$

3. 矩阵的数量乘法

定义 1.4 设矩阵 $A=[a_{ij}]_{m \times n}$, λ 为任意数,则称矩阵 $C=[c_{ij}]_{m \times n}$, 为数 λ 与矩阵 A 的数乘,其中

$$c_{ij} = \lambda a_{ij} (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$$

记为 $C=\lambda A$

4. 矩阵乘法

定义 1.5 设 $A=[a_{ij}]$ 是一个 $m \times s$ 矩阵, $B=[b_{ij}]$ 是一个 $s \times n$ 矩阵,则称 $m \times n$ 矩阵 $C=$

$[c_{ij}]$, 其中 $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj}$ ($i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n$) 为 A 与 B 的乘积, 记为

$$C=AB$$

5. 矩阵转置

定义 1.6 把一个 $m \times n$ 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

的行与列依次互换位置, 得到的 $n \times m$ 矩阵, 称为 A 的转置矩阵, 记为 A^T 或 A' , 即

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

(三) 主要定理

定理 1.1 对于任意两个 n 阶方阵 A, B , 总有

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

即方阵乘积的行列式等于行列式的乘积.

定理 1.2 设 A 与 B 都是 n 阶方阵, 若 $AB=I$, 则 A 与 B 都可逆, 并且 $A^{-1}=B, B^{-1}=A$.

定理 1.3 方阵 A 可逆的充分必要条件为 A 是非奇异矩阵, 即 $|A| \neq 0$.

定理 1.4 设方阵 A 经过若干次初等行变换后得到方阵 B , 若 $|A| \neq 0$, 则 $|B| \neq 0$. 反之亦然.

定理 1.5 $r(A)=r$ 的充分必要条件是 A 有一个 r 阶子式不为零, 而所有 $r+1$ 阶子式(如果有)全为零.

定理 1.6 矩阵经过初等行变换后, 其秩不变.

定理 1.8 阶梯形矩阵的秩等于其非零行行数.

定理 1.9 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 则 $r(A)=r(A^T)$.

(四) 主要性质

1. 转置矩阵的性质

$$(1) (A^T)^T = A$$

$$(2) (A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(3) (AB)^T = B^T A^T$$

$$(4) (kA)^T = kA^T (k \text{ 为实数})$$

2. 可逆矩阵的性质

- (1) 若 A 可逆, 则 A^{-1} 也可逆, 并且 $(A^{-1})^{-1} = A$.
- (2) 若 n 阶方阵 A 与 B 都可逆, 则 AB 也可逆, 并且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- (3) 若 A 可逆, 则 A^T 也可逆, 并且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- (4) 若 A 可逆, 则 $|A| \neq 0$, 且 $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

(五) 主要方法

矩阵的初等行变换

矩阵的初等行变换是指对矩阵进行下列三种变换:

- (1) 将矩阵的某两行对换位置;
- (2) 将某一行遍乘一个非零常数 k ;
- (3) 将矩阵的某一行遍乘一个常数 k 加至另一行.

二、解题方法

1. 求逆矩阵的方法

初等行变换法

在矩阵 A 的右边写上一个同阶的单位矩阵 I , 构成一个 $n \times 2n$ 矩阵 $[A : I]$, 然后对 $[A : I]$ 施行初等行变换, 将 A 变成单位矩阵, 同时 I 就化成 A 的逆矩阵 A^{-1} .

即

$$[A : I] \xrightarrow{\text{初等行变换}} [I : A^{-1}]$$

2. 求矩阵秩的方法

(1) $r(A) = r$ 的充分必要条件是 A 有一个 r 阶子式不为零, 而所有 $r+1$ 阶子式(如果有)全为零.

(2) 计算矩阵秩的一般方法: 对矩阵 A 施行初等行变换, 将 A 变成阶梯形矩阵 B , 此时即得 $r(A) = r(B)$.

三、例题解析

例 1-1 设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

求 $(2I - A^T)B$.

[分析] 本例涉及矩阵的数乘, 减法, 转置及乘法. 矩阵的减法是同形矩阵的对应元素相减, 矩阵的乘法是有条件的, 即左矩阵的列数等于右矩阵的行数时两矩阵可以相乘, 且乘积矩阵的元素是按“行乘列”法则得到的.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } 2I - A^T &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \\
 (2I - A^T)B &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 1 \times (-1) + (-3) \times 0 & 1 \times 1 + 1 \times 3 + (-3) \times 3 \\ 0 \times 2 + 0 \times (-1) + (-1) \times 0 & 0 \times 1 + 0 \times 3 + (-1) \times 3 \\ (-2) \times 2 + (-4) \times (-1) + 1 \times 0 & (-2) \times 1 + (-4) \times 3 + 1 \times 3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & -3 \\ 0 & -11 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

例 1-2 设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

计算 $|(-2)AB^T|$.

[分析] 利用矩阵行列式乘积定理 $|AB| = |A| |B|$ 和行列式性质 $|kA| = k^n |A|$, $|B^T| = |B|$.

解 因为 $|(-2)AB^T| = (-2)^3 |A| |B^T| = -8 |A| |B|$

$$\text{且 } |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

所以 $|(-2)AB^T| = (-8) \times 2 \times (-1) = 16$.

例 1-3 设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

求 A^{-1} .

[分析] 利用初等行变换法. 将矩阵 A 的右边加上一个同阶的单位矩阵, 使之成为 $n \times 2n$ 矩阵, 对其进行一系列的初等行变换

$$(A : I) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (I : A^{-1})$$

在具体计算中所选择的变换是使左边的矩阵 A 变为单位矩阵, 随之右边的单位矩阵变得的矩阵就是矩阵 A 的逆矩阵.

解 初等行变换法. 因为

$$\begin{aligned} (A : I) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} = (I : A^{-1}) \\ \text{所以 } A^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

注意: 可逆矩阵的逆矩阵是唯一的, 若两种做法得到的结果不同, 则必有一个结果是错误的或两种的结果都是错误的.

例 1—4 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & a & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ 的秩是 3, 求 a 的值.

[分析] 由已知结论, 矩阵的秩即为矩阵化为阶梯形矩阵非零行行数, 利用矩阵的初等行变换将其化为阶梯形矩阵确定其秩. 此题中, 矩阵 A 的秩与待定常数 a 有关, 故对矩阵做初等行变换, 使阶梯形矩阵的非零行为 3 从而确定 a 的值.

解 对矩阵进行初等行变换,将其化为阶梯形矩阵,即

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & a & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & a & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-2a & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1-a & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5-2a & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & a & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-2a & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1-a & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6-3a & 0 \end{bmatrix}$$

因为 $r(A)=3$, 所以 $6-3a=0$, 即 $a=2$.

例 1—5 设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

试用分块矩阵计算 AB .

[分析] 为了充分利用 0 矩阵和单位矩阵的特点,可将矩阵 A, B 进行适当分块,以便计算.

$$\text{解 设 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & A_{12} \\ O & -I \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & O \\ B_{21} & I \end{bmatrix}$$

$$\text{则 } AB = \begin{bmatrix} I & A_{12} \\ O & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & O \\ B_{21} & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{12} \\ -B_{21} & -I \end{bmatrix}$$

$$\text{且 } B_{11} + A_{12}B_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 14 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{所以 } AB = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 1 & 3 \\ 14 & -2 & 2 & 4 \\ -6 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

例 1—6 证明

若 A, B 是同阶矩阵,且 A 为对称矩阵, $B^{-1} = B^T$, 则 $B^{-1}AB$ 是对称矩阵.

[分析] 利用已知条件,证明等式 $(B^{-1}AB)^T = B^{-1}AB$.

证 因为 A 为对称矩阵,即 $A^T = A$ 且 $B^{-1} = B^T$, 即有 $A = A^T, B^T = B^{-1}$, 于是有

$$(B^{-1}AB)^T = B^T A^T (B^{-1})^T = B^{-1}AB$$

由定义, $B^{-1}AB$ 是对称矩阵. 证毕.

四、作 业

1. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

求: (1) $2A - 3B$; (2) AB ; (3) $B^T A^T$.

2. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -6 \end{bmatrix}$, 计算: $A^T + B$, $2A - B^T$, AB , BA .

3. 将下列矩阵化为阶梯形矩阵:

(1) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \\ 5 & 12 & 5 & 3 & 10 \end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & 10 & 4 \\ 3 & 0 & 12 & 7 \end{bmatrix}$.

4. 求下列矩阵的逆矩阵:

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$;

(2) $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$;

(3) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$;

(4) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

5. 解下列矩阵方程:

(1) 已知 $XA = B^T$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, 求 X .

(2) 已知 $AX = B$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$, 求 X .

6. 求下列矩阵的秩:

(1) $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$;

$$(2) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -4 \\ 7 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -9 & -6 & 22 \\ 6 & 4 & 1 & 9 & 2 \end{bmatrix}.$$

应用案例

7. [彩色冲印]在彩色照片的复印技术中,用到如下方程

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.1 & 0 \\ 0.5 & 1.0 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

其中, X, Y, Z 为(冲印后)照片中红、黄、绿的浓度,试写出 X, Y, Z 与 x, y, z 之间的关系.

8. [生产安排]一工厂生产三种型号的机器零件,每天的产量由矩阵 A 给出,生产各种型号单位产品所需要的材料和工作时间由矩阵 B 给出,请用矩阵的运算给出该工厂生产所有机器零件所需要的总材料和总工作时间.

$$A = \begin{bmatrix} 40 \\ 50 \\ 80 \end{bmatrix} \begin{matrix} X \text{ 型} \\ Y \text{ 型} \\ Z \text{ 型} \end{matrix} \quad B = \begin{matrix} \text{材料} & \text{工作时间} \\ \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} X \text{ 型} \\ Y \text{ 型} \\ Z \text{ 型} \end{matrix}$$

五、问题解答

问题 1. 是. 因为对角矩阵的又满足性质 $a_{ij} = a_{ji} = 0$, 当 $i \neq j$ 时.

问题 2. 不同形零矩阵不相等.

问题 3. 它们是同形矩阵.

问题 4. 不同.

问题 5. 可以, 若 $\lambda = 0$, 则 $\lambda A = 0$.

问题 6. 不同, 数的绝对值是个正值, 一阶矩阵的行列式的值与矩阵的元素相同.

问题 7. 矩阵是一张数表, 不能算出值来, 而矩阵行列式是一个数值.

问题 8. 根据矩阵乘法的行乘列原则, 若 $AB = BA$, 则 A, B 必须是同阶方阵.

问题 9. A 矩阵经过初等行变换, 变成了矩阵 B , 它们之间没有相等的关系.

问题 10. 不需要, 如果矩阵 A 可逆, 则 $[A : I]$ 的左半部分 A 一定能通过初等行变换变成单位矩阵 I , 否则, 不能.

问题 11. 要一致, 分块矩阵乘法要求: (1) 分块后按块可以相乘; (2) 每小块间还可以相乘.

六、第 1 章简单练习及习题答案

简单练习 1.1

$$1. \begin{bmatrix} 90 & 85 & 80 \\ 100 & 80 & 90 \\ 70 & 75 & 70 \end{bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

3. 略

4. 12, 9, 21

$$5. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$6. -A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 17 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

简单练习 1.2

$$1. (1) \begin{bmatrix} -10 & -1 & -1 \\ -1 & -13 & 3 \end{bmatrix}; (2) \begin{bmatrix} 5 & -7 & 8 \\ 9 & 10 & 4 \end{bmatrix}; (3) \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 12 & 8 \end{bmatrix};$$

$$(4) \begin{bmatrix} 10 & -4 & 12 \\ 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}; (5) \begin{bmatrix} -1 & -12 \\ -23 & -16 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

$$2. (1) \begin{bmatrix} 29 & -1 \\ 3 & -1 \\ 35 & 2 \end{bmatrix}; (2) \begin{bmatrix} 10 & -2 & 11 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 5 & 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}; (3) 10; (4) \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \\ -3 & 6 \end{bmatrix};$$

$$(5) \begin{bmatrix} 6 & 3 & 6 & -2 \\ 20 & 7 & -11 & 7 \end{bmatrix};$$

$$(6) a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + (a_{13} + a_{31})x_1x_3 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3.$$

$$3. \begin{bmatrix} -2 & -4 & 16 \\ 6 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$4. \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & 1 \\ -4 & -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5.
$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6. 略

7. 略

简单练习 1.3

1. -8, 14

2. 略

3. 略

4. 略

简单练习 1.4

1. $k \neq 0$ 时, kI 可逆, 且 $(kI)^{-1} = \frac{1}{k}I$; 当 $k=0$ 时, kI 不可逆.

2. (1)是; (2)是; (3)不是.

3. (1)不可逆; (2)可逆, $\begin{bmatrix} -11 & 7 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$; (3)可逆, $\begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$; (4)不可逆.

简单练习 1.5

1. (1) $\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; (4) $\begin{bmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$;

(5) $\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; (6) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;

(7) $\begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. (1) $X = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 13 & 2 \\ 4 & 11 \\ 15 & 5 \end{bmatrix}$; (2) $X = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 6 & -29 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$; (3) $X = \begin{bmatrix} -1 & -13 \\ -1 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

3. (1)3; (2)3; (3)3; (4)3

4. 当 $\lambda = \frac{9}{4}$ 时, 矩阵的秩为 2

5. (1)否; (2)是; (3)否; (4)是.

简单练习 1.6

$$1. (1) \begin{bmatrix} 7 & 27 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 70 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 8 & 12 & 6 & 8 \\ 5 & 4 & 8 & 3 & 6 \end{bmatrix}; (2) \begin{bmatrix} a & 0 & ac & 0 \\ 0 & a & 0 & ac \\ 1 & 0 & c+bd & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c+bd \end{bmatrix}$$

2. 略.

习题 1

$$1. (1) \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}; (2) \begin{bmatrix} 10 & 7 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \\ 4 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

2. 计算

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(3) [0]$$

$$3. \begin{bmatrix} 5 & 15 & 2 \\ 1 & 11 & 0 \\ -3 & -2 & -14 \end{bmatrix}$$

$$4. |AB| = |A| |B| = 2 \times 0 = 0$$

5. 当 $k=3$ 时, $r(A)=2$ 达到最小值.

$$6. r(A)=2.$$

7. 求下列矩阵的逆矩阵:

$$(1) A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$(2) A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -7 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$8. \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

9. 证明题

(1)略

(2)略

(3)略

(4)略

作业答案

$$1. (1) \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}; (2) \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}; (3) \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 7 & -5 \\ -11 & 10 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -4 & -11 & 15 \\ 0 & -3 & 9 \\ 4 & 14 & -24 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -15 & 6 \\ -7 & -16 \end{bmatrix}$$

$$3. (1) \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. 求下列矩阵的逆矩阵

$$(1) \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(3) \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 7 & -2 & -1 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(4) \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$5. (1) \mathbf{X} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -\frac{8}{3} & 5 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$(2) \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ -4 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 10 \\ -16 & -12 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

6. (1)4; (2)3

$$7. \begin{cases} X = 1.0x + 0.1y \\ Y = 0.5x + 1.0y + 0.1z \\ Z = 0.3x + 0.4y + 1.0z \end{cases}$$

8. (650 300)