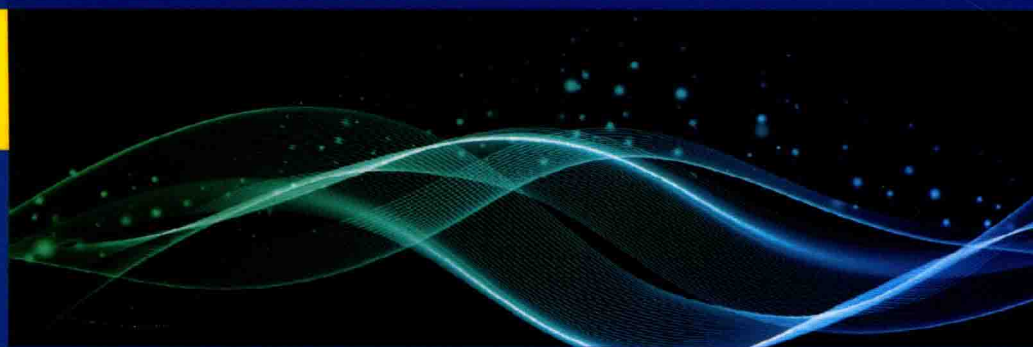


非线性演化方程分离变量的 直接构造法及其应用

戴朝卿 张解放 著



科学出版社

非线性演化方程分离变量的 直接构造法及其应用

戴朝卿 张解放 著



科学出版社

北京

内 容 简 介

本书主要介绍应用直接代数法构造非线性演化方程分离变量解, 书中应用近些年新发展起来构造非线性演化方程行波解的符号计算方法(如齐次平衡法、Riccati 方程映射法、投影 Riccati 方程映射法及其扩展方法)从不同角度阐释了非线性演化方程分离变量解的构造理论, 探讨了不同方法构造出的分离变量解的等价性, 并重点研究了几类具有代表性的非线性演化方程分离变量解的构造过程. 本书不仅拓展(补充)了非线性分离变量方法, 而且深入研究了不同孤立波的传播与控制等问题, 在展示这些非线性系统丰富而奇特的动力学特征的同时还分析了局域激发构建需注意的问题. 为高等院校和科研机构的数学物理、凝聚态物理、流体动力学、等离子体物理、非线性光学等专业的科研工作者和研究生提供重要的富有启发的参考.

本书可作为高等院校和科研机构的数学、物理、力学、光学等专业的研究生和高年级本科生学习非线性科学的教材, 也为从事理论物理、数学物理和工程等方面研究的科技工作者提供了一本实用的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

非线性演化方程分离变量的直接构造法及其应用/戴朝卿, 张解放著. —北京: 科学出版社, 2015.7

ISBN 978-7-03-045225-2

I. ①非… II. ①戴… ②张… III. ①非线性方程-分离变量法
IV. ①O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 166778 号

责任编辑: 钱 俊 胡庆家 / 责任校对: 彭 涛

责任印制: 徐晓晨 / 封面设计: 迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京京华虎彩印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 7 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5

2015 年 7 月第一次印刷 印张: 10 1/8

字数: 197 000

定价: 58.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

自然现象从本质上讲是非线性的, 工程技术等应用领域对非线性相关理论的迫切需求使得数学物理中的非线性问题成为当今各领域科学家最为关注的热点问题之一. 为了理解各种非线性问题的物理机理, 众多学者建立了若干非线性模型. 描述随时间而演变的过程的非线性模型通常被称作非线性演化方程或非线性发展方程. 非线性演化方程不同形式解的构造对于物理、工程、气象学、生命科学等诸多研究领域相关现象的动力学特性研究来说相当重要.

在非线性演化方程求解研究中有许多可行的方法, 其中一种重要的方法是多线性分离变量法, 该方法成功地将线性问题研究领域中的分离变量法推广到了非线性研究领域, 实现了独立变量的真正分离. 近年来的研究表明直接代数法也可以用来求解非线性演化方程, 并获得分离变量解. 本书是一本直接代数法构造非线性演化方程分离变量解的专著, 系统阐述了如何运用近些年新发展起来构造行波解的符号计算方法 (如齐次平衡法、Riccati 方程映射法、投影 Riccati 方程映射法及其扩展方法) 来构造非线性演化方程的分离变量解, 从不同角度展示了非线性演化方程分离变量解的构造过程, 有效拓展了非线性分离变量方法. 本书的亮点之一是系统总结了非线性演化方程实现分离变量的几种直接代数方法, 并详细阐述了各种直接方法构造的分离变量解间的联系, 阐明了一些貌似独立的解其实相互联系, 对非线性演化方程解的探索方法给出了重要的启示. 本书的亮点之二是分析了分离变量解局域激发构建需注意的问题, 为更好地构建局域激发提供依据.

本书的出版得到了国家自然科学基金 (批准号: 1067214, 11072219 和 11375007)、浙江省自然科学基金 (批准号: LY13F050006) 以及浙江农林大学“青年拔尖人才”培育计划的资助.

感谢郑春龙教授、方建平教授、朱海平教授、马正义教授、马松华教授、黄文华教授、来娴静博士、王悦悦博士及其他学术同行们与我们的学术研讨、交流. 作者欢迎各位同行和读者交流与本书相关的学术问题, 电子邮箱: dcq424@126.com.

最后, 感谢审稿专家的指导, 期待尊敬的同行专家和读者的赐教.

戴朝卿
浙江农林大学
张解放
浙江传媒学院
2015 年 5 月

目 录

前言

第 1 章 绪论	1
1.1 几个基本概念	1
1.1.1 线性与非线性方程	1
1.1.2 线性与非线性微分方程	1
1.1.3 偏微分方程的分类	1
1.1.4 偏微分方程的解及其叠加性	2
1.2 非线性演化方程概览	3
1.3 非线性演化方程的局域结构	6
1.3.1 1+1 维非线性演化方程的孤子结构	6
1.3.2 2+1 维非线性演化方程的相干结构	14
1.3.3 3+1 维非线性演化方程的相干结构	19
1.4 几类非线性演化方程的导出	20
1.4.1 柱坐标系下变系数 KP 方程的导出	20
1.4.2 DS 方程的导出	23
1.4.3 3+1 维非线性薛定谔方程的导出	28
第 2 章 非线性演化方程研究方法概述	34
2.1 基本方法简述	34
2.2 多线性分离变量法	38
2.3 基于直接代数法的分离变量法	40
第 3 章 齐次平衡法构造分离变量解	42
3.1 齐次平衡法概述	42
3.2 1+1 维非线性演化方程的分离变量解	43
3.3 2+1 维非线性演化方程的分离变量解	46
3.4 3+1 维非线性演化方程的分离变量解	56
第 4 章 Riccati 方程映射法构造分离变量解	59
4.1 Riccati 方程映射法概述	59
4.2 1+1 维非线性演化方程的分离变量解	62
4.3 2+1 维非线性演化方程的分离变量解	66
4.3.1 幂次形式预解求分离变量解	66
4.3.2 对称形式预解求分离变量解	76
4.3.3 根号形式预解求分离变量解	80

4.4	3+1 维非线性演化方程的分离变量解	86
第 5 章	投影 Riccati 方程映射法构造分离变量解	89
5.1	投影 Riccati 方程映射法概述	89
5.2	1+1 维非线性演化方程的分离变量解	91
5.3	2+1 维非线性演化方程的分离变量解	96
5.4	3+1 维非线性演化方程的分离变量解	105
第 6 章	两种扩展方法构造分离变量解	107
6.1	扩展 Riccati 方程映射法构造分离变量解	107
6.1.1	方法概述	107
6.1.2	扩展形式一	108
6.1.3	扩展形式二	113
6.1.4	扩展形式三	121
6.2	扩展投影 Riccati 方程映射法构造分离变量解	123
6.2.1	方法概述	123
6.2.2	扩展形式一	125
6.2.3	扩展形式二	127
第 7 章	各种方法构造分离变量解的联系	131
7.1	Riccati 方程映射法与多线性分离变量法构造的解间的联系	131
7.1.1	幂次形式解与多线性分离变量法构造的解间的联系	131
7.1.2	对称形式解与多线性分离变量法构造的解间的联系	131
7.1.3	根号形式解与多线性分离变量法构造的解间的联系	132
7.2	投影 Riccati 方程映射法与多线性分离变量法构造的解间的联系	132
7.3	扩展 Riccati 方程映射法与多线性分离变量法构造的解间的联系	133
7.3.1	扩展形式一的方法与多线性分离变量法构造的解间的联系	133
7.3.2	扩展形式二的方法与多线性分离变量法构造的解间的联系	133
7.3.3	扩展形式三的方法与多线性分离变量法构造的解间的联系	134
7.3.4	不同 Riccati 方程的相互转化关系	134
7.4	扩展投影 Riccati 方程映射法与多线性分离变量法构造的解间的联系	135
7.4.1	扩展形式一的方法与多线性分离变量法构造的解间的联系	135
7.4.2	扩展形式二的方法与多线性分离变量法构造的解间的联系	135
第 8 章	非线性分离变量法需注意的几个问题	136
8.1	非线性分离变量法不能求解一些典型方程	136
8.2	一些非线性演化方程的分离变量解构建局域激发需注意的问题	136
8.2.1	非传播孤子构建需注意的问题	137
8.2.2	周期波结构构建需注意的问题	141
参考文献		148

第1章 绪 论

1.1 几个基本概念

1.1.1 线性与非线性方程

解决实际问题的第一步是对系统建模,其核心是建立变量间的函数关系.任何一个系统(或模型)都是由各种变量构成的,当我们分析这些系统(或模型)时,可以选择研究其中一些变量对另一些变量的影响,那么选择的这些变量就称为自变量,而被影响的量就被称为因变量.如 $y = f(x)$ 中, y 随 x 的变化而变化, x 是自变量, y 是因变量.

线性方程指因变量与自变量之间满足线性关系,如 $y = kx$. 线性方程也称一次方程,因为在笛卡儿坐标系上任何一个一次方程的表示都是一条直线. 非线性方程就是因变量与自变量之间的关系不是线性关系,这类方程很多,如平方关系、对数关系、指数关系、三角函数关系等.

1.1.2 线性与非线性微分方程

线性微分方程是指关于未知函数及其各阶导数都是一次方的方程,否则称其为非线性微分方程. 如果一个微分方程中出现的未知函数只含一个自变量,这个方程叫做常微分方程,也简称微分方程. 如果一个微分方程中出现多元函数的偏导数,或者说如果未知函数和几个变量有关,而且方程中出现未知函数对几个变量的导数,那么这种微分方程就是偏微分方程. 以下这些都是非线性偏微分方程: $u_{tt} + u_{yy} + u_{tt} = -u^2$, $u_{tt} + uu_t = 0$, $u_{tt} + u_{yy} = \sin u$ 等,其中 x, y, t 是自变量, u 是因变量.

1.1.3 偏微分方程的分类

按自变量的个数,将偏微分方程分为二元和多元方程. 按方程中未知函数导数的最高阶数,偏微分方程可分为一阶、二阶和高阶偏微分方程. 按未知函数及其导数的系数是否变化,偏微分方程可分为常系数和变系数偏微分方程. 如方程 $xu_{tt} + u_{yy} = \sin y$ 是一个三元二阶变系数线性偏微分方程,注意这是个线性偏微分方程,如果将该方程的等式右边替换为 $\sin u$,则该方程为非线性偏微分方程.

通常,非线性方程包含非线性常微分方程(对未知函数及其导数都不全是线性的或一次式的常微分方程),非线性偏微分方程(对未知函数及其偏导数都不全是线

性的或一次式的偏微分方程), 非线性差分方程 (又称为非线性映射或非线性迭代, 它通常是非线性常微分方程或偏微分方程的离散形式, 它对未知函数的 n 次迭代值都不全是线性的或一次式的) 和函数方程 (一个函数自身或多个函数之间满足的一个代数关系式).

下面着重区分动力方程与演化方程. 按时间和空间变量来划分, 可将对实际问题建模得到的方程分为动力方程与演化方程. 所谓动力方程指的是系统因变量只和时间自变量有关, 这类方程用常微分方程来描述. 所谓演化方程指的是系统因变量与时间和空间 (位置) 自变量都有关, 这类方程用偏微分方程来描述. 本书主要研究的是非线性演化方程 (nonlinear evolution equation).

1.1.1.4 偏微分方程的解及其叠加性

由若干个偏微分方程所构成的等式组就称为偏微分方程组, 其未知函数也可以是若干个. 当方程的个数超过未知函数的个数时, 就称这偏微分方程组为超定的; 当方程的个数少于未知函数的个数时, 就称为欠定的.

如果一个偏微分方程 (组) 关于所有的未知函数及其导数都是线性的, 则称为线性偏微分方程 (组); 否则, 称为非线性偏微分方程 (组). 在非线性的偏微分方程 (组) 中, 如果对未知函数的最高阶导数来说是线性的, 那么就称为拟线性偏微分方程 (组).

设 Ω 是自变数空间 R 中一个区域, u 是在这个区域上定义的具有任意阶连续导数的函数. 如果它能使偏微分方程在 Ω 上恒等成立, 那么就称 u 是该方程在 Ω 中的一个经典意义下的解.

线性偏微分方程的解具有叠加原理, 即, 如果 u_1, u_2 是一个线性偏微分方程的解, 则对任意常数 C_1 和 C_2 , $C_1 u_1 + C_2 u_2$ 也是该方程的解. 但是, 非线性偏微分方程不具有解的叠加性.

一个线性偏微分方程通常有无穷多个解, 但是解决具体物理问题的时候, 方程的解必须要满足的事先给定的条件叫做定解条件. 一个方程配备上定解条件就构成一个定解问题. 常见的定解条件有初始条件 (或柯西条件) 和边界条件两大类, 相应的定解问题叫初值问题 (或柯西问题) 和边值问题. 初值问题或边值问题的解 (或称古典解) 是指这样的函数: 它在区域的内部具有方程中出现的一切连续偏微商, 而本身在区域的闭包上连续 (有时根据具体问题的性质或边界条件的类型, 也要求有关的偏微商连续到边界), 它满足方程, 并且当时间变量趋于初始时刻时或空间变量趋于区域的边界时, 它 (有时及其有关的偏微商) 连续地取到给定的初始值或边界. 除了古典解之外, 还可能会有其他的解, 称为广义解.

1.2 非线性演化方程概览

波动是自然界中最常见的现象之一,其理论、研究方法及其应用遍及包括物理学、数学、力学、光学、化学、生物学、地理学等自然科学领域,而且也已渗透到经济学和社会学等社会科学领域.广义地讲,如果一个偏微分方程具有能描述波动现象的解,那么这个方程就被称为波动方程.

一般情况下,波动方程同时含有时间和空间变量,因此它是一类重要的时空动力学系统.早期,由于人类认识的局限性、研究手段的限制性和处理实际问题的精度要求不高,往往将一个实际的波动问题进行简单的和理想化的假设,从而得出较容易研究的线性化模型,如弦振动方程、热传导方程等.线性化模型满足解的叠加原理.可以说,叠加是用来解决所有线性问题的系统方法的关键,如傅里叶变换和拉普拉斯变换都与解能够叠加有关,也就是能把问题分成许多小问题,然后把分离的解加起来而得到整个问题的解.另外,变量分离方法也是求解线性波动问题最为常用的方法.线性波动方程的求解问题已经得到很好的解决.

随着人类认识的深入和科学技术水平的提高,人们越来越发现自然科学和工程技术中普遍存在各自的非线性问题,其非线性效应可以产生本质上全新的一些物理现象,称之为非线性现象.这些现象的定量描述,用线性化模型已不能完全反映客观的真实世界的波动问题,应该取而代之为各种不同的描述随时间演变过程的非线性模型,即非线性波动方程,也称为非线性演化方程^[1, 2].这些方程能反映各种因子或各种物理量之间相互制约和相互依存的关系.

与线性模型不同,非线性模型不服从叠加原理,而且遵循着复杂的运动规律,不能或者至少不能明显地把非线性问题分解成一些小的子问题而把它们的解叠加起来,而必须整体地考虑非线性演化方程.在一般情况下,人们不能靠直觉和简单计算来判断非线性系统的运动特征,特别是当动力学系统的维数越高,耦合程度越强,问题的研究就越复杂和困难.

对于非线性演化方程,人们需要知道,它是否较好地描述了要描述的客观现象;它所揭示的运动规律是如何演化的;一个量或参数对运动规律的影响又有多大?诸如此类问题的解决都涉及对非线性演化方程解的研究.非线性演化方程解的研究一般是从以下三个方面进行的:其一,在难以求得显式解的情形下,对解的适定性(存在性、唯一性和稳定性)进行分析;其二,借助于计算数学理论和计算机技术,对解进行数值模拟和分析;其三,应用某些数学技巧或假设,构造适当的变换使方程简化并求出某些显式解.尽管这三个方向对非线性演化方程研究的切入点和适用方法不同,但它们都在探索解的变化规律中推动着非线性物理的发展.

非线性科学就是五十多年来在综合各门以非线性特征的科学研究基础上逐步

形成的旨在揭示非线性系统的共同特征和运动规律的一门跨学科的综合性科学. 继牛顿力学和量子力学之后发展起来的非线性科学正在改变人们对世界的看法, 形成一种新的科学观点, 促进了一大类新兴学科的诞生和发展, 极大地影响着现代科学的逻辑体系. 非线性科学研究的主要范畴是混沌 (chaos)、分形 (fractal)、孤立子 (soliton) 和斑图 (pattern), 也包括神经网络 (neural network, NN)、元胞自动机和复杂系统等^[3-10]. 其中孤立子理论^[6-11] 为孤立子系统提供了求显式解的方法.

目前, 孤立子一词虽被广泛引用, 但尚无一般形式的定义. 通常把非线性演化方程的局部行波解, 称为“孤立波”, 它是指微分方程的解在空间的无穷远处趋于零或确定常数的情况. 把这些稳定的孤波, 即通过相互碰撞后的、不见消失而且波形和速度也不会改变或者只有微弱的改变 (就像常见的两个粒子的碰撞一样) 的孤立波称为“孤立子”. 但也有一些文献把孤立子和孤立波混为一谈. 在应用数学中, 将孤立子理解为一大类非线性演化方程的局部化的行波解, 经过互相碰撞后, 不改变波形和速度; 而在物理中, 孤立子被理解为: (1) 能量比较集中于狭小的区域; (2) 两个孤立子相互作用时出现弹性散射现象, 即波形和波速能恢复到最初. 这就是说, 从物理本质上讲, 孤立子是由非线性场所激发的、能量不弥散的、形态上稳定的准粒子.

孤立子理论是 20 世纪非线性科学最重要的成果之一, 其发展历程大致可分为三个阶段:

第一阶段从 1834 年到 1955 年. 孤立子的发现最早可追溯到 1834 年, 英国科学家罗素 (J.Scott Russell)^[12] 在爱丁堡-戈拉斯高运河上偶然观察到了一种奇妙的水波. 罗素认为孤立的波动是流体运动的一个稳定解, 并称它为“孤立波”, 简称孤波. 这是公认的有关孤波的首次报道. 罗素当时未能成功地证明并使物理学家们信服他的论断, 从而埋怨数学家未能从已知的流体运动方程预言出这一现象, 之后有关孤波的问题在当时许多物理学家中引起了广泛的争论. 直到 60 年后的 1895 年, 荷兰科学家考特维格 (Korteweg) 和他的博士生德伏瑞斯 (de Vries) 研究了浅水波的运动, 提出了一个非线性演化方程 (人们简称为 KdV 方程)^[13]. 他们用该方程的一个孤波解来解释罗素观察到的浅水波, 但是并没有发现该方程的新的应用. 这似乎说明发现 KdV 方程并没有太大的价值, 到了“山穷水尽疑无路”的地步. 当然在该阶段还有两个主要的成就: 1885 年, 几何学家 Bäcklund 在研究负常曲率曲面时, 发现了正弦-戈登 (sine-Gordon) 方程的 Bäcklund 变换; 1950-1951 年, Cole-Hopf 变换的发现.

第二阶段大致从 1955 年到 1970 年. 1955 年, 在为了验证经典统计物理中能量均分原理而设计的数值实验中, Fermi, Palsta 和 Ulam 将 64 个质点用非线性弹簧连接成一条非线性振动弦, 初始时这些谐振子的所有能量都集中在一个质点上,

其他 63 个的初始能量均为零. 按照经典的能量均分原理, 由于弱非线性相互作用, 长时间以后应该导致能量有涨落的均衡分布. 出乎意料的是, 计算结果表明: 长时间以后几乎全部能量又回到原先的初始分布, 得出了与能量均分定理相悖的 FPU 回归问题^[14]. 当时由于只在频率空间来考察, 未能发现孤波解, 所以该问题未得到正确的解释, 以致于被忽视了很长的时间. 十年后, 普林斯顿大学的两位应用数学家 Zabusky 和 Kruskal^[15] 对此产生了浓厚的兴趣, 他们利用周期性边界条件进行求解时, 得到了稳定传播的孤立波, 进一步证实了孤立波在发生相互作用后波形和传播速度都保持不变的论断. 由于孤立波的这种性质正好与弹性粒子之间的碰撞过程十分相似, 故孤立波又被命名为“孤立子”, 简称孤子. 紧接着, 人们又利用逆散射方法 (IST)^[16] 得到了 KdV 方程的解析解^[17]. 此时, 人们对孤立波的了解已经进入了一个新的阶段. 1962 年 Perring 和 Skyrme 将正弦-戈登方程用于研究基本粒子时, 数值计算结果表明: 这样的孤波并不散开, 即使两个孤波碰撞后也仍保持原有的形状和速度. 1967 年, 困惑人们多年的 FPU 回归现象终于得到了圆满的解释. 日本学者户田 (Toda)^[18] 在研究声波在非线性点阵传播问题时, 建立了非线性晶格点阵方程 (即户田方程). 他发现此方程有精确的孤立波解, 这样就很好地解释了 FPU 回归现象的悖论.

第三个阶段从 1970 年至今, 在这一阶段人们已把孤子概念和理论广泛应用于很多领域, 如物理学的许多分支, 包括基本粒子、流体物理、等离子体物理、凝聚态物理、超导物理、激光物理、生物物理等, 以及生物学、光学、天文学等其他学科领域. 这个阶段发展得特别迅速, 已在世界范围内掀起了孤立子研究的热潮. 在 20 世纪 70 年代, Ikezi, Taylor 和 Bake 等在水箱实验中观察到浅水波的 KdV 型孤立子的传播. 在激光打靶实验中, 人们也观察到由于出现的涡旋性孤立波的传播, 以及激光光束在非线性介质中自聚焦时产生的孤立子. 另外, 在超导问题中, 在构成 Josephson 结的两块超导材料中, 超导电子对波函数的位相差 φ 满足正弦-戈登方程, 采用带有 Josephson 隧道结分路的超导传输线证实了孤立子解的存在性. 这方面的内容在庞小峰编著的书^[19] 中有详细的阐述, 而关于孤立子在光学领域发展的情况将在我们另一本专著《非均匀光学传输系统中自相似脉冲与畸形脉冲操控的研究》中介绍.

现在人们已经建立起了较为完整的数学和物理的孤立子理论, 它的基础是各种非线性演化方程. 这一系列非线性演化方程存在孤立波解, 其中最具代表性的有 KdV 方程、正弦-戈登方程、非线性薛定谔方程等. 这些方程存在以下几种典型的孤立波解: KdV 方程有波包型 (钟型) 孤立波解; 正弦-戈登方程有正、反扭结孤立波解和呼吸子解; 非线性薛定谔方程有包络型孤立波解.

1.3 非线性演化方程的局域结构

按非线性演化方程的维数定义, $(m+1)$ 维指的是 m 维空间变量, 加上 1 维的时间变量. 不同维数的非线性演化方程可以描述不同的局域结构动力学演化. 以下列举一些常见的非线性演化方程, 更多的非线性演化方程可以参看范恩贵著的《可积系统与计算机代数》一书的附录及相关文献.

1.3.1 1+1 维非线性演化方程的孤子结构

1. KdV 方程和 Boussinesq 方程

孤立波现象起源于英国科学家罗素对爱丁堡到格拉斯哥的运河中浅水面上形成的保持原有形状和速度不变、圆而光滑、轮廓分明、孤立的水波的观察. 它是一种特殊的、又不难见到的波动现象. 现被称为自然界的相干结构或称拟序结构 (coherent structure). 它是基于一类非线性演化方程的一种复杂数学解, 是一种有序结构.

1844 年罗素在写给第 14 届英国科学促进协会的报告^[12]中写道: “我正观察着一条船的运动, 那船被一对马快速地拉着沿着狭窄的运河前进, 船突然停下来, 但被船所带动的大量河水并不停止, 它们汇集在船头附近, 处于剧烈的扰动状态. 然后突然离开船头以巨大的速度向前滚动, 形成一个圆而光滑、轮廓分明、巨大的孤立的高水头, 沿着运河继续前进, 没有明显的形状改变和速度减小. 我骑马追踪它, 它仍以每小时八至九英里的速度向前滚动并保持其原来形状即大约 30 英尺长、1 到 1.5 英尺高. 然后, 高度逐渐减小, 约一二英里后消失在河道的弯弯曲曲处. 这就是我在 1834 年 8 月第一次偶然发现这个奇异而美妙的现象的经过……”. 随后他又进行了实验研究: 用重锤落入水槽的一端来产生孤波. 图 1.1 是罗素实验的示意图, 图中 (i) 重锤落水前; (ii) 重锤落水后; (iii) 产生的孤波以恒定速度向右移动并保持波形不变. 他还从实验得出, 孤波移动速度 c 与水槽中静止水深 h 和孤波波幅 A 之间有如下关系:

$$c^2 = g(h + A), \quad (1.1)$$

其中 g 是重力加速度. 由上式看出, 波幅较高的孤波其移动速度也较快, 但波幅下降到半高度的波宽则较窄. 不幸的是, 罗素的发现在当时未能从流体力学方程给以合理的解释, 因而未能引起物理学家们的重视.

关于非线性波研究的首创性工作 Stokes^[20] 和 Riemann^[21] 开展的工作. 1871 年 Boussinesq (布西内斯克)^[22] 和 1876 年 Rayleigh (瑞利)^[23] 假定孤波的尺度比水深大很多, 从理想流体的运动方程导出公式 (1.1), 并推断孤波波形 $z = \eta(x, t)$

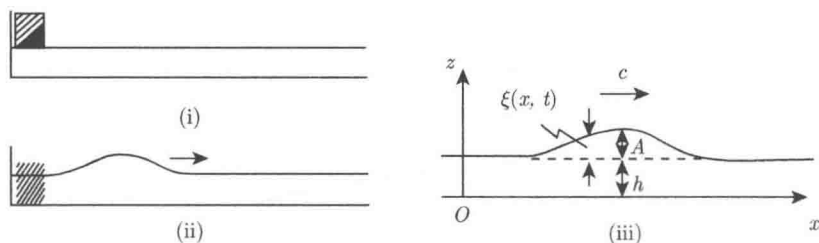


图 1.1 罗素实验的示意图

具有如下形式:

$$\eta(x, t) = A \operatorname{sech}^2[\beta(x - ct)]. \quad (1.2)$$

但当时未能成功地证明并使物理学家们信服他们的论断, 数学物理学家也未能从已知的流体运动方程得出这种波解. 因此, 当时有关孤立波的问题在许多物理学家中引起了广泛的争论. 直到 1895 年科特韦格 (Korteweg) 和德伏瑞斯 (de Vries) 才在浅水长波和小振幅假定下建立了单向运动的非线性浅水波方程^[13]. 这方程可以用来描述罗素所发现的现象, 此即著名的 KdV 方程:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{2} \eta^2 + \frac{2}{3} \alpha \eta + \frac{1}{3} \delta \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \right), \quad (1.3)$$

式中 $\delta = \frac{1}{3} h^3 - \frac{Th}{\rho g}$, η 是表面相对于平衡位置的位移, α 是一小待定量, 它和流体的运动是否均匀有关. g 是重力加速度, T 是表面张力, ρ 是密度. 如果做以下变换:

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{rg}{h\delta}}, \\ x &= -\delta^{-1/2} \xi, \\ u &= \frac{1}{2} \eta + \frac{1}{3} \alpha, \end{aligned} \quad (1.4)$$

则方程 (1.3) 可以化为无量纲形式:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (1.5)$$

并在 $|x| \rightarrow \infty$ 时要求 η 和 η_x 都趋于 0 的条件下求出方程 (1.3) 的孤波解为

$$\eta(x, t) = A \operatorname{sech}^2 \left[\left(\frac{3A}{4h^3} \right)^{1/2} (x - ct) \right], \quad (1.6)$$

其中 $c = \sqrt{gh \left(1 + \frac{A}{2h} \right)}$, 如图 1.2 所示.

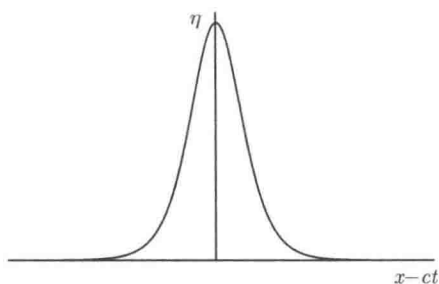


图 1.2 钟型孤立子

当 $\frac{A}{h} \ll 1$ 时, 这个结果和罗素实验观察到的 (1.1) 式一致. 理论上要想准确给出 (1.1) 式, 可由下列 Boussinesq 方程^[25]

$$u_{tt} - u_{xx} - \frac{3}{2}\lambda(u^2)_{xx} - \frac{\mu^2}{3}u_{xxx} = 0 \quad (1.7)$$

的求解得出. (1.6) 与 (1.2) 比较, 得 $\beta = \left(\frac{3A}{4h^3}\right)^{1/2}$, 即孤波波包的宽度反比于 $\sqrt{A}$, 振幅愈高的孤立波宽度较窄, 但移动速度 c 则较快, 从而在理论上证实了孤立波的存在. KdV 方程的建立为解析地研究孤立波提供了理论基础. 然而这种波是否稳定? 两个孤立波碰撞后能否变形? 这些问题还没有得到解答, 有些人认为 KdV 方程是非线性偏微分方程, 解的叠加原理不满足, 碰撞后两个孤立波的形状可能破坏殆尽, 这种波是不稳定的, 因而研究它是没有什么物理意义的, 因此孤立波的研究仍处于搁浅状态, 还是没有得到很好的解决. 正如 Miura^[25]1976 年所指出的那样, 虽然 KdV 方程较早就发现了, 但是直到 1960 年之前都没有对它的应用.

一直到 20 世纪 50 年代, 人们才在流体力学之外的其他物理领域寻找到生机, Fermi, Pasta 和 Ulam 等的工作^[14] 打破了这一僵局. 他们将若干个质点用非线性弹簧连接成一条非线性振动弦, 初始时这些谐振子的所有能量都集中一个质点, 其他的质点初始能量均为零. 按照经典的理论认为, 只要非线性效应存在, 就会有能量均分、各态历经等现象出现, 任何微弱的非线性相互作用, 可导致系统由非平衡状态向平衡状态过渡. 但实际计算的结果并非如此, 上述达到能量平衡的观念是错误的. 经历长时间以后, 几乎全部能量回到了原先的初始分布, 这就是所谓的 FPU 问题. 1960 年, Gardner 和 Morikawa^[26] 在对无碰撞的磁流波的研究中重新发现了 KdV 方程. 1962 年 Perring 和 Skyrme^[27] 将正弦-戈登方程用于研究基本粒子时, 数值计算结果表明: 这样的孤立波并不散开, 两个孤立波碰撞后仍保持原有的形状和速度. 1965 年美国 Zabusky 和 Kruskal^[15] 用数值模拟方法考察了等离子体中孤立子碰撞的非线性相互作用过程, 得到了比较完整和丰富的结果. 1967 年, 户田 (Toda)^[18] 把一维晶体看成具有质量的弹簧拉成的链条, 研究了这种模式的非线性

晶格振动, 用牛顿定律先得到差分方程, 然后在长波近似和小振幅的假定下得到了 KdV 方程, 并解得了孤立波解, 使 FPU 问题得到正确的解答. 进一步证实了孤立子相互作用后不改变波形的论断, 这一有历史意义的重大发现, 促使他们把和弹性粒子之间的碰撞过程十分相似的孤立波, 命名为孤立子 (或孤子)(soliton). 孤立子概念的提出, 确切地揭示出这种孤立波的本质, 已被普遍接受, 并推动了世界范围内孤立波研究的热潮, 已成为非线性科学的重要课题.

值得指出, KdV 方程除了孤立波解外, 还可以有椭圆余弦 (cnoidal) 行波解.

如图 1.3 中所示, 它是空间周期为 L , 时间周期为 T 的非线性永形波, 不是局域性的. 解 (1.6) 才是局域行波解. 通常所说的孤立波, 就是指非线性演化方程的局域行波解. 所谓“局域”, 指的是非线性演化方程的解在空间的无穷远处趋于 0 或趋于确定常数的情况. 顺便指出, 与 KdV 方程不同, Boussinesq 方程可以有双向传播的多孤立波解. 它和 KdV 方程都是流体力学方程在长波小振幅近似下同一级近似的结果. 如果只研究其中单向传播的波, 经过适当代换, Boussinesq 方程可以归结 KdV 方程^[28]. 现在一般把具有下列性质的非线性波动方程的解称为孤立波解, 并用它们来描述孤立波及其相互作用: 1) 行波解; 2) 波是定域的 (分布在空间一定范围内); 3) 波形不随时间变化; 4) 孤立波间的相互作用 (由几个孤立波的非线性叠加来描述) 呈现出“弹性碰撞”的特点, 即在相互作用 (碰撞区) 之外, 孤立波保持形状和速度不变.

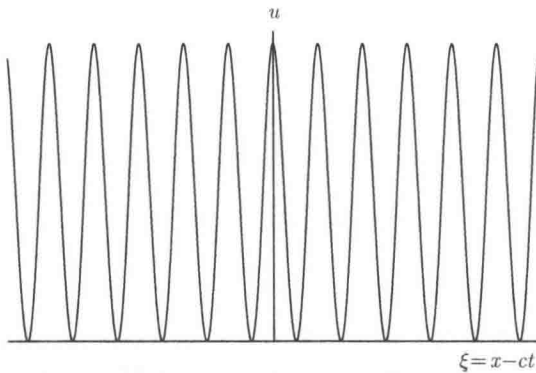


图 1.3 椭圆余弦行波

前面介绍的来自流体力学著名 KdV 方程, 事实上在物理学的其他领域, 如在离子声波, 冷等离子体磁流体波, 非线性晶格中均可得到 KdV 方程.

2. 正弦-戈登 (sine-Gordon) 方程

正弦-戈登方程最初从非线性动力学中的单摆弹簧链模型中得到. 现在, 从非线性光学的自感透明现象、生物物理以及与非线性晶格、非均匀介质相关的诸多物

理现象中均可以得到该方程.

正弦-戈登方程的形式为^[29]

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0, \quad (1.8)$$

并具有两类孤立波解

$$u(x, t) = 4\arctan \left[\exp \frac{\pm(x - ct)}{\sqrt{1 - c^2}} \right], \quad |c| < 1. \quad (1.9)$$

上式中, 取“+”号表示沿 x 轴正向运动的扭结孤子解, 取“-”号表示沿 x 轴反向运动的反扭结孤子解, 如图 1.4 所示, 以及

$$u(x, t) = 4\arctan \left[\frac{m \sin(\sqrt{1 - m^2}t + c_2)}{\sqrt{1 - m^2} \cosh(mx + c_1)} \right], \quad (1.10)$$

它表示呼吸子解, 描述一种脉动式的扰动, 可以解释超导体中电子穿过 Josephson 结时的波函数的位相变化、铁磁中的势垒 (拓扑孤子) 等.

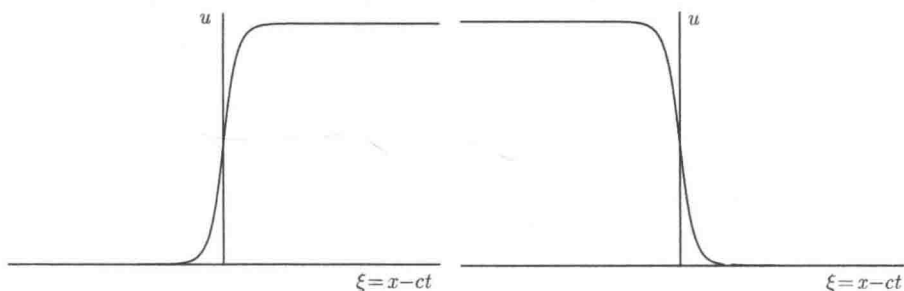


图 1.4 扭结和反扭结孤立子

3. 非线性薛定谔 (NLS) 方程

非线性薛定谔方程是孤子理论中最为重要的方程之一, 最初从浅水波中导出, 后来人们依据非线性薛定谔方程从理论上导出在光纤的反常色散区能够形成光学孤子, 并在实验上证实了光学孤子的存在. 另外它在电磁学、超导超流、生物物理、高分子物理、等离子物理等均有广泛的应用, 可以描述等离子体中的电子波包, 准一维铁磁动力学、生物分子链和引力场中的弱理想 Bose 气体等. 当然不同形式相互作用的物理问题对非线性薛定谔方程描述要作适当的修正.

非线性薛定谔方程的形式为^[30]

$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} + |u|^2u = 0, \quad (1.11)$$

可以求出孤立波解

$$u(x, t) = 2\alpha \operatorname{sech} [2\alpha(x - 4\beta t)] \exp \left\{ -2i [x + 2(\alpha^2 - \beta^2)t] \right\}, \quad \alpha \neq 0, \quad (1.12)$$

它表示一个被调制的平面波, 其包络线 $2\alpha \operatorname{sech}[2\alpha(x - 4\beta t)]$ 具有孤子形式, 故称为包络孤子, 如图 1.5 所示.

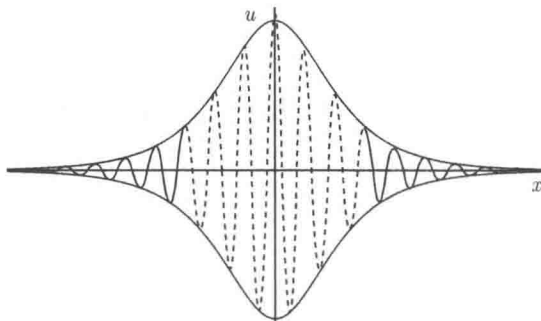


图 1.5 包络孤子

4. Camassa-Holm(CH) 方程

Camassa-Holm 方程问世以来引起了人们很大的兴趣. 首先该方程也像 KdV 方程一样, 是用来描述小振幅的浅水波运动, 其次是它的孤立波解出现了尖点, 这与人们认识的孤立子的光滑性形成了鲜明的对照. 峰状孤立子的发现不仅为孤立波家族增添了新的成员, 而且和 1802 年 Gerstner 得到的关于无限深水池水面运动方程的解——余摆线形状相类似. 我们知道, 这类波形比无限小振幅波 (Airy 波、简谐波形) 更接近实际, 符合海浪的波峰变尖、波谷变平的常见现象. 1947 年 Stokes 指出, 按二维、无旋条件建立波动方程, 展开后就会看出波峰变尖, 和余摆线形状相似.

Camassa-Holm 方程的形式为^[31]

$$u_t + 2\kappa u_x + 3uu_x - 2u_x u_{xx} - u_{xxt} - uu_{xxx} = 0, \quad (1.13)$$

其中 κ 是常数, 它是美国洛斯阿拉莫斯国家实验室的 Camassa 和 Holm^[31] 在 1993 年推导出的一个浅水波动方程. 当 $\kappa = 0$, 他们证明了这个方程有孤立子解. 如果令 $\xi = x - ct$, 那么 $u(x, t)$ 的图形如图 1.6 所示. 从图 1.6 看到, Camassa-Holm 方程的孤立子解在波峰处有一个尖点, 顶峰处是不连续的, 故被称为尖峰型 (峰状) 孤立子解. 峰状孤立子解的发现现已受到人们的充分注意^[32, 33].

5. K(m, n) 方程

前面几类孤立子解都是长波形式, 也就是说在整个范围内, 其孤立子的高度都不为零, 但同在 1993 年以色列的 Rosenau 和美国的 Hyman 为研究液滴的变化规