



TEACHING MATERIALS
FOR COLLEGE STUDENTS

高等学校教材

© 胡玉林 主编

工程力学专题



中国石化大学出版社
CHINA UNIVERSITY OF PETROLEUM PRESS



TEACHING MATERIALS
FOR COLLEGE STUDENTS
高等学校教材

工程力学专题

胡玉林 主编



中国石油大学出版社
CHINA UNIVERSITY OF PETROLEUM PRESS

图书在版编目(CIP)数据

工程力学专题/胡玉林主编. —东营: 中国石油大学出版社, 2014.8

ISBN 978-7-5636-4496-4

I. ①工… II. ①胡… III. ①工程力学—高等学校—教材 IV. ①TB12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 202862 号

中国石油大学(华东)规划教材

书 名: 工程力学专题

主 编: 胡玉林

责任编辑: 袁超红

封面设计: 赵志勇

出 版 者: 中国石油大学出版社(山东 东营 邮编 257061)

网 址: <http://www.uppbook.com.cn>

电子信箱: shiyoujiaoyu@126.com

印 刷 者: 青岛炜瑞印务有限公司

发 行 者: 中国石油大学出版社(电话 0532—86981532, 86983437)

开 本: 180 mm×235 mm 印张: 12.75 字数: 276 千字

版 次: 2014 年 10 月第 1 版第 1 次印刷

定 价: 26.00 元

Preface

前 言

本教材包括理论力学后续部分和材料力学后续部分,是根据教学计划调整后的实际情况编写的,可供机电、土木和石工等专业学生在已学习理论力学和材料力学基本内容的基础上选修,以加强和拓展力学基础,也可作为考研和参加力学竞赛时参考。

本教材理论力学部分包括碰撞理论、虚位移原理、第二类拉格朗日方程和单自由度系统的振动等四章;材料力学部分包括能量法、能量原理的应用、杆件弹塑性分析和弹性基础梁等四章。教师讲授时可根据不同学时和专业对内容进行增减。

本书理论力学部分(第一至四章)由王魁喜编写,并经崔孝秉教授仔细审阅和修改,钮瑞艳老师进行绘图和文字录入工作;材料力学部分(第五至八章)由胡玉林编写,林红老师绘图。全书由中国石油大学(华东)崔学政教授和山东科技大学王育平教授审阅并提出宝贵意见与建议。本书在编写和出版过程中还得到了中国石油大学(华东)储运与建筑工程学院工程力学系全体老师和有关人员的指导及帮助,在此表示由衷的感谢。

由于编者水平有限,书中难免有错误和不妥之处,敬请读者批评指正。

作 者

二〇一四年五月于青岛

第一章 碰撞理论	1
第一节 碰撞现象的基本特征及分类	1
第二节 两物体对心碰撞	3
第三节 碰撞冲量对定轴转动和平面运动刚体的作用	10
习 题	18
第二章 虚位移原理	21
第一节 约束·广义坐标·虚位移	21
第二节 虚功原理	25
第三节 保守系统平衡位置的能判据和稳定性	31
习 题	34
第三章 第二类拉格朗日方程	37
第一节 动力学普遍方程和第一类拉格朗日方程	37
第二节 第二类拉格朗日方程	39
第三节 循环积分和能量积分	52
第四节 两个自由度系统的平衡	56
习 题	57
第四章 单自由度系统的振动	62
第一节 单自由度系统无阻尼的自由振动	62
第二节 小阻尼条件下的自由振动——衰减振动	74
第三节 简谐激励力作用下的强迫振动	78
第四节 隔振原理简介	84
习 题	86
第五章 能量法	91
第一节 应变能	91

第二节	卡氏第一定理	94
第三节	莫尔定理	96
第四节	定理应用举例	98
第五节	互等定理	102
第六节	虚位移原理	103
习 题		108
第六章	能量原理的应用	111
第一节	冲击问题	111
第二节	细长压杆临界力	118
第三节	静不定结构	124
习 题		143
第七章	杆件弹塑性分析	147
第一节	概 述	147
第二节	金属材料的塑性性质	147
第三节	拉压杆系的弹塑性分析和极限载荷	149
第四节	圆截面轴扭转弹塑性分析 残余应力	152
第五节	等直梁弹塑性分析 塑性铰	153
第六节	结构的塑性极限载荷	159
习 题		168
第八章	弹性基础梁	171
第一节	概 述	171
第二节	无限长梁	172
第三节	半无限长梁	175
第四节	桩柱梁	177
第五节	有限长梁	180
习 题		187
习题参考答案		189
参考文献		197

第一章 碰撞理论

碰撞是一种常见的力学现象。两物体在运动中发生冲突或运动受到障碍,在短时间
内接触而又迅速分开,速度发生骤变,这种现象叫做碰撞。球类的弹射和回跳、打弹子游
戏、敲钉、打桩、锤锻、冲压等,都是日常生活和工程中常遇到的碰撞现象。以碰撞理论为
基础,人们创造了不同形式的机械进行生产,同时碰撞也会引起机器或结构的破坏,应采
取有效措施加以减少或避免。

第一节 碰撞现象的基本特征及分类

一、碰撞现象的基本特征

1. 碰撞过程极其短促,碰撞力大,具有瞬时性

碰撞持续时间 $\tau = 10^{-4} \sim 10^{-2} \text{ s}$ 。实验测知,两个直径 $d = 25 \text{ mm}$ 的黄铜球以 $v_n = 72 \text{ mm/s}$ 的法向相对速度接触,碰撞时间仅为 $\tau = 2 \times 10^{-4} \text{ s}$ 。相碰撞物体越硬,接触时间越短。

碰撞力大且随时间变化,如图 1-1 所示。在时间 τ 内,速度发生有限改变,动量发生突变,位置几乎不变。例如,榔头重 $W = 10 \text{ N}$,以速度 $v = 6 \text{ m/s}$ 撞击铁块,回撞速度 $v_2 = 1.5 \text{ m/s}$, $\tau = 10^{-3} \text{ s}$,则榔头平均打击力 $F = 7\,650 \text{ N}$,为榔头重的 700 多倍。又如,飞鸟重 17.8 N ,飞机飞行速度 $v = 800 \text{ km/h}$,则碰撞力 $F = 3.56 \times 10^5 \text{ N}$,为鸟重的 2×10^4 倍,这就是“鸟祸”造成飞机结构严重破坏的原因。

由于碰撞过程极短,碰撞力又很大,很难测量和表达,故通常只讨论瞬时力在时间 τ 内的积累效应,称为碰撞冲量,以 S 表示为

$$S = \int_0^{\tau} F dt \quad (1-1)$$

在研究碰撞问题时,通常作以下简化:

(1) 在碰撞过程中,忽略常规力冲量的作用。例如,重力等的冲量与碰撞冲量相比相

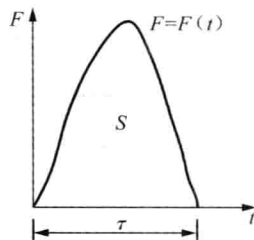


图 1-1

差极大,故可忽略。但仅限于碰撞过程的极短时间间隔内。碰撞开始前或结束后的阶段,则必须考虑非碰撞力对物体的作用。

(2) 在碰撞过程中,忽略物体的位移。由于碰撞时间极短,可认为物体来不及发生位移而碰撞已经结束,即物体的位置没有变动,物体的速度发生有限的变化。

基于以上分析,研究碰撞问题宜采用动量定理和动量矩定理的积分形式——冲量定理和冲量矩定理。

2. 碰撞过程中物体发生变形,伴有机械能损失

碰撞过程是一个极为复杂的过程。在碰撞过程中,由于发生变形,因材料内部摩擦转化为热能或其他形式的能(光、声等)而伴有机械能的损失。变形的大小和机械能损失的程 度,首先与材料的性质(弹性、塑性)有关。严格地说,“绝对刚体”的模型已不适用。为使问题简化,认为碰撞时物体的各质点几乎在同一瞬时完成相同的速度改变,称为刚体碰撞。我们用一个物理参量 e (恢复系数)来反映材料在碰撞过程中显示出来的变形和恢复的总特征。它取决于材料的弹性模量 E ,法向相对速度,物体的形状、尺寸、质量等因素,可由实验测得。因此,研究碰撞问题离不开实验,需通过实验测得不同材料的碰撞弹性恢复系数 e ,综合理论分析,解决工程中的有关碰撞问题。

二、碰撞过程

不考虑球的转动,视为质点,如图 1-2 所示。

(1) 变形阶段:从两物体开始接触到产生最大变形状态。刚硬物体碰撞时,变形一般很小,可假定在接触点的很小区域沿公法线方向受到挤压,从而产生变形,直至变形达到最大。

(2) 恢复阶段:从产生最大变形到两物体开始分离。由于弹性,材料将部分或全部恢复其形状,直至分开。

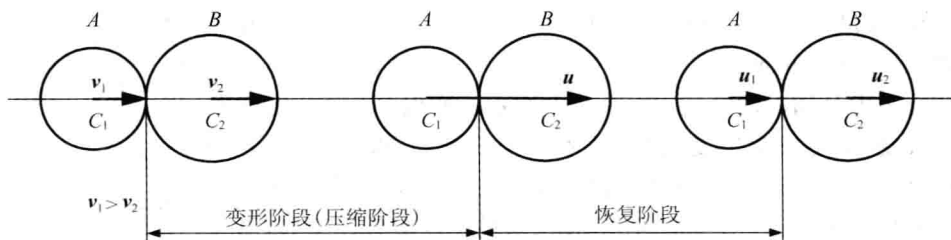


图 1-2

三、碰撞分类

(一) 按碰撞形式

1. 对心碰撞

对心碰撞时两物体质心连线通过接触面的公法线。

(1) 对心正碰撞:碰撞前后速度矢沿接触面公法线方向(图 1-3a);

(2) 对心斜碰撞:碰撞前后速度矢不沿接触面公法线方向(图 1-3b)。

2. 非对心碰撞

非对心碰撞时两物体质心连线不通过接触面的公法线(图 1-3c)。

本章主要研究对心正碰撞。

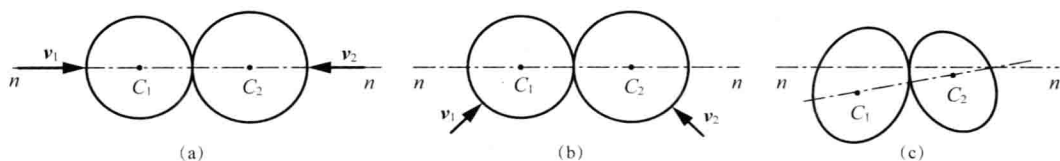


图 1-3

(二) 按恢复系数 e ($0 \leq e \leq 1$)

$$e = \frac{u_{2n} - u_{1n}}{v_{1n} - v_{2n}} = \frac{\text{碰撞后法向相对速度}}{\text{碰撞前法向相对速度}}$$

法向相对速度是指碰撞时沿接触面公法线方向的相对速度。

- (1) $e = 1$, 完全弹性碰撞, 碰撞前后动能守恒;
- (2) $e = 0$, 塑性碰撞, 变形不能恢复, 动能损失最大;
- (3) $0 < e < 1$, 弹性碰撞, 介于以上两种情况之间。

第二节 两物体对心碰撞

一、对心正碰撞

不失一般性, 用两个物体沿质心连线作平动的均质球代表对心正碰撞的物理模型。设两球质量为 m_1, m_2 , 碰撞前后速度分别为 v_1, v_2 和 u_1, u_2 , 且 $v_1 > v_2$, 两球碰撞时变形阶段和恢复阶段碰撞冲量分别为 S_I 和 S_{II} , 时间分别为 τ_1 和 τ_2 , 如图 1-4 所示, 研究碰撞后的速度和能量损失。

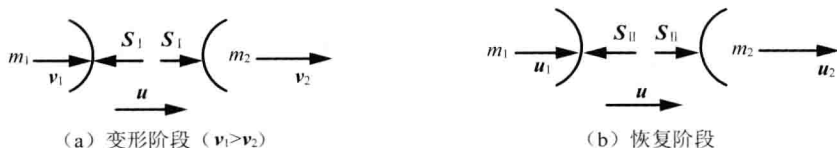


图 1-4

(一) 碰撞后的速度

对图 1-4(a) 有

$$\text{球 1} \quad m_1(u - v_1) = - \int_0^{\tau_1} F d\tau = -S_I \quad (a)$$

$$\text{球 2} \quad m_2(u - v_2) = \int_0^{\tau_1} F d\tau = S_I \quad (b)$$

由式(a)和(b)有

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

$$S_I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2) \quad (2)$$

对图 1-4(b)有

$$\text{球 1} \quad m_1 (u_1 - u) = - \int_0^{\tau_1} F' d\tau = -S_{II} \quad (c)$$

$$\text{球 2} \quad m_2 (u_2 - u) = \int_0^{\tau_1} F' d\tau = S_{II} \quad (d)$$

由式(c)和(d)有

$$u = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2} \quad (3)$$

$$S_{II} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (u_2 - u_1) \quad (4)$$

由式(1)和(3)有

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \quad (1-2)$$

式(1-2)表明,碰撞过程中两小球组成的系统不受外冲量的作用,动量守恒。

由式(2)和(4)有

$$e = \frac{S_{II}}{S_I} = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2} = - \frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2} \quad (1-3)$$

定义恢复系数 e 为碰撞后法向相对速度与碰撞前法向相对速度之比,可由实验测得。式中负号表示两个相对速度方向相反,计算时可取绝对值。式(1-3)说明,恢复系数 e 等于碰撞恢复阶段碰撞冲量 S_{II} 与变形阶段碰撞冲量 S_I 之比。

由式(1-2)和(1-3)有

$$u_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - e m_2 \frac{v_1 - v_2}{m_1 + m_2} = v_1 - (1+e) \frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)$$

$$u_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} + e m_1 \frac{v_1 - v_2}{m_1 + m_2} = v_2 - (1+e) \frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_2 - v_1)$$

讨论:

(1) 若 $e=1$, 则 $u_1 = v_1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)$, $u_2 = v_2 - \frac{2m_1}{m_1 + m_2} (v_2 - v_1)$ 。若 $m_1 = m_2$, 则 $u_1 = v_2$, $u_2 = v_1$, 即碰撞后两球速度互换; 若 $m_1 \gg m_2$, 则 $u_1 \approx v_1$, $u_2 \approx 2v_1 - v_2$ 。

(2) 若 $e=0$, 则 $u_1 = u_2 = u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$ 。

(二) 碰撞时的动能损失
初动能为

$$T_0 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

末动能为

$$T = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$$

动能损失为

$$\begin{aligned}\Delta T &= T - T_0 = \frac{1}{2}m_1(u_1^2 - v_1^2) + \frac{1}{2}m_2(u_2^2 - v_2^2) \\ &= \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}(1 - e^2)(v_1 - v_2)^2\end{aligned}\quad (1-4)$$

讨论:

(1) $e = 1$, $\Delta T = 0$, 没有动能损失;

(2) $e = 0$, $\Delta T = \Delta T_{\max} = \frac{1}{2}\mu(v_1 - v_2)^2$, 其中 $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$, 动能损失最大。

(三) 碰撞在锻锤机械和建工机械中的应用

1. 锻锤(图 1-5)

工件不动 ($v_2 = 0$), 希望将锻锤的动能尽可能多地变为工件的变形能(不计发光、发热), 动能损失越少, 锻件变形有用功越多, 即效率越高。

由式(1-4), $v_2 = 0$, $T_0 = \frac{1}{2}m_1v_1^2$, 则

$$\eta = \frac{\Delta T}{T_0} = \frac{1 - e^2}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \quad (1-5)$$

若不回跳, 即 $e = 0$, 则 $\eta = \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}}$ 。

提高 η 的途径如下:

(1) 减小 e 值, 如将工件加热烧红, 增加材料可塑性;

(2) 减小 m_1/m_2 , 如增加底座质量 m_2 , 一般取 $m_2 =$

$(15 \sim 25)m_1$;

(3) ΔT 不变, 减小 T_0 , 如采用双锻锤, 使底座以 $v_2 = -v_1$ 反向运动。

若 $m_1 = m_2 = m$, 则 $\Delta T = (1 - e^2)mv_1^2$, $T_0 = m_1v_1^2$, $\eta = 1 - e^2$, 意味着 $m_2 \rightarrow \infty$ 。

2. 打桩机(图 1-6)

希望把锤的动能尽可能多地传递给桩, 碰撞后锤与桩一起运动 ($e = 0$), 获得的动能 T 用来克服土壤阻力 R 所做的功。这与锻锤的情况相反。

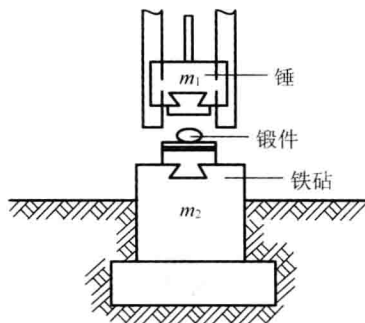


图 1-5

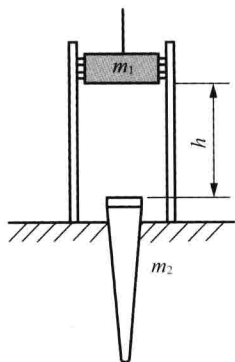


图 1-6

$$\eta = \frac{T}{T_0} = \frac{T_0 - \Delta T}{T_0} = 1 - \frac{\Delta T}{T_0} = 1 - \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - e^2) v_1^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2}$$

$$= \frac{1 + e^2 \frac{m_2}{m_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \quad (1-6)$$

$$\text{当 } e=0 \text{ 时, } \eta = \frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1}}。$$

提高打桩效率 η 的措施:降低 m_2/m_1 , 即增大锤的质量 m_1 。

土壤平均阻力 R 所做的功的计算公式为

$$RH = T$$

式中, H ——每次打桩下沉的深度;

T ——碰撞后桩与锤一起运动具有的动能。

$$T = T_0 \eta = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \eta = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left(\frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \right)^2$$

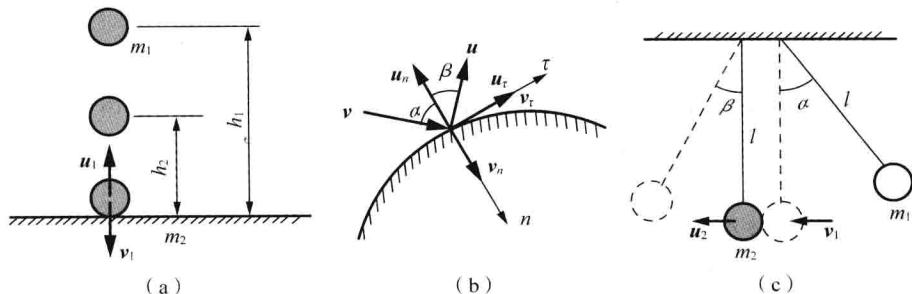
$$T = \frac{m_1^2 gh}{m_1 + m_2}$$

式中, h ——打落高度, $v_1^2 = 2gh$ 。

例 1-1 试举例说明碰撞弹性恢复系数 e 的测定方法。

解:

方法 1 测定小球与固定地平面碰撞的回弹高度 h_2 (例 1-1a 图)



例 1-1 图

设小球质量为 m_1 , 自高度 h_1 无初速地自由下落, 回弹高度为 h_2 。由动能定理, 碰撞前小球速度为

$$v_1 = \sqrt{2gh_1} \quad (1)$$

碰撞后速度为

$$u_1 = \sqrt{2gh_2} \quad (2)$$

由恢复系数定义

$$e = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2} = \frac{0 - (-u_1)}{v_1 - 0} = \frac{u_1}{v_1} \quad (3)$$

将式(1)和(2)代入(3),有

$$e = \sqrt{h_2/h_1}$$

反复实验测量 h_2 多次,取平均值。

方法2 测量小球与固定光滑面斜碰撞的入射角 α 和反射角 β (例 1-1b 图)

$$e = \frac{u_{2n} - u_{1n}}{v_{1n} - v_{2n}} = \frac{u_{1n}}{v_{1n}} = \frac{u_n}{v_n} \quad (1)$$

切向动量守恒,即 $u_\tau = v_\tau$ 。又

$$\left. \begin{aligned} v_n &= v \cos \alpha \\ u_n &= u \cos \beta \\ v_\tau &= v \sin \alpha \\ u_\tau &= u \sin \beta \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

代入式(1)得

$$e = \frac{u_n}{v_n} = \frac{u \cos \beta}{v \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \sin \beta} = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta}$$

方法3 测定双单摆正碰撞回弹角(例 1-1c 图)

图示为由同一材料制成的质量分别为 m_1 和 m_2 的小球(视为质点)与长均为 l 的细绳组成的二单摆,将一单摆自 α 静止释放,碰撞后另一单摆最大回弹角为 β (可测得)。

初始状态静止,由动能定理有

$$v_1 = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)}$$

$$v_2 = 0$$

$$u_2 = \sqrt{2gl(1 - \cos \beta)}$$

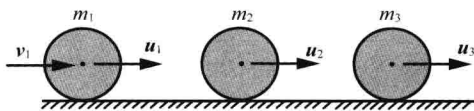
由动量守恒 $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$, 得碰撞后 1 球速度为

$$u_1 = v_1 - \frac{m_2}{m_1} u_2$$

于是有

$$e = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2} = \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{1 - \cos \alpha}} - 1$$

例 1-2 如例 1-2 图所示,质量为 m_1 , m_2 和 m_3 的三个完全弹性球静止于同一直线上。第 1 球以速度 v_1 沿直线撞击球 2,继而撞击球 3。求第 2 球质量 m_2 应为何值才能使第 3 球于碰撞后获得的速度最大。



例 1-2 图

解: 设三球碰撞后速度分别为 u_1 , u_2 和 u_3 , 由动量守恒, 知 1 和 2 球满足

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \quad (1)$$

又

$$e = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2} = \frac{u_2 - u_1}{v_1} = 1 \quad (2)$$

解得

$$u_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \quad (3)$$

对 2 和 3 球, 仿照式(1)和(2)或式(3)有

$$u_3 = \frac{2m_2 u_2}{m_2 + m_3} \quad (4)$$

由式(3)和(4)有

$$u_3 = \frac{4m_1 m_2 v_1}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)}$$

欲使 u_3 最大, m_2 应满足 $\frac{du_3}{dm_2} = 0$, 且 $\frac{d^2 u_3}{dm_2^2} < 0$, 即

$$\frac{du_3}{dm_2} = 4m_1 v_1 \frac{m_1 m_3 - m_2^2}{(m_1 + m_2)^2 (m_2 + m_3)^2} = 0$$

于是有

$$m_2 = \sqrt{m_1 m_3}$$

二阶导数: 分母 > 0 , 分子为 $-m_1 m_3 (m_1 + m_3) - m_2 (m_2^2 + 3m_1 m_3) < 0$, 所以有

$$\frac{d^2 u_3}{dm_2^2} < 0, u_3 \text{ 最大}$$

例 1-3 摆锤的质量 $m_A = 4 \text{ kg}$, 悬线长 $l = 3 \text{ m}$, 自水平位置无初速度落下, 恰击中静止在水平面上质量 $m_B = 5 \text{ kg}$ 的物块 B, 设碰撞恢复系数 $e = 0.8$, B 与地面间动滑动摩擦系数 $f' = 0.3$ 。求物块 B 沿水平面滑行的最大距离 S_B 及摆锤 A 碰撞后升高的偏角 θ_A 。

解: 碰撞前、后按动力学一般方法处理,碰撞过程按碰撞理论处理。

1. 碰撞前

由机械能守恒, A 由水平位置运动到铅垂位置时的速度为

$$v_A = \sqrt{2gl} \quad (1)$$

物块 B 速度为

$$v_B = 0$$

2. 碰撞过程(例 1-3a 图)

动量守恒

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A u_A + m_B u_B \quad (2)$$

按恢复系数定义

$$e = \frac{u_B - u_A}{v_A} \quad (3)$$

由式(1),(2)和(3)解得

$$u_A = \frac{m_A - em_B}{m_A + m_B} v_A = \frac{4 - 0.8 \times 5}{4 + 5} = 0$$

$$u_B = \frac{(1+e)m_A v_A}{m_A + m_B} = \frac{(1+0.8) \times 4 \sqrt{2 \times 9.8 \times 3}}{4 + 5} = 6.135 \text{ m/s}$$

3. 碰撞后

$u_A = 0$, 故碰撞后 A 静止, $\theta_A = 0$ 。

研究物块 B, 受力与运动分析如例 1-3(b) 图所示。由

动能定理

$$0 - \frac{1}{2} m_B u_B^2 = -F' S_B$$

又 $F' = f' N = m_B g f'$, 所以

$$S_B = \frac{u_B^2}{2g f'} = \frac{6.135^2}{2 \times 9.8 \times 0.3} = 6.4 \text{ m}$$

* 二、对心斜碰撞

斜碰撞是指碰撞前后速度矢不沿接触面公法线方向,即球心速度矢不与连心线相重合,如图 1-7 所示。可将碰撞前后的速度沿法向和切向分解为: $v_{1n}, v_{1\tau}, v_{2n}, v_{2\tau}; u_{1n}, u_{1\tau}, u_{2n}, u_{2\tau}$ 。

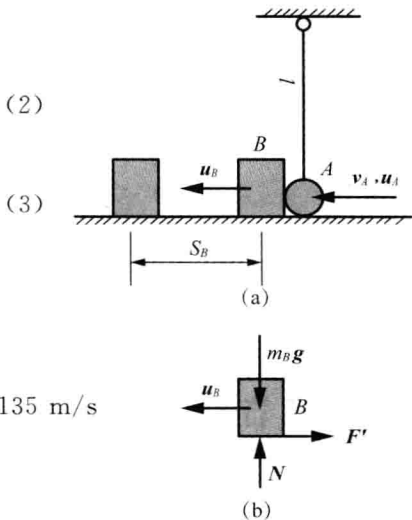
(一) 两球光滑

若已知 v_1, v_2 及 e , 由质点系沿 n, τ 方向动量守恒有

$$m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n} = m_1 u_{1n} + m_2 u_{2n} \quad (1-7)$$

$$m_1 v_{1\tau} + m_2 v_{2\tau} = m_1 u_{1\tau} + m_2 u_{2\tau} \quad (1-8)$$

由恢复系数定义有



例 1-3 图

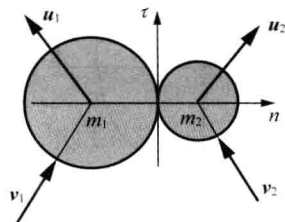


图 1-7

$$e = \frac{u_{1n} - u_{2n}}{v_{2n} - v_{1n}} \quad (1-9)$$

圆球面光滑,由其中任一球(如 m_1)碰撞前后沿切线方向动量守恒,有

$$v_{1\tau} = u_{1\tau} \quad (1-10)$$

联立以上四式可求得碰撞后的速度 u_{1n} , $u_{1\tau}$, u_{2n} 和 $u_{2\tau}$ 。

(二) 两球间存在摩擦

若球不光滑,由于摩擦力出现,可能使球发生转动。由两球组成的系统,摩擦力是内力,故沿 n , τ 方向动量守恒,即(1-9)和(1-10)式仍成立。

任一球沿切向动量的变化等于摩擦系数 f 乘以法向动量的变化(法向冲量),即

$$m_1 u_{1\tau} - m_1 v_{1\tau} = f(m_1 u_{1n} - m_1 v_{1n})$$

于是有

$$u_{1\tau} - v_{1\tau} = f(u_{1n} - v_{1n})$$

类似的有

$$u_{2\tau} - v_{2\tau} = f(u_{2n} - v_{2n})$$

第三节 碰撞冲量对定轴转动和平面运动刚体的作用

一、碰撞冲量对定轴转动刚体的作用

定轴转动刚体受到外碰撞冲量 S 的作用,对应的碰撞力极其巨大,角速度将发生急剧的变化,轴承处也必然受到轴承反作用碰撞冲量的作用,从而损害机件的寿命。因此,必须设法减弱碰撞的冲量作用或使之不能传递到轴承上,如采用缓冲装置等。更好的办法则是使轴承上不产生碰撞冲量,这就需要研究消除轴承处碰撞冲量的一般条件。

研究碰撞冲量对定轴转动刚体的作用需利用对定轴的冲量矩定理和对质心的冲量定理,即

$$J_O(\omega_2 - \omega_1) = \sum M_O(S^e) \quad (1-11)$$

$$mu_C - mv_C = \sum S^e \quad (1-12)$$

设转轴 z 垂直于质量对称面的定轴转动刚体,质量为 m , 对 O 轴转动惯量为 J_O , 质心 C 至转轴 O 的距离为 a , 主动力的冲量 S 作用于 K 点,如图 1-8 所示。求 $\overline{OK} = h = ?$ 才能消除轴承处的冲击。

设碰撞前后角速度分别为 ω_0 和 ω , 由对固定轴 Oz 的冲量矩定理有

$$J_O \omega - J_O \omega_0 = Sh \cos \alpha \quad (1)$$

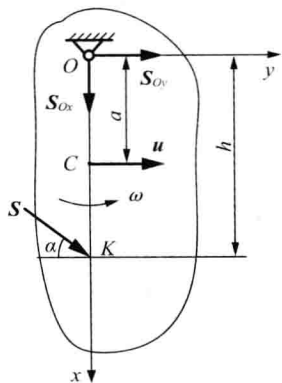


图 1-8

由冲量形式的动量定理(质心运动定理)有

$$m(u_{Cx} - v_{Cx}) = S \sin \alpha + S_{Ox} \quad (2)$$

$$m(u_{Cy} - v_{Cy}) = S \cos \alpha + S_{Oy} \quad (3)$$

由于 $u_{Cx} = v_{Cx} = 0$, $u_{Cy} = \omega a$, $v_{Cy} = \omega_0 a$, 代入式(1),(2)和(3)解得

$$\omega - \omega_0 = \frac{Sh \cos \alpha}{J_O}$$

$$S_{Ox} = -S \sin \alpha$$

$$S_{Oy} = S \cos \alpha \left(\frac{mah}{J_O} - 1 \right)$$

若使 $S_{Ox} = 0$, $S_{Oy} = 0$, 即轴承处不受碰撞冲量的作用, 必有

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 0 \\ h &= \frac{J_O}{ma} \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

式(1-13)表明, 对于转轴垂直于质量对称面的物体, 轴承处不产生碰撞冲量的条件是:

(1) 碰撞冲量作用线必须在对称平面内, 且垂直于质心的转动半径, 即 $\mathbf{S} \perp \overrightarrow{OC}$;

(2) 碰撞冲量作用线到转轴的距离必须满足 $\overline{OK} = \frac{J_O}{ma}$, K 点称为撞击中心。

在工程中, 材料冲击试验机、测定枪弹速度的冲击摆等利用碰撞的机器或仪器应尽量使碰撞冲量的作用点位于撞击中心, 以避免轴承因冲击引起损伤。

另外, 如果将 O 与 K 位置对换, 即将轴承移到 K 处, 冲量 $\mathbf{S}$ 平移到 O 处, 如此配置后, 新轴承 K 处反作用冲量仍为零, 称为撞击中心与轴承的互换性(请读者自己证明)。

例 1-4 如例 1-4(a)图所示, 体操运动员 A 由高度 H 无初速地跳下, 落在水平跳板上的 E 端, 把跳板另一端 C 的运动员 B 弹起。设两人质量均为 m , 板长为 $2l$, 支承在中点 D , 板质量为 m_p , 可视为均质薄板。假设 A 的碰撞是: (1) 完全塑性的, $e=0$; (2) 完全弹性的, $e=1$ 。试分别求 B 被弹起后其质心上升的高度 h 。

解: 将 A 和 B 视为质点。

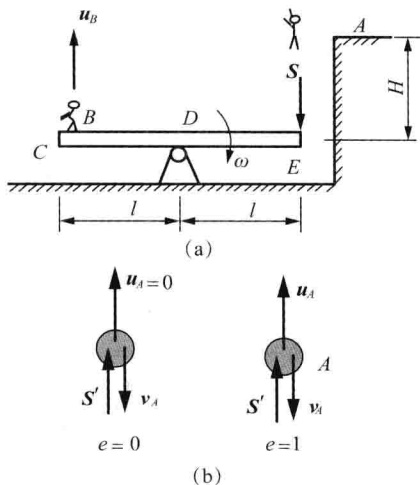
1. 碰撞前

A 落至 E 处的速度为

$$v_A = \sqrt{2gH} \quad (1)$$

跳板静止, 角速度 $\omega_0 = 0$ 。

2. 碰撞过程



例 1-4 图