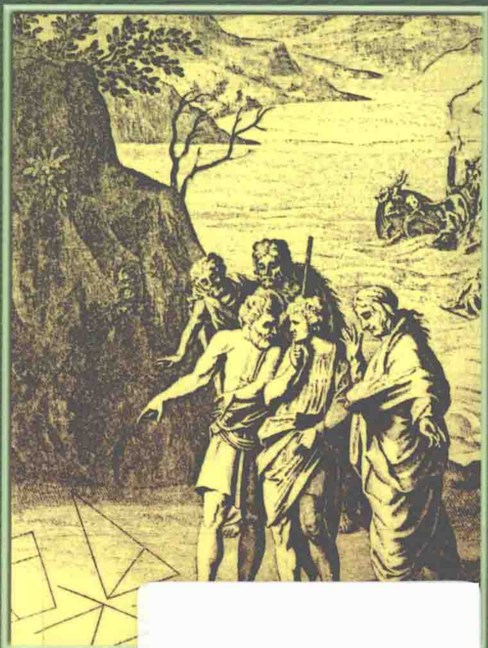
反演

数学中的小问题大定理丛书

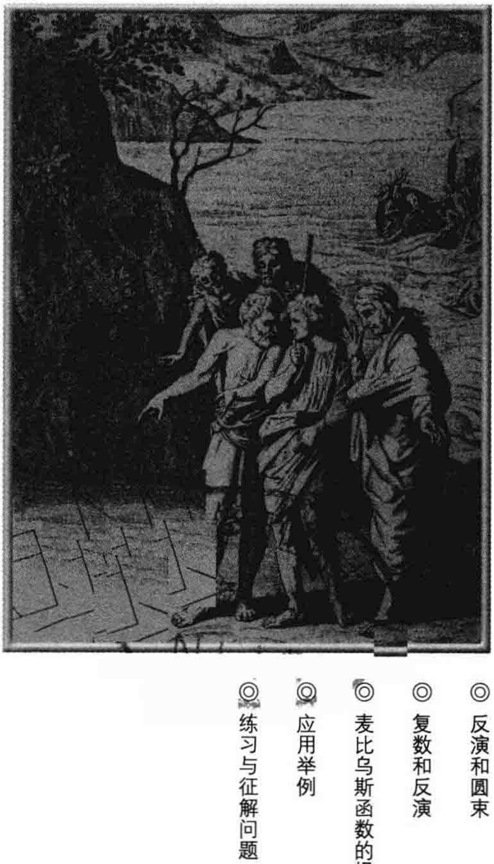


王敬庚　刘培杰数学工作室

反演

《数学中的小问题大定理》丛书（第五辑）

王敬庚　刘培杰数学工作室　编译



◎ 反演和圆束
◎ 复数和反演
◎ 麦比乌斯函数的提出与性质
◎ 应用举例
◎ 练习与征解问题

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书共分六章:反演和圆束,复数和反演,变换群、欧几里得几何学和罗巴切夫斯基几何学,麦比乌斯函数的提出与性质,应用举例及练习与征解问题.

本书可供中学生课外阅读,并可作为中学数学教师为开拓学生视野而开设的课外讲座的材料.

图书在版编目(CIP)数据

反演/王敬庚,刘培杰数学工作室编译. ——哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2015.1

ISBN 978-7-5603-4889-6

Ⅰ.①反… Ⅱ.①王… ②刘… Ⅲ.①反演-青少年读物 Ⅳ.①O174.51-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 196793 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 杜莹雪
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨工业大学印刷厂
开 本 787mm×960mm 1/16 印张 11.75 字数 131 千字
版 次 2015 年 1 月第 1 版 2015 年 1 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-4889-6
定 价 28.00 元

前　言

在平面几何的研究中，几何图形的各种变换，常常起重要的作用．在这些变换当中，用初等方法最经常讨论的是所谓的等距和伸缩．它们的一个重要性质是，保持几何图形的基本类别不变：直线还变成直线，圆还变成圆．反演是几何图形的更为复杂的变换，它可以把直线变换成圆，也可以把圆变换成直线．应用这种变换，对于初等几何中的许多问题，特别是有关作图和曲线束的问题，我们可以得到统一的解法．这样，反演的理论为处理各项几何图形之间的相互关系，提供了一个较自然的工具．在这个理论中使用的方法，对于初等和高等的几

何中出现的边界问题,也是有效的．我们还能应用它,在欧氏平面上,为罗巴切夫斯基几何学提供一种解释．反演和复数之间,或者更准确地说,反演和定义域与值域都是复数的初等函数之间,存在有趣的联系．

这本小册子,讨论反演变换和它们的应用．为了提供尽可能最方便的表示,我们把材料分为三章．

第1章将研究反演变换和它们在初等几何中的应用．第2章中我们将指出,可以把第1章中的变换,表示为复变量的线性函数和线性分式函数．反过来,我们将证实,每一个这样的函数,决定平面上的一个变换,它可以分解为一系列的等距和反演．第3章用群论的观点给出几何学的基础,并采用这个基础,依据第1章和第2章中的材料,简要地建立起欧几里得平面几何学和罗巴切夫斯基平面几何学．

对于在本书第3章中简略论及的内容,读者可以在H·B·叶非莫夫的《高等几何学》中,找到更为详细的说明．

本书是以作者于不同时期对列宁格勒的学生们所作的讲演为基础写成的．

后三章是编者所加,一是为了更全面的介绍反演变换,二是为了使本书内容充满一点现代气息,如有狗尾续貂之嫌,纯属编者妄为,与原作者及译者无关．

目录

反演和圆束

第1章

§1.1 平面的初等变换

从一个几何图形变换成另一个几何图形的思想,在本书中将起主要作用.这里,我们只讨论平面上的图形.首先,我们要精确地叙述几何图形的变换是什么意思.考虑一个平面,假设我们有某个规则,使得对于平面上的每一个点 X,决定一个在同一平面上与它对应的点 X',这个对应规则(我们称呼它为 T)叫作平面的一个变换,对应于点 X 的点 X',叫作点 X 在 T 之下的象.平面的变换用大写字母表示,如果 T 是平面的某个变换,且平面上某个点 X 在 T 之下的象是点 X',

我们就记为 $X' = T(X)$.

给定平面的一个变换 T 及一个平面图形 F(例如一条直线或一个图),T 把图形 F 上的每一点 X,变成它的象点 X',由图形 F 的所有点的象点组成的图形 F',叫作图形 F 在变换 T 之下的象. 我们通常把图形 F' 记为 $T(F)$(图 1.1).

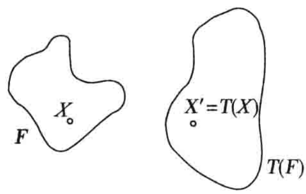


图 1.1

通常,一个点和它的象是不重合的,当点 X 和它的象 $T(X)$ 重合时,我们就把点 X 叫作变换 T 的不动点.

把平面上每一点变成它自身的变换,叫作恒同变换. 换句话说,平面的一个变换是恒同变换,当且仅当平面上的所有点都是不动点. 我们将用字母 I 表示恒同变换.

如果一个图形 F 在变换 T 之下的象和 F 重合,即

$$F = T(F)$$

就称图形 F 在变换 T 之下是不变的.

注意到如下事实是重要的:说一个图形在某个变换下是不变的,并不要求这个图形在该变换下有单个的不动点. 例如,若 T 是平面统一点 O 经过某个非零的固定角①的旋转,则 T 的唯一的不动点是 O. 这样,所

① 非零角的意思是指这个角的弧度不是 2π 的整数倍.

有圆心在点 O 的非退化的圆，在 T 之下都是不变的，但是它们之中没有一个包含单个的不动点（图 1.2）.

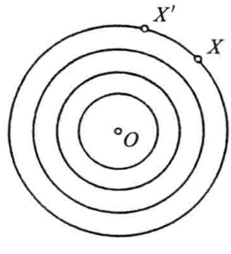


图 1.2

下面我们更详细地来考察平面的初等变换.

1.1.1　关于直线的反射. 平面关于直线 l 的反射定义为：若点 X 在 l 上，则 X 变成它自身；若点 X 不在 l 上，则取点 X 关于直线 l 的对称点 X' 作为 X 的象（图 1.3）.

所有以直线 l 为对称轴的图形，包括直线 l 自身，是在关于直线 l 的反射下不变的图形. 图 1.4 画出了两个这样的不变图形.

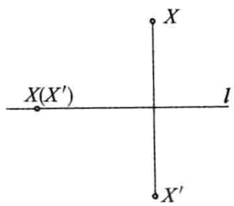


图 1.3

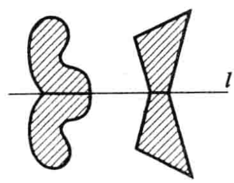


图 1.4

直线 l 上的所有点，且只有这些点，是上述变换下的不动点.

1.1.2　平移. 平面的平移定义为：假设直线 l 在平面上，在 l 上给定线段 AB，若点 X 不在直线 l 上，则它的象 X' 是以 AB 和 AX 为邻边的平行四边形的第4个顶

点;若点 X 在直线 l 上,则我们在 l 上取一点 X' 作为它的象,该点使得线段 AX 和 BX' 等长,且线段 XX' 和线段 AB 等长. 由此可见,平移把平面上的每一点,沿着从点 A 到点 B 的方向,移动距离 AB 这么远(图 1.5). 若采用向量术语,就是沿向量 $\overrightarrow{AB}$ 移动平面上的每一点,也就是,对于平面上的每一点 X,向量等式 $\overrightarrow{XX'}=\overrightarrow{AB}$ 成立(图 1.6).

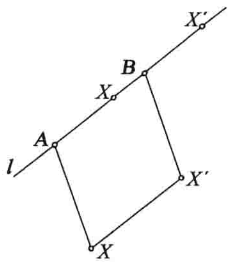


图 1.5

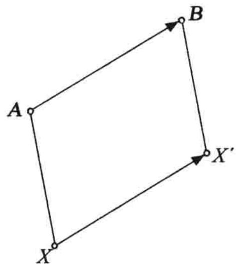


图 1.6

若向量 $\overrightarrow{AB}$ 是零向量(即点 A 与点 B 重合),则沿向量 $\overrightarrow{AB}$ 的平移是恒同变换.

设 T 是沿非零向量 $\overrightarrow{AB}$ 的平移,显然 T 没有不动点. T 之下的不变图形包括,例如所有与线段 AB 所在直线平行的直线,还有其他许多不变的图形. 图 1.7 和图 1.8 描绘的图形 L 和 Q,在 T 之下是不变的,此处曲线 L_k 和 Q_k 分别是曲线 L_{k-1} 和 Q_{k-1} 在 T 之下的象.

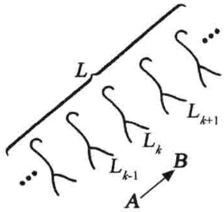


图 1.7

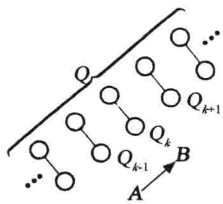


图 1.8

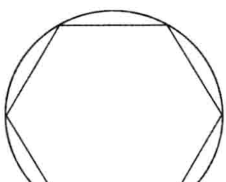
1.1.3　绕一点的旋转．设 O 是平面上的一个已知点，α 是一个已知角，我们用如下法则定义平面绕点 O 转过角 α 的旋转：对于平面上任意一点 X，我们将线段 OX 绕着点 O 旋转，转过角 α（若 $\alpha > 0$，则沿逆时针方向旋转；若 $\alpha < 0$，则沿顺时针方向旋转，转过角 $|\alpha|$），将所得线段的终点 X' 取作 X 的象，点 O 在这样的旋转下是不动点．

若 $\alpha = 0$，则这个旋转是恒同变换．

设 T 是绕点 O 转过某个非零角 α 的旋转，显然这个变换 T 仅有的不动点是点 O，以点 O 为中心的圆，是这个变换下的不变图形，若角 α 的弧度是

$$\alpha = \frac{2\pi}{n}$$

此处 n 是自然数，则以点 O 为中心的圆的内接正 m 边形在 T 之下是不变的，当且仅当边数 m 能被 n 整除（图1.9）．在图1.10中，我们看到一个更复杂的不变图形．



$(n=3, m=6)$

图1.9

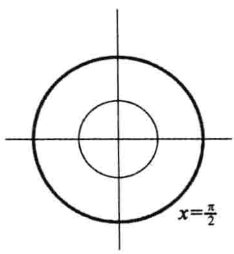


图1.10

1.1.4　等距．等距是保持两点间距离不变的平面变换，也就是说，T 是等距当且仅当对于平面上的任意两点 X 和 Y，线段 XY 和 $T(X)T(Y)$ 等长（或者等价

地说，距离 XY 和 $T(X)T(Y)$ 相等）. 我们进一步要求变换 T 是一一的和满映射，也就是，平面上的每一个点，都是其他某个点的象（T 是满映射），并且没有两个不同的点的象相同. 容易看到前面描述过的所有变换都是等距. 在如下意义上，我们也可以说，它的逆也是真的：我们能够证明，任何一个等距，或者是一个旋转，或者是一个平移，或者是一个关于一条直线的反射，或者是它们的某个复合（连续施行）.

1.1.5 伸缩. 设点 O 是平面上的某个定点，$k > 0$ 是某个定数. 具有中心 O 和系数 k 的伸缩[①]是平面的一个变换，它把点 O 变到自身，与点 O 不同的任一点 X 变到位于射线（半直线）OX 上的一点 X'，满足

$$OX' = k \cdot OX$$

当 $k = 1$ 时，这个伸缩即为恒同变换. 当 $k \neq 1$ 时，这个变换仅有一个不动点，即伸缩的中心点 O. 我们注意到，当 $k < 1$ 时，已知图形在伸缩之下"缩小"，而当 $k > 1$ 时，则"胀大". 以伸缩的中心为起点的射线，在伸缩之下显然是不变的.

我们能够用非常简单的方法，展现一个更加复杂的不变图形. 设 F 是平面上的某个图形，我们用 mF 表示图形 F'，它是 F 在具有中心 O 和系数 m 的伸缩之下的象（图 1.11）. 给定一个具有中心 O 和系数 k 的伸缩 T，我们考察图形

$$\cdots, \frac{1}{k^m}F, \frac{1}{k^{m-1}}F, \cdots, \frac{1}{k}F, F, kF, \cdots, k^{m-1}F, k^mF, \cdots$$

---

① 这里的伸缩，即我们通常所说的"位似变换"，中心 O 即位似中心，系数 k（k 可以小于零）即位似比. —— 中译者注.

容易证明，由所有这些图形的“并”表示的图形 G(图 1.12) 在变换 T 之下是不变的.

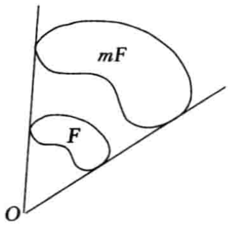


图 1.11

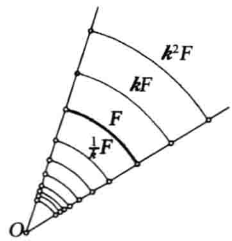


图 1.12

最后，我们用等距和伸缩的概念，来简述关于全等和相似这两个术语的精确的和一般的定义，这两个术语在初等几何中扮演重要的角色.

如果存在一个等距，把图形 F_1 变成图形 F_2，我们就称图形 F_1 和 F_2 是全等的. 如果存在一个伸缩，把图形 F_1 变成与图形 F_2 全等的某个图形 F'_2，我们就称图形 F_1 与 F_2 是相似的.

§1.2　球极平面射影. 平面上的无穷远点

在 §1.1 中我们对于平面所讨论的变换的概念，显然能推广到任何几何图形(包括平面图形和空间图形). 如果图形 M 在这样的变换 T 之下的象盖住了整个图形 N，我们就说 T 是 M 到 N 上的变换.

在关于反演变换的研究中，观察球面到平面上的下列特殊变换是十分有用的，这个变换叫作球极平面射影，定义如下：设 K 是一个球面，P 是一个平面，P 与

K 相切于点 S(图 1.13). 点 S 叫作 K 的南极,它的对径点 N 叫作北极. 设点 X 是 K 上和 N 不同的任意一点,我们就取射线 NX 与平面 P 的交点 X' 作为 X 的象. 显然整个平面 P 被盖满了. 这样,球极平面射影就把球面 K 除去点 N 变换到整个平面 P 上.

我们考察当点 X 趋近于点 N 时,点 X 的象在平面 P 上如何变化,从 Rt$\triangle X'NS$ 与 Rt$\triangle SNX$ 相似(图 1.14)我们有

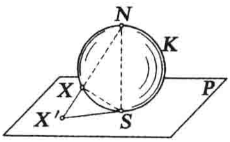


图 1.13

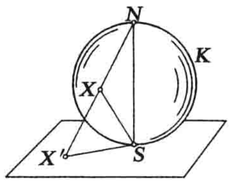


图 1.14

$$\frac{SX'}{NS} = \frac{XS}{NX}$$

因此
$$SX' = \frac{NS \cdot XS}{NX}$$

设 r 是球面 K 的半径,于是,对于充分接近北极 N 的点 X,有 $XS > r$,因此

$$SX' > \frac{2r^2}{NX}$$

(因为 $NS = 2r$). 明显地,当点 X 变得任意接近于点 N(NX 趋近于零)时,线段 SX' 的长度无限制地增大,使得点 X' 变得离点 S 无限制地远. 因此,在球极平面射影下,点 N 不能变成平面 P 上的任何点. 为了把球极平面射影扩展到整个球面 K 上,也就是为了在平面 P 上给出北极 N 的象,我们必须对平面 P 添加一个新

点,这个新增加的点 O_∞ 叫作无穷远点. 现在,我们让球面的北极 N 变到平面的无穷远点 O_∞,这样,我们就得到球极平面射影把球面 K 变到平面 P 上.

我们来研究无穷远点的某些性质. 设 l' 是平面 P 上的任意一条直线,我们考察经过点 N 和直线 l' 的平面(图1.15),这个平面与球面 K 相交于经过点 N 的某个圆 l,直线 l' 显然是圆 l 在球极平面射影之下的象. 另一方面,球面 K 上经过点 N 的每一个圆 l 的象,是平面 P 上的一条直线,它是圆 l 所决定的平面与平面 P 的交线. 由此得到,球极平面射影在球面 K 上所有经过点 N 的圆的集合与平面 P 上所有直线的集合之间,建立起一个一一对应. 因此,平面 P 上的任一条直线都包含点 O_∞(从而,平面上所有的直线相交于点 O_∞),它是点 N 在球极平面射影下的象.

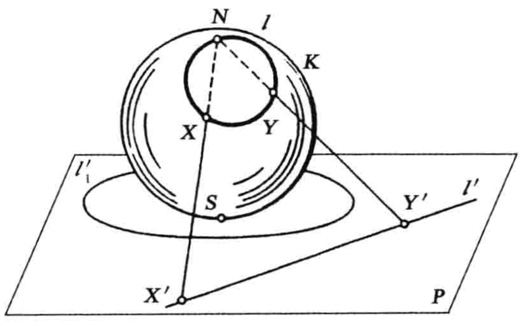


图1.15

设 l'_1 是平面 P 上的一个圆,若 r' 是 l'_1 的半径,d 是从球面 K 的南极 S 到圆 l'_1 的中心的距离,则从 S 到 l'_1 上任意一点的距离不大于 $d+r'$. 因此,平面 P 上没有任何一个圆包含无穷远点.

众所周知，任意不共线三点决定一个圆．平面上的直线，类似地由三个点决定，其中的两个点可以任意选择，第三个点是无穷远点．因此，在下述意义上，一条直线可以被认为是一个圆：把无穷远点作为决定它的三个点之一．

现在研究球面 K 上所有那些所在平面与平面 P 平行的圆的集合，这个集合包括点 S 和 N 作为半径是零的退化圆在内（图 1.16）．圆的这个集合在球极平面射影下的象，是平面 P 上以点 S 为中心的所有同心圆的集合，包括点 S（它在球极平面射影下不动）和无穷远点（点 N 在球极平面射影下的象）．由于球面 K 和平面 P 的切点可以是 P 上的任意一点（只需简单地将球面 K 作平行于平面 P 的适当移动即可），因此我们可以研究任何一个同心圆系，包括所有圆的公共中心及无穷远点．

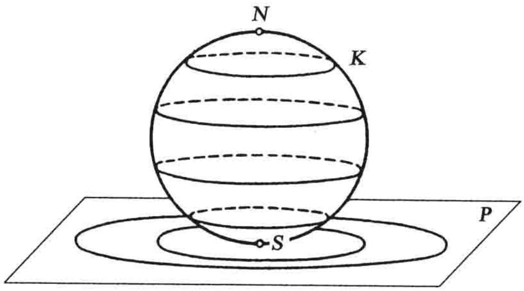


图 1.16

§1.3　反演

我们在平面 P 上取定一个以点 O 为中心，r 为半径的圆．具有中心 O 和半径 r 的平面的反演，是由如下法