"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

线性代数

（第三版）

孟昭为 孙锦萍
赵文玲 徐 峰 张永凤 编著

科学出版社

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

线 性 代 数

（第三版）

孟昭为　孙锦萍
赵文玲　徐　峰　张永凤　编著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书是根据高等教育本科线性代数课程的教学基本要求编写而成的. 主要内容有：n 阶行列式、矩阵与向量、矩阵的运算、线性方程组、相似矩阵与二次型、线性空间与线性变换、矩阵理论与方法的应用. 书后附有部分习题参考答案. 书末的附录中选编了 2010～2015 年全国硕士研究生入学考试线性代数的部分试题.

本书是为普通高等院校非数学专业本科生编写的，也可作为专科院校和成人教育的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/孟昭为等编著. —3 版. —北京：科学出版社，2015.7
"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材
ISBN 978-7-03-045228-3

Ⅰ.①线… Ⅱ.①孟… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 166783 号

责任编辑：胡华强 李鹏奇 王 静/责任校对：张凤琴
责任印制：霍 兵/封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
三河市骏杰印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2004 年 2 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2015 年 7 月第 三 版 印张：14
2015 年 7 月第十九次印刷 字数：282 000

定价：29.00 元
（如有印装质量问题，我社负责调换）

第三版前言

本书自 2004 年出版以来，被多所院校选作本科生教材. 得到专家与同行的充分肯定.

本次再版，在满足教学基本要求的前提下，对部分章节的内容作了适当增加或删减；补充和更换了部分例题；重视了习题的设计与选配，除了选取巩固课程内容的基本题目外，还增补了部分技巧性高的题目，供学有余力的学生选用；选编了 2010～2015 年全国硕士研究生入学考试线性代数的部分试题，以满足进一步学习学生的要求.

与此同时，也对配套出版的《线性代数学习指导》作了相应的修订再版. 该书中设有基本要求、内容提要、典型例题解析、习题选解等板块，每章后有自测题，对教材中选编的全国硕士研究生入学考试线性代数试题作了详细的分析与解答. 相信会对教师教学和学生深入学习提供指导.

本书被列入"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材，并得到科学出版社、山东理工大学的领导和教师们的大力支持与帮助，在此深表感谢.

参加本书编写的有孟昭为、孙锦萍、赵文玲、徐峰、张永凤等. 朱训芝、张超也参加了再版工作.

感谢多年来使用过本书的同仁们，本书的再版离不开他们的帮助.

编著者

2015 年 6 月

第一版前言

线性代数是理工科院校学生的一门重要基础课，它的理论与方法已成为科学研究及处理工程技术各领域问题的有力工具. 由于线性代数理论性强，概念抽象，教学时数又较少，所以如何科学地处理教材内容，一直是我们近年来研究和探索的问题. 我们于 1996 年编写了《线性代数》一书并一直在我校教学中使用. 在广泛听取了使用过此书的教师们意见的基础上，对教材内容作了完善和修订而形成了本书. 为保持教材内容的系统性，增加了线性空间与线性变换的内容，精选和增加了例题与习题，为准备考研的同学选编了 1988 年至 2003 年硕士研究生入学考试题中线性代数的全部题目.

本书内容包括：n 阶行列式、矩阵与向量、矩阵的运算、线性方程组、相似矩阵与二次型、线性空间与线性变换、矩阵理论与方法的应用. 最后的附录摘编了 1988～2003 年全国硕士研究生入学考试题中线性代数的全部题目.

在内容编排上，本书力求做到科学性与通俗性相结合，由浅入深、逐步提高. 全书以解线性方程组为主线，以矩阵的初等变换为工具对各章内容展开讨论. 对于理论的应用本书给予了足够重视，增加了矩阵方法在微积分中的应用与投入产出数学模型等内容.

参加本书编写的有张永凤、孙锦萍、赵文玲、徐峰、孟昭为. 在编写过程中得到山东理工大学教材科、数学与信息科学学院的领导、老师的支持与帮助. 许多老师提出了很好的建议，对本书的修订给予了热情帮助与极大关怀，在此深表谢意.

由于编者水平有限，书中不妥之处难免，恳请读者不吝指正.

编　者

2003 年 12 月

目　录

第1章　n阶行列式

行列式是线性代数中的重要概念之一，在数学的许多分支和工程技术中有着广泛的应用.本章主要介绍n阶行列式的概念、性质、计算方法以及利用行列式来求解一类特殊线性方程组的克拉默法则.

1.1　n阶行列式的概念

行列式的概念起源于用消元法解线性方程组.设有二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

用加减消元法得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$
$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21},$$

当$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$时，方程组(1.1)有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

为了进一步讨论方程组的解与未知量的系数和常数项之间的关系，引入下面记号：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

并称之为**二阶行列式**，它表示数值$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

行列式中横排的叫做**行**，纵排的叫做**列**，数a_{ij}($i,j = 1,2$)称为行列式的**元素**，i为**行标**，j为**列标**.

由上述定义得

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则方程组(1.1)的解可用二阶行列式表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}\ (D\neq 0).$$

对于三元一次方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.\end{cases}\tag{1.2}$$

如果满足一定条件,则其解也可通过加减消元法求出,但解的表达式较为复杂,难于看出解与系数、常数项之间的规律性联系.为寻求这种联系,下面引入三阶行列式的概念.

我们称记号

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

为**三阶行列式**,它由三行三列共 9 个元素组成,表示数值

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33},\tag{1.3}$$

即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.\tag{1.4}$$

这种方法称为计算行列式的对角线法则.

例 1　求下列行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix}1&-1&2\\ 0&3&-1\\ -2&2&-4\end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix}a&b&c\\ b&c&a\\ c&a&b\end{vmatrix}$.

解　(1)

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1&-1&2\\ 0&3&-1\\ -2&2&-4\end{vmatrix}&=1\times3\times(-4)+0\times2\times2\\ &\quad+(-1)\times(-1)\times(-2)-(-2)\times3\times2\\ &\quad-2\times(-1)\times1-0\times(-1)\times(-4)\\ &=-12+0-2+12+2-0=0.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{vmatrix}a&b&c\\ b&c&a\\ c&a&b\end{vmatrix}=acb+bac+bac-c^3-b^3-a^3=3abc-c^3-b^3-a^3.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

则容易验证,方程组(1.2) 的解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}, \quad x_3=\frac{D_3}{D} \quad (D\neq 0).$$

引入了二阶、三阶行列式的概念之后,二元、三元线性方程组的解可以很方便地由二阶、三阶行列式表示出来. 那么对于 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases} \tag{1.5}$$

在一定条件下它的解能否有类似的结论?这里首先要解决的问题是定义 n 阶行列式. 为此,我们观察方程组(1.1)、(1.2) 的系数与对应的二阶、三阶行列式的元素的位置关系,暂且把记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.6}$$

称为 n **阶行列式**(简记为 $\Delta(a_{ij})$),它是由 n 行 n 列共 n^2 个元素组成. 在明确(1.6)式的意 义之前,我们先来定义 n 阶行列式中元素 a_{ij} ($i,j=1,2,\cdots,n$) 的余子式、代数余子式.

定义 1.1.1 把 n 阶行列式(1.6) 中元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列删去后留下的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的**余子式**,记作 M_{ij},即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

并称

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij} \tag{1.7}$$

为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

例如,对于三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

第一行元素 a_{11},a_{12},a_{13} 的代数余子式分别为

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

利用以上结果可将(1.4)式化简为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}. \tag{1.8}$$

此式表明,三阶行列式的值等于它的第一行元素 a_{11},a_{12},a_{13} 与所对应的代数余子式 A_{11},A_{12},A_{13} 乘积的和. 这与(1.4)式的定义是一致的,这种用低阶行列式定义高一阶行列式的方法具有一般意义. 按照这一思想我们给出 n 阶行列式(1.6)的归纳法定义.

定义 1.1.2　n 阶行列式(1.6)是由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 所决定的一个数.

当 $n=2$ 时,定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

假设 $n-1$ 阶行列式已经定义,则定义 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}, \tag{1.9}$$

其中 $A_{1j}(j=1,2,\cdots,n)$ 是 n 阶行列式中元素 $a_{1j}(j=1,2,\cdots,n)$ 的代数余子式.

显然,对任意自然数 n,由此归纳定义可求 n 阶行列式的值. 特别地,当 $n=1$ 时,行列式 $|a_{11}|=a_{11}$,不能与数的绝对值相混淆.

例 2 求下列行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$.

解 (1) $$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + (-1)\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$+0\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=2\times(5-9)+(-5-6)=-19.$$

(2) $$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = a_1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} + b_1\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a_1\left(a_2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & a_4 \end{vmatrix} + b_2\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} b_3 & 0 \\ 0 & a_4 \end{vmatrix}\right)$$

$$-b_1\left(a_2\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & a_3 \\ b_4 & 0 \end{vmatrix} + b_2\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & b_3 \\ b_4 & 0 \end{vmatrix}\right)$$

$$= a_1a_2a_3a_4 - a_1b_2b_3a_4 - a_2b_1b_4a_3 + b_1b_2b_3b_4$$

$$=(a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3).$$

例 3 用行列式的定义计算

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这个行列式称为**下三角行列式**，它的特点是当 $i<j$ 时 $a_{ij}=0$ ($i,j=1,2,\cdots,n$).

解 由行列式的定义，得

$$D=a_{11}A_{11}+0A_{12}+\cdots+0A_{1n},$$

A_{11} 是一个 $n-1$ 阶下三角行列式，由定义

$$A_{11}=a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

依次类推,不难求出

$$D = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

即下三角行列式等于主对角线上的诸元素的乘积.

作为下三角行列式的特例,主对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

例 4　证明

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}.$$

证　由行列式的定义

$$D = (-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{2\,n-1} \\ 0 & \cdots & a_{3\,n-2} & a_{3\,n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-2} & a_{n\,n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1}(-1)^{1+(n-1)}a_{1n}a_{2\,n-1}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{3\,n-2} \\ 0 & \cdots & a_{4\,n-3} & a_{4\,n-2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-3} & a_{n\,n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = (-1)^{n+1}(-1)^{1+(n-1)}\cdots(-1)^{1+2}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{(n-1)(n+4)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}.$$

特别地,次对角行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

例 5 (1) 证明

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ c_{21} & c_{22} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ c_{31} & c_{32} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix};$$

(2) 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}, D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

证明 $D=D_1\cdot D_2$.

证 (1) 由行列式定义

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ c_{22} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ c_{32} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ c_{11} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ c_{21} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ c_{31} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$$=(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}.$$

(2) 对 D_1 的阶数使用数学归纳法. 当 D_1 阶数为 1 时,由行列式的定义知

$$D=D_1\cdot D_2.$$

假设当 D_1 的阶数为 $k-1$ 时,结论成立. 当 D_1 的阶数为 k 时,由行列式的定义

$$D=\sum_{j=1}^{k}a_{1j}(-1)^{1+j}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2\,j-1} & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{k\,j-1} & a_{k\,j+1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1\,j-1} & c_{1\,j+1} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{n\,j-1} & c_{n\,j+1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

设 D_1 中元素 a_{1j}（$j=1,2,\cdots,k$）的余子式为 M_{1j}，代数余子式为 A_{1j}，由归纳假设

$$\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2\,j-1} & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{k\,j-1} & a_{k\,j+1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1\,j-1} & c_{1\,j+1} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{n\,j-1} & c_{n\,j+1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = M_{1j}D_2.$$

所以

$$D=\sum_{j=1}^{k}a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}D_2=D_2\sum_{j=1}^{k}a_{1j}A_{1j}=D_1\cdot D_2.$$

行列式的定义表明，n 阶行列式是通过 n 个 $n-1$ 阶行列式定义的，而每一个 $n-1$ 阶行 列式又可用 $n-1$ 个 $n-2$ 阶行列式来表示. 如此进行下去，最后可将 n 阶行列式表示成 $n!$ 项的代数和. 为给出行列式这一形式的完全表达式，先介绍全排列与逆序数的概念.

把 n 个不同的元素排成一列，叫做 n 个元素的**全排列**. 如 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的全排列有 $n!$ 种. 在这 $n!$ 个排列中，规定各元素间有一个标准次序(一般按从小到大排列的次序为标准次序)，于是，在任一排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，当某两个数的先后次序与标准次序不同时，就说有一个**逆序**. 一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的**逆序数**，记作 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$，即

$$\begin{aligned}\tau(p_1p_2\cdots p_n)=&(p_2\text{前面比 }p_2\text{ 大的数的个数})+(p_3\text{ 前面比 }p_3\text{ 大的数的个数})\\&+\cdots+(p_n\text{ 前面比 }p_n\text{ 大的数的个数}).\end{aligned}$$

如果 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 是偶数，称 $p_1p_2\cdots p_n$ 为偶排列；如果 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 是奇数，称 $p_1p_2\cdots p_n$ 为奇排列.

例 6　计算以下各排列的逆序数，并指出它们的奇偶性：

(1) 524179386；

(2) $n(n-1)\cdots321$.

解　(1) $\tau(524179386)=1+1+3+0+0+4+1+3=13$，所给排列为奇排列.

(2) $\tau(n(n-1)\cdots21)=1+2+\cdots+n-1=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

当 $n=4k,4k+1$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}$ 为偶数，所给排列为偶排列；当 $n=4k+2,4k+3$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}$ 为奇数，所给排列为奇排列.

定理 1.1.1 n 阶行列式可表示为如下形式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中,$p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数1,2,…,n的一个排列,$\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对 n个自然数1,2,…,n所有排列求和.

证 用数学归纳法.当 $n=1$ 时,定理显然成立.

假设定理对 $n-1$ 阶行列式成立,对于 n 阶行列式,由行列式定义

$$D=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j},$$

由于 M_{1j} 是 $n-1$ 阶行列式,根据归纳假设,得

$$M_{1j}=\sum_{p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_2\cdots p_n)}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $p_2\cdots p_n$ 是 $1,2,\cdots,j-1,j+1,\cdots,n$ 的一个排列.于是

$$\begin{aligned} D&=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\sum_{p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_2\cdots p_n)}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \\ &=\sum_{j\,p_2\cdots p_n}(-1)^{1+j}(-1)^{\tau(p_2\cdots p_n)}a_{1j}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \\ &=\sum_{j\,p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_2\cdots p_n)+(1+j)}a_{1j}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}. \end{aligned}$$

又因

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n)=\tau(p_2p_3\cdots p_n)+p_1-1,$$

而

$$(-1)^{\tau(p_2\cdots p_n)+(j+1)}=(-1)^{\tau(p_2\cdots p_n)+(j-1)}.$$

记 p_1 为 j ,得

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

定理1.1.1说明n阶行列式是$n!$项的代数和,每一项是位于不同行、不同列的n个元素的乘积,行标按从小到大的标准次序排列,若列标为偶排列,该项前面取正号;列标为奇排列,该项前面取负号.

例 7 在六阶行列式中,项 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$ 应带什么符号?

解 对换项中元素的位置,使行标按从小到大的标准次序排列,即

$$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65},$$

列标所构成的排列为 431265.

$$\tau(431265)=1+2+2+0+1=6,$$

故所给的项在六阶行列式的展开式中应带正号.

例 8　确定

$$f(x)=\begin{vmatrix} 2x & -x & 1 & 2 \\ -1 & x & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -5x & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3x \end{vmatrix}$$

中 x^4 与 x^3 的系数.

解　由于只有对角线的元素相乘才出现 x^4，而且这一项带正号，即 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=2x\cdot x\cdot(-5x)\cdot 3x=-30x^4$. 故 $f(x)$ 中 x^4 的系数为 -30.

同理含 x^3 的项也只有一项,即

$$a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=(-x)\cdot(-1)\cdot(-5x)\cdot 3x=-15x^3.$$

而列标所构成的排列的逆序数

$$\tau(2134)=1+0+0=1,$$

故 $f(x)$ 中含 x^3 的项为 $15x^3$,系数为 15.

由定理 1.1.1 可知,三阶行列式

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\\ &=\sum_{p_1p_2p_3}(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}\\ &=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.\end{aligned}$$

定理 1.1.1 虽然给出了 n 阶行列式的完全表达式,但在具体应用定理解决问题时比较困难.

1.2　n 阶行列式的性质

利用行列式的定义计算特殊类型的行列式比较简单,但对一般的行列式,特别是高阶行列式,计算量相当大. 为简化行列式的计算,下面我们来讨论行列式的性质. 首先介绍一个重要的定理.

由上节 n 阶行列式的定义(1.9) 式可知,n 阶行列式可表示为第一行的元素与其对应的代数余子式的乘积之和,因此,(1.9) 式又称为行列式按第一行的展开式,事实上,行列式可按任意一行(列) 展开.

定理 1.2.1　n 阶行列式等于它的任意一行(列) 的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$