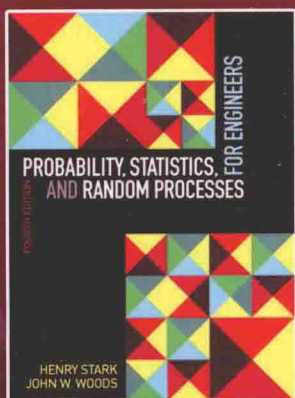


国外电子与通信教材系列

PEARSON

概率、统计与随机过程 (第四版)

Probability, Statistics,
and Random Processes for Engineers
Fourth Edition



[美] Henry Stark 著
John W. Woods

罗鹏飞 等译



中国工信出版集团



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
<http://www.phei.com.cn>

国外电子与通信教材系列

概率、统计与随机过程 (第四版)

Probability, Statistics, and Random Processes for Engineers
Fourth Edition

[美] Henry Stark 著
John W. Woods

罗鹏飞 等译

电子工业出版社
Publishing House of Electronics Industry

内 容 简 介

本书从工程应用的角度,全面阐述概率、统计与随机过程的基本理论及其应用。全书共9章,首先简单介绍概率论,然后分别讨论随机变量、随机变量的函数、均值与矩、随机向量、统计(包括参数估计和假设检验)、随机序列、随机过程基础知识,最后讨论了统计信号处理中的相关应用。书中给出了大量电子和信息系系统相关实例,每章给出了丰富的习题。另外有两章的补充内容,读者可从网站下载阅读。

本书适合作为电子信息类专业本科生和研究生的“随机信号分析”或“随机过程及其应用”课程的教材,也可供从事相关技术领域研究的科技人员参考。

Authorized translation from the English language edition, entitled Probability, Statistics, and Random Processes for Engineers, Fourth Edition, 9780132311236 by Henry Stark, John W. Woods, published by Pearson Education, Inc., Copyright © 2012 by Pearson Education, Inc.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission from Pearson Education, Inc.

CHINESE SIMPLIFIED language edition published by PEARSON EDUCATION ASIA LTD., and PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY Copyright © 2015.

本书中文简体版专有出版权由 Pearson Education(培生教育出版集团)授予电子工业出版社。未经出版者预先书面许可,不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分。

本书封面贴有 Pearson Education(培生教育出版集团)激光防伪标签,无标签者不得销售。

版权贸易合同登记号 图字:01-2012-7120

图书在版编目(CIP)数据

概率、统计与随机过程:第4版/(美)斯塔克(Stark, H.)、(美)伍兹(Woods, J. W.)著;罗鹏飞等译。

北京:电子工业出版社,2015.4

(国外电子与通信教材系列)

书名原文:Probability, Statistics, and Random Processes for Engineers

ISBN 978-7-121-24805-4



I. ①概… II. ①斯… ②伍… ③罗… III. ①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 ③随机过程-高等学校-教材 IV. ①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第271065号

策划编辑:马 岚

责任编辑:李秦华

印 刷:涿州市京南印刷厂

装 订:涿州市京南印刷厂

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱 邮编 100036

开 本:787×1092 1/16 印张:31.5 字数:976千字

版 次:2015年4月第1次版(原著第4版)

印 次:2015年4月第1次印刷

定 价:79.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010)88258888。

序

2001年7月间,电子工业出版社的领导同志邀请各高校十几位通信领域方面的老师,商量引进国外教材问题。与会同志对出版社提出的计划十分赞同,大家认为,这对我国通信事业、特别是对高等院校通信学科的教学工作会很有好处。

教材建设是高校教学建设的主要内容之一。编写、出版一本好的教材,意味着开设了一门好的课程,甚至可能预示着一个崭新学科的诞生。20世纪40年代MIT林肯实验室出版的一套28本雷达丛书,对近代电子学科、特别是对雷达技术的推动作用,就是一个很好的例子。

我国领导部门对教材建设一直非常重视。20世纪80年代,在原教委教材编审委员会的领导下,汇集了高等院校几百位富有教学经验的专家,编写、出版了一大批教材;很多院校还根据学校的特点和需要,陆续编写了大量的讲义和参考书。这些教材对高校的教学工作发挥了极好的作用。近年来,随着教学改革不断深入和科学技术的飞速进步,有的教材内容已比较陈旧、落后,难以适应教学的要求,特别是在电子学和通信技术发展神速、可以讲是日新月异的今天,如何适应这种情况,更是一个必须认真考虑的问题。解决这个问题,除了依靠高校的老师 and 专家撰写新的符合要求的教科书外,引进和出版一些国外优秀电子与通信教材,尤其是有选择地引进一批英文原版教材,是会有好处的。

一年多来,电子工业出版社为此做了很多工作。他们成立了一个“国外电子与通信教材系列”项目组,选派了富有经验的业务骨干负责有关工作,收集了230余种通信教材和参考书的详细资料,调来了100余种原版教材样书,依靠由20余位专家组成的出版委员会,从中精选了40多种,内容丰富,覆盖了电路理论与应用、信号与系统、数字信号处理、微电子、通信系统、电磁场与微波等方面,既可作为通信专业本科生和研究生的教学用书,也可作为有关专业人员的参考材料。此外,这批教材,有的翻译为中文,还有部分教材直接影印出版,以供教师用英语直接授课。希望这些教材的引进和出版对高校通信教学和教材改革能起一定作用。

在这里,我还要感谢参加工作的各位教授、专家、老师与参加翻译、编辑和出版的同志们。各位专家认真负责、严谨细致、不辞辛劳、不怕琐碎和精益求精的态度,充分体现了中国教育工作者和出版工作者的良好美德。

随着我国经济建设的发展和科学技术的不断进步,对高校教学工作会不断提出新的要求和希望。我想,无论如何,要做好引进国外教材的工作,一定要联系我国的实际。教材和学术专著不同,既要注意科学性、学术性,也要重视可读性,要深入浅出,便于读者自学;引进的教材要适应高校教学改革的需要,针对目前一些教材内容较为陈旧的问题,有目的地引进一些先进的和正在发展中的交叉学科的参考书;要与国内出版的教材相配套,安排好出版英文原版教材和翻译教材的比例。我们努力使这套教材能尽量满足上述要求,希望它们能放在学生们的课桌上,发挥一定的作用。

最后,预祝“国外电子与通信教材系列”项目取得成功,为我国电子与通信教学和通信产业的发展培土施肥。也恳切希望读者能对这些书籍的不足之处、特别是翻译中存在的问题,提出意见和建议,以便再版时更正。



中国工程院院士、清华大学教授
“国外电子与通信教材系列”出版委员会主任

出版说明

进入 21 世纪以来,我国信息产业在生产和科研方面都大大加快了发展速度,并已成为国民经济发展的支柱产业之一。但是,与世界上其他信息产业发达的国家相比,我国在技术开发、教育培训等方面都还存在着较大的差距。特别是在加入 WTO 后的今天,我国信息产业面临着国外竞争对手的严峻挑战。

作为我国信息产业的专业科技出版社,我们始终关注着全球电子信息技术的发展方向,始终把引进国外优秀电子与通信信息技术教材和专业书籍放在我们工作的重要位置上。在 2000 年至 2001 年间,我社先后从世界著名出版公司引进出版了 40 余种教材,形成了一套“国外计算机科学教材系列”,在全国高校以及科研部门中受到了欢迎和好评,得到了计算机领域的广大教师与科研工作者的充分肯定。

引进和出版一些国外优秀电子与通信教材,尤其是有选择地引进一批英文原版教材,将有助于我国信息产业培养具有国际竞争能力的技术人才,也将有助于我国国内在电子与通信教学工作中掌握和跟踪国际发展水平。根据国内信息产业的现状、教育部《关于“十五”期间普通高等教育教材建设与改革的意见》的指示精神以及高等院校老师们反映的各种意见,我们决定引进“国外电子与通信教材系列”,并随后开展了大量准备工作。此次引进的国外电子与通信教材均来自国际著名出版商,其中影印教材约占一半。教材内容涉及的学科方向包括电路理论与应用、信号与系统、数字信号处理、微电子、通信系统、电磁场与微波等,其中既有本科专业课程教材,也有研究生课程教材,以适应不同院系、不同专业、不同层次的师生对教材的需求,广大师生可自由选择 and 自由组合使用。我们还将与国外出版商一起,陆续推出一些教材的教学支持资料,为授课教师提供帮助。

此外,“国外电子与通信教材系列”的引进和出版工作得到了教育部高等教育司的大力支持和帮助,其中的部分引进教材已通过“教育部高等学校电子信息科学与工程类专业教学指导委员会”的审核,并得到教育部高等教育司的批准,纳入了“教育部高等教育司推荐——国外优秀信息科学与技术系列教学用书”。

为做好该系列教材的翻译工作,我们聘请了清华大学、北京大学、北京邮电大学、南京邮电大学、东南大学、西安交通大学、天津大学、西安电子科技大学、电子科技大学、中山大学、哈尔滨工业大学、西南交通大学等著名高校的教授和骨干教师参与教材的翻译和审校工作。许多教授在国内电子与通信专业领域享有较高的声望,具有丰富的教学经验,他们的渊博学识从根本上保证了教材的翻译质量和专业学术方面的严格与准确。我们在此对他们的辛勤工作与贡献表示衷心的感谢。此外,对于编辑的选择,我们达到了专业对口;对于从英文原书中发现的错误,我们通过作者联络、从网上下载勘误表等方式,逐一进行了修订;同时,我们对审校、排版、印制质量进行了严格把关。

今后,我们将进一步加强同各高校教师的密切关系,努力引进更多的国外优秀教材和教学参考书,为我国电子与通信教材达到世界先进水平而努力。由于我们对国内外电子与通信教育的发展仍存在一些认识上的不足,在选题、翻译、出版等方面的工作中还有许多需要改进的地方,恳请广大师生和读者提出批评及建议。

电子工业出版社

教材出版委员会

主任	吴佑寿	中国工程院院士、清华大学教授
副主任	林金桐	北京邮电大学校长、教授、博士生导师
	杨千里	总参通信部副部长，中国电子学会会士、副理事长 中国通信学会常务理事、博士生导师
委员	林孝康	清华大学教授、博士生导师、电子工程系副主任、通信与微波研究所所长 教育部电子信息科学与工程类专业教学指导分委员会委员 清华大学深圳研究生院副院长
	徐安士	北京大学教授、博士生导师、电子学系主任
	樊昌信	西安电子科技大学教授、博士生导师 中国通信学会理事、IEEE 会士
	程时昕	东南大学教授、博士生导师
	郁道银	天津大学副校长、教授、博士生导师 教育部电子信息科学与工程类专业教学指导分委员会委员
	阮秋琦	北京交通大学教授、博士生导师 计算机与信息技术学院院长、信息科学研究所所长 国务院学位委员会学科评议组成员
	张晓林	北京航空航天大学教授、博士生导师、电子信息工程学院院长 教育部电子信息科学与电气信息类基础课程教学指导分委员会副主任委员 中国电子学会常务理事
	郑宝玉	南京邮电大学副校长、教授、博士生导师 教育部电子信息科学与工程类专业教学指导分委员会副主任委员
	朱世华	西安交通大学副校长、教授、博士生导师 教育部电子信息科学与工程类专业教学指导分委员会副主任委员
	彭启琮	电子科技大学教授、博士生导师
	毛军发	上海交通大学教授、博士生导师、电子信息与电气工程学院副院长 教育部电子信息与电气学科教学指导委员会委员
	赵尔沅	北京邮电大学教授、《中国邮电高校学报(英文版)》编委会主任
	钟允若	原邮电科学研究院副院长、总工程师
	刘彩	中国通信学会副理事长兼秘书长，教授级高工 信息产业部通信科技委副主任
	杜振民	电子工业出版社原副社长
	王志功	东南大学教授、博士生导师、射频与光电集成电路研究所所长 教育部高等学校电子电气基础课程教学指导分委员会主任委员
	张中兆	哈尔滨工业大学教授、博士生导师、电子与信息技术研究院院长
	范平志	西南交通大学教授、博士生导师、信息科学与技术学院院长

译 者 序

Henry Stark 是美国伊利诺伊理工学院荣誉教授, 长期致力于概率、统计与随机过程的课程教学及其相关的科学研究工作, 该书自 1986 年以来已先后出版了四个版本, 作者试图以浅显易懂、富有启发和有趣的方式为工科学生介绍概率、随机过程, 允许主讲教师灵活地选取教学内容, 除了概率、随机变量和随机过程课程中标准内容的介绍外, 书中还涉及了建模、基本统计技术、计算机模拟、可靠性、熵、马尔可夫链和排队论等。

在电子与计算机工程中遇到的系统复杂性要求学生不仅对概率论与随机过程的概念有深刻的理解, 而且也要求学生要有使用概率工具的能力, 因此, 入门性的课程不仅应该包含基本理论, 而且也应该能解决工程中的实际问题, 学生不仅要有解决问题的技能, 也要理解如何将实际问题转化为问题求解的概率模型, 理论与实际紧密结合。从实际问题到概率模型的转换方法有很多, 首先, 重要的概念通常都由展示的实际数据或计算机模拟数据建立起来; 其次, 书中选取了一部分基本的统计技术, 这一部分展示了统计方法在理论与实际之间的桥梁作用。最后, 重要的随机变量和随机过程都是通过建模时增加变量、从简单到复杂的方式建立起来。

启发和激励学生对于概率与随机过程的课程是一个很大的挑战, 这要求教师为学生展示概率和随机过程的理论与工程实际的联系。书中选择了大量的与现实生活相联系的实例, 如休闲娱乐中的游戏、选美、湖中鱼的数量估计, 公共服务中的入住问题、等车时间、客户服务时间, 可靠性理论中的设备故障率、备用冗余、多处理器的可靠性, 图像处理中的图像压缩、边缘检测、医学图像的疾病判定, 通信中的光电检测、通信误码率、分组交换、调制信号分析, 信号处理中的模数转换器、线性预测、滤波器分析、内插与抽取, 互联网中的网页排名等。书中还给出了大量的 MATLAB 程序, 并给出了部分需要采用 MATLAB 才能完成的作业。

与教材配合的网站给出了本书的两章扩展内容^①, 第 10 章为概率和随机过程的高级话题, 包括均方微积分、随机微分方程、遍历性、Karhunen-Loève 展开、带限过程和周期过程的表示等; 第 11 章为统计信号处理中的应用, 包括随机变量和随机向量的估计、新息序列和卡尔曼滤波、随机序列的维纳滤波、数学期望最大化(EM)算法、隐马尔可夫模型、谱估计、模拟退火算法等。网站上还包含了一部分演示概率论和随机过程概念的 MATLAB 程序^②。

本书每一章都有大量的例题来展示问题的求解技术, 通过问题简化来建立概念和说明其应用。书中包括了 700 多道习题, 每一章的最后还增加了一些附加题, 这些题需要阅读补充材料才能完成。在本书的网站上还给出了许多测试题和多项选择题, 这是作者 1988 - 2006 年在伊利诺伊理工学院任教期间为高年级本科生和研究生出的试题。

参与本书翻译的有罗鹏飞(第 1 章、第 2 章)、张文明(第 6 章、第 7 章)、谢晓霞(第 8 章、第 9 章)、许可(第 3 章、第 4 章、第 5 章、附录 A ~ 附录 G), 最后由罗鹏飞对全书的译文进行了校对和整理。

由于译者的水平有限, 文中难免有不当之处, 敬请读者批评指正。另外, 在本书即将付印之前, 收到了原作者的勘误表。我们对其逐一进行了修订。

^① 登录华信教育资源网(<http://www.hxedu.com.cn>)可下载本书第 10 章和第 11 章的内容(英文版)。

^② 采用本书作为教材的教师可获得本书的配套教辅, 请联系 010-88254555 或发邮件至 te_service@phei.com.cn 索取。

绪 言

当前的版本相对于前一版本有了相当大的改变，作者试图保持通俗易懂的风格，少用测度理论，也就是比测度理论方法少一点数学，但又比一般公式和手册指南多一份严谨。

人们都说概率很难理解，不仅是因为数学基础，而是因为它产生了许多与直观不相符的结果。在许多应用型的学生中，概率论有许多批评论调，在这些批评论调中，居首位的就是“我们为什么需要概率论呢？”这种批评很容易回答，因为未来的工程师和科学家将会认识到，几乎人类的每一次尝试都包含在不确定或者概率的环境中做出决定，像保险、气象、城市规划、医药等领域确实都是如此。另一种更有说服力的批评是：“如果概率论提供的答案不是确定的，而只是一种推断和可能，那么它又好在哪里呢？”这里的答案就是，即使在不确定的领域里，也可以做许多好的计划和精确的预测。此外，应用概率——常常也称为统计学，确定提供了几乎确定的结果：在政治性民意测验和预测中就提供了有力的证据。

在前一版本中，我们只是稍微涉及了统计学的领域，更强调随机过程和信号处理领域。在本书的电子版中，研究生级的信号处理、随机过程的高级话题讨论与统计学方面的新材料一起被保留下来，而在本书中，我们删除了统计信号处理的应用、随机过程的高级话题以及模式识别入门资料的那些章节。

目前的版本用了很多说明性的例子和详细的讨论，尽了很大的努力使学生能够理解概念。我们把一些短语的应用降到最小程度，如“很容易证明……”、“可以证明……”、“容易看出……”，等等。我们尝试提供一些现实中的例子，如“药效”、“传染的可能性”、“赌博中赢的几率”，以及数字通信、网络和信号等。

另一个主要的变化是增加了统计学基础及其在现实中的应用两章内容，第一部分讨论参数估计，第二部分讨论假设检验。工程中有许多问题涉及参数估计，例如，从估计一个新方案的优点到估计计算机之间的交通信号的数量，此外，许多工程活动都需要在随机环境中做出判决，从决定一个新药是否有效，到判定一种新的教学方法是否有效。用详细的实例介绍和讨论了一些标准统计工具的来源和应用，如 t 检验、 χ^2 检验和 F 检验等，在每章最后还给出了对应的习题。

最后，在本书的网站上还给出了许多测试题和多项选择题，这是其中一位作者于 1988 年至 2006 年间在伊利诺伊理工学院任教期间为高年级本科生和研究生出的试题。网站也包含了一部分演示概率论概念的 MATLAB 程序。

总而言之，熟悉第三版的读者将会看到下列明显的变化：

- 在统计学的分支方面增加了称为“参数估计”的新的一章，并给出了许多说明性的例题。
- 在统计学的分支方面增加了称为“假设检验”的新的一章，并给出了许多说明性的例题。
- 给出了大量新的习题，习题的难度不同，用以检验学生对统计学原理的掌握。
- 在网站上给出了大量的测试题和多项选择题，并在每一章给出了标准解答。

- 从概率与统计的应用领域选取了许多应用实例。
- 更多地借助计算机来辅助教学，例如，(i) 概率现象的图形显示；(ii) 利用 MATLAB 程序来说明概率论的一些概念；(iii) 部分作业要求使用 MATLAB 或 Excel。
- 许多来自学生反馈的问题，在文中已经过修改，从而促进学生对教材难点问题的理解。

Henry Stark
John W. Woods

目 录

第 1 章 概率论导论	1
1.1 引言:为什么要学习概率论	1
1.2 概率的不同类型	1
1.3 概率的误用、误算和悖论	4
1.4 集合、域和事件	6
1.5 概率的公理化定义	10
1.6 联合概率、条件概率、全概率和独立性	14
1.7 贝叶斯定理及应用	25
1.8 组合	27
1.9 伯努利试验:二项式和多项式概率分布	35
1.10 二项式概率分布的渐近特性:泊松分布	41
1.11 二项式分布近似为正态分布	45
小结	47
习题	48
参考文献	55
第 2 章 随机变量	56
2.1 引言	56
2.2 随机变量的定义	56
2.3 累积分布函数	59
2.4 概率密度函数(pdf)	62
2.5 连续型、离散型和混合型随机变量	70
2.6 条件和联合分布函数和概率密度函数	76
2.7 故障率	97
小结	100
习题	100
参考文献	105
补充文献	105
第 3 章 随机变量的函数	106
3.1 引言	106
3.2 $Y = g(X)$ 型问题的求解	109
3.3 $Z = g(X, Y)$ 型问题的求解	120
3.4 $V = g(X, Y), W = h(X, Y)$ 型问题的求解	136
3.5 补充例子	142

小结	146
习题	146
参考文献	152
补充文献	152
第4章 数学期望和矩	153
4.1 随机变量的数学期望	153
4.2 条件期望	166
4.3 随机变量的矩	173
4.4 切比雪夫和施瓦茨不等式	184
4.5 矩量生成函数	188
4.6 切尔诺夫限	190
4.7 特征函数	192
4.8 一些补充例子	204
小结	205
习题	206
参考文献	213
补充文献	213
第5章 随机向量	214
5.1 联合分布和联合密度	214
5.2 随机变量的多重变换	217
5.3 有序随机变量	220
5.4 期望向量和协方差矩阵	227
5.5 协方差矩阵的性质	229
5.6 多维高斯(正态)分布	233
5.7 随机向量的特征函数	240
小结	243
习题	244
参考文献	248
补充文献	248
第6章 参量估计	249
6.1 引言	249
6.2 估计器	253
6.3 均值估计	254
6.4 方差和协方差估计	260
6.5 均值和方差的同时估计	264
6.6 大数据量时非高斯参量估计	266
6.7 最大似然估计	268
6.8 排序, 百分点, 参数与非参数统计	271

6.9	向量均值和协方差阵的估计	276
6.10	向量参数的线性估计	279
	小结	281
	习题	282
	参考文献	284
	补充文献	285
第7章	假设检验	286
7.1	贝叶斯判决理论	286
7.2	似然比检验	290
7.3	复合假设	295
7.4	拟合度	306
7.5	排序, 百分点及排名	310
	小结	317
	习题	318
	参考文献	321
第8章	随机序列	323
8.1	基本概念	323
8.2	离散时间线性系统基础	343
8.3	随机序列与线性系统	348
8.4	WSS 随机序列	354
8.5	马尔可夫随机序列	365
8.6	向量随机序列和状态方程	373
8.7	随机序列的收敛	375
8.8	大数定理	380
	小结	384
	习题	384
	参考文献	393
第9章	随机过程	394
9.1	基本定义	394
9.2	一些重要的随机过程	397
9.3	具有随机信号输入的线性连续系统	416
9.4	一些关于随机过程的有用分类	420
9.5	广义平稳随机过程和 LSI 系统	421
9.6	周期和循环平稳过程	436
9.7	向量过程和状态方程	440
	小结	443
	习题	443
	参考文献	457

附录 A	相关数学知识复习	458
附录 B	伽马函数和 δ 函数	471
附录 C	函数变换与雅可比行列式	474
附录 D	测度和概率	478
附录 E	对模拟波形的采样和离散时间信号	481
附录 F	正态随机变量样本均值和方差的独立性	483
附录 G	累积分布函数查询表: 正态分布, t (学生)分布, Chi 平方分布和 F 分布	485

网上章节(英文版)^①

第 10 章 概率和随机过程的高级话题(Advanced Topics in Random Processes)

- 10.1 均方微积分(Mean-Square Calculus)
- 10.2 均方随机积分(Mean-Square Stochastic Integrals)
- 10.3 均方随机微分方程(Mean-Square Stochastic Differential Equations)
- 10.4 遍历性(Ergodicity)
- 10.5 Karhunen-Loève 展开(Karhunen-Loève Expansion)
- 10.6 带限过程和周期过程的表示(Representation of Bandlimited and Periodic Processes)
- 小结(Summary)
- 附录:积分方程(Appendix: Integral Equations)
- 习题(Problems)
- 参考文献(References)

第 11 章 统计信号处理中的应用(Applications to Statistical Signal Processing)

- 11.1 随机变量和随机向量的估计(Estimation of Random Variables and Vectors)
- 11.2 新息序列和卡尔曼滤波(Innovation Sequences and Kalman Filtering)
- 11.3 随机序列的维纳滤波(Wiener Filters for Random Sequences)
- 11.4 数学期望最大化算法(Expectation-Maximization Algorithm)
- 11.5 隐马尔可夫模型(Hidden Markov Models)
- 11.6 谱估计(Spectral Estimation)
- 11.7 模拟退火算法(Simulated Annealing)
- 小结(Summary)
- 习题(Problems)
- 参考文献(References)

^① 登录华信教育资源网(<http://www.hxedu.com.cn>)可免费下载。

第 1 章 概率论导论

1.1 引言：为什么要学习概率论

初学概率论的学生问得最多的问题是：随机的本质是什么？真正的随机与由于信息缺乏而当成随机有何区别？首先考虑有关随机现象的问题。“随机现象存在吗？”当我们用天文望远镜观测宇宙时，可看到许多星系、恒星、行星组成的巨大阵列，以明显的随机顺序和位置排列。

从另一个极端来说，宇宙的尺寸在原子级又会怎样呢？我们的朋友，物理学家们把这样的事情说成是原子系统处于某种状态的概率，不确定性原理告诉我们，粒子的位置和动量能够同时被测定的精度是有限制的，两个量是模糊的和不确定性的。

包括一些著名的物理学家在内的许多人都相信，自然界的本质是随机的。欧根 (Eugen Merzbacher) 在他的量子力学的著名教科书^[1-1]中写道：

量子力学的概率理论认为，刚才那个例子所说的不确定性是自然界固有的特性，不仅仅是专业的暂时缺乏，需要在未来有更好和更完善的理论去解决。这一常规的解释否认了那种包含当前量子力学的、没有瑕疵的理想理论的可能性，量子力学最难听的词“不完美”就是对严格经典的确定性的抛弃。

然而，在讨论概率方法的合理性时，确定性与固有的不确定性问题是永远也不需要考虑的。事实上有数不清的情况，在考虑一个现象时无法做出明确的结论，因为观测不到所有对该现象做出贡献的所有因素。例如，预测电阻 R 由热引起的噪声电流 $i(t)$ ，毫无疑问，如果持续跟踪大约 10^{23} 个受激电子在彼此磁场中的移动并产生本地场脉冲，这些本地场脉冲最终对产生电流做出贡献，就能精确地预测未来某个时刻的电流 $i(t)$ ，这样的计算是不可思议的，因此使用概率模型而不是麦克斯韦方程来处理电阻噪声。类似的话题还有气象预测、投掷一枚真实硬币的结果、计算机失效时间、CMOS 成像器的暗电流等。我们得出结论：确定性与非确定性，无论你站在哪一边，在现实生活中都被迫采用概率模型，因为我们不知道，也不可能计算和测量所有对事件做出贡献的力，这种力太复杂、太多、也太微弱。

概率是一种帮助我们用平均研究物理系统的数学模型，我们应该能够在相同条件下重复实验。因此，诸如“彗星明天撞击地球的可能性是多少？”或者“其他行星上存在生命的可能性有多大？”，这样的问题绝不要用概率来回答，这里的问题是我们没有过去的类似的“实验”数据。

费希尔 (R. A. Fisher) 和米泽斯 (R. von Mises) 在 20 世纪早期对建立现代概率论的基本理论做出了重要贡献，本书许多现代公理化的处理大都是依据科尔莫戈罗夫^[1-2] (Andrei N. Kolmogorov) 工作的结果。

1.2 概率的不同类型

有四种基本的概率类型，这里将简要进行讨论。

直观概率

这类概率是基于直观来处理 and 判断的。这样,“她可能与他结婚”和“他可能开得太快”就属于这一类。直观概率会得出一些矛盾的特性。乔(Joe)仍有可能买进口的 Itsibitsi, 因为它的可靠性在全球是著名的, 即使他的邻居弗兰克(Frank)有一辆使用了 19 年从未抛过锚的别克汽车, 而且乔的另一个邻居比尔(Bill)在修理店也有一辆 Itsibitsi。这样, 乔自然会通过统计进行“合理的”推断, 而忽略了它的个人观测。另一方面, 如果弗兰克说比尔认为他或许在当地的池塘看见了鳄鱼, 那么, 乔就会对他九岁女儿在那个池塘游泳担忧。尽管事实是没有人说曾经在这个池塘看见过鳄鱼, 无数的人在那个池塘游泳也没有被鳄鱼咬过。为了给这个例子以某种可信度, 假定池塘是在佛罗里达州。这里, 乔忽略了统计而对谣传做出了反应。为什么? 可能是因为池塘里有鳄鱼的“意外事情”对乔的代价太高^[1-3]。

购买彩票的人直观地相信某些数的组合, 如他们孙子的生日, 要比 06-06-06 更容易中奖。很多人会根据在之前的行为下注, 如果一个硬币在前 7 次的投掷都是正面, 那么下一次投掷是否仍为正面? 许多人都认为硬币有某种记忆, 因此, 在 7 次正面后, 在接下来的投掷中硬币出现更多的反面是很正常的事情。

处理直观概率的数学理论是由库普曼(B. O. Koopman)建立的^[1-4], 但在本书不讨论这个内容。

古典概率

在这一方法中, 事件的概率不是实验性的, 而是通过预先计算事件 E 可能发生的次数 n_E , 形成一个比值 n_E/n , 其中 n 是所有可能的结果, 也就是事件 E 发生的次数与其他次数的总和 n_E 。这里应注意的是所有结果是等可能的。假定掷一对无偏的六面骰子, 问得到 7 的概率是多少。我们将结果空间划分为 36 个等可能的结果, 如表 1.2-1 所示, 表中每一个结果是两个骰子数之和。

表 1.2-1 投掷的结果
两个骰子

第二个骰子	第一个骰子					
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

投掷结果总数是 36, 得到 7 的次数是 6。因此

$$P[\text{得到 } 7] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

例 1.2-1 (掷一枚均匀硬币两次)可能的结果是 HH, HT, TH 和 TT, 至少得到一次反面的概率计算如下: 用 E 表示至少得到一次反面的事件, 则 E 是下列结果的集合:

$$E = \{HT, TH, TT\}$$

这样, 无论结果是 HT 或者 TH 或 TT 事件, 事件 E 都发生。事件 E 元素的个数是 $n_E = 3$, 实

验结果总数 N 是 4, 因此

$$P[\text{至少一次反面}] = \frac{n_E}{n} = \frac{3}{4}$$

注意, 由于没有涉及物理实验, 假定理想的“均匀硬币”是没有问题的, 在古典概率中, 每一个实验都没认为是“公平”的。

古典概率至少会遇到两个问题: (1) 它不能处理实验结果不是等可能的情况; (2) 它不能处理实验结果是无穷大的情况, 即 $n = \infty$ 的情况。然而, 在那些不可能通过实验去确定实验结果概率的情况下, 以及确实对等可能实验结果有争论的情况下, 古典概率是有用的。

从历史上看, 古典概率的前身是米泽斯^[1-6]在 20 世纪 30 年代建立的相对频率的方法。

频率作为概率的测度

相对频率的方法定义事件 E 的概率要进行 n 次重复实验, 事件 E 发生的次数用 n_E 表示, 那么, 事件 E 发生的概率定义为

$$P[E] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_E}{n} \quad (1.2-1)$$

很显然, 由于 $n_E \leq n$, 所以, $0 \leq P[E] \leq 1$ 。这一方法的困难在于我们不可能做无穷多次实验, 所以, 只能从有限次实验去估计 $P[E]$ 。其次, 假定当 n 趋向无穷时 n_E/n 趋向于一个极限, 但是, 考虑投掷 1000 次均匀硬币, 精确地得到 500 次正面的可能性是非常小的; 事实上, 如果投掷 10 000 次, 得到 5000 次正面的可能性甚至会更小。当 $n \rightarrow \infty$ 时, 精确地观测到 $n/2$ 次正面的事件变得非常小, 但是, 对于均匀硬币, 我们的直观要求 $P[\text{正面}] = 1/2$ 。假定选择一个 $\delta > 0$, 如果硬币确实是均匀的, 那么, 通过实验发现, 随着 n 变得很大

$$\left| \frac{n_E}{n} - \frac{1}{2} \right| > \delta \quad (1.2-2)$$

的次数将变得很小。这样, 尽管在实验的任何阶段, 特别是当 n 很大时, n_E/n 精确地等于 $1/2$ 是不可能的, 这个比值永远都在 $1/2$ 上下徘徊。根据式(1.2-2), 偏离 $1/2$ 附近的次数确实变得很小。

用相对频率定义概率尽快存在这些, 但在将概率论应用于现实世界时, 相对频率的概念仍是很重要的。

例 1.2-2 (random.org) 互联网的一个随机数源是 RANDOM.ORG, 这是由爱尔兰都柏林的圣三一学院的计算机与统计学院的一个教授建立的, 他依据大气噪声的函数来计算随机数, 并且通过了随机性真实的许多统计检验。利用该网站的免费服务, 下载了 10 000 个随机数, 每一个随机数等可能地在 1 ~ 100 取值, 写了一个 MATLAB 函数 RelativeFrequencies(), 利用该函数读取随机数文件并画出比值 n_E/n 与实验次数 n 的曲线, $n = 1, \dots, 10\,000$ 。选择事件 E 表示 100 个数中任意一个数的出现。例如 $E \triangleq \{\text{数字 5 出现}\}$ 。次数 n_E 表示到 n 次实验中数字 5 出现的次数, 得出的输出如图 1.2-1 所示, 图中可以看出, 对于 100 个等可能的数, 它有收敛到理想值 $0.01 = 1/100$ 这样一个趋势。图 1.2-2 给出了数字选择为 23 时的图形, 它同样也有收敛到 0.01 的趋势。在两种情况下, 我们注意到对于任意的 n , 尽管这种收敛值并不是精确的, 但是它还是收敛到理想值的附近。

这个程序放在本书的网站上。

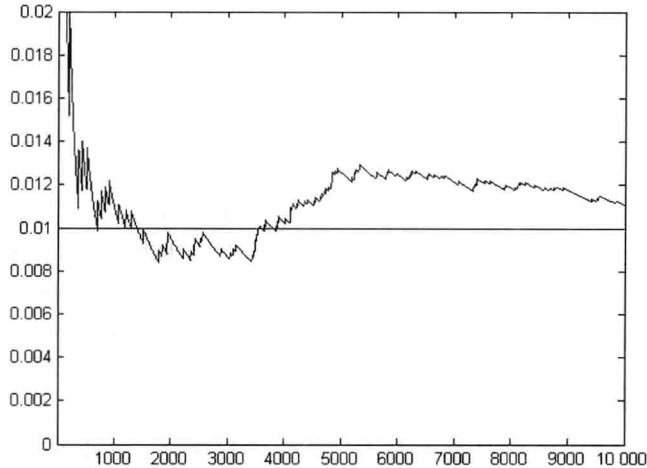


图 1.2-1 从大气噪声画出的 $E = \{\text{数字 5 出现}\}$ 的 $n_E/n \sim n$ 图(引自网站 RANDOM.ORG)

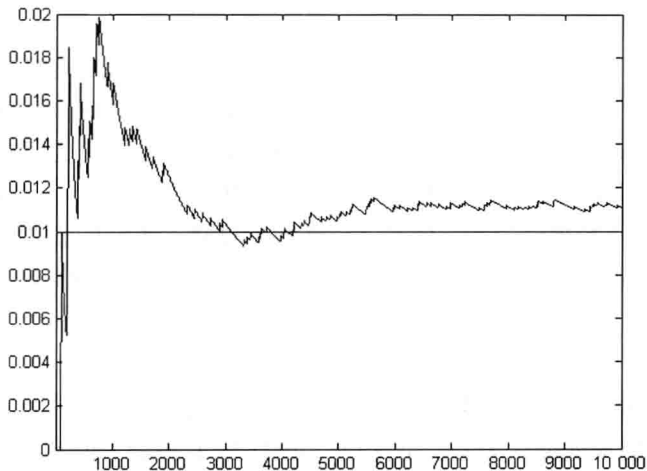


图 1.2-2 从大气噪声画出的 $E = \{\text{数字 23 出现}\}$ 的 $n_E/n \sim n$ 图(引自网站 RANDOM.ORG)

基于公理化理论的概率

公理化方法是出现在大多数近代的教材中。为了建立这一理论,我们必须引入某些概念,特别是诸如随机实验、样本空间、事件。简单地说,随机实验是一种实验结果带有不确定性的实验,在每次实验中,实验的可能结果不止一个,这也是随机实验中“随机”这个词的由来;样本空间是随机实验所得结果的集合;事件是样本空间中满足某些约束的子集,例如,我们希望能够计算每个事件的概率。此外,在不可数或者连续的样本空间的情况下,对那些有技术约束的子集也叫做事件;只有一个实验结果的事件称为基本事件。这些术语将在 1.4 节和 1.5 节进行更为详细的解释。

1.3 概率的误用、误算和悖论

在日常生活中概率的误用是很常见的,下面给出一些误用的例子。考虑一个谋杀案的被告,对谋杀他妻子一案并不认罪,被告打他妻子有很大的偶然性。他的律师辩护说,被告确实