奥林匹克丛书主编　邓继新

初中数学奥林匹克教程

编著　尚　强等

广东经济出版社

奥林匹克丛书主编　　邓继新

初中数学奥林匹克基础教程

编著　尚　强　等

广东经济出版社

策　　划：许先俊
责任编辑：赵世平
封面设计：王美蓉
责任技编：梁碧华

初中数学奥林匹克基础教程

编著　尚　强　等

*

广东经济出版社出版发行
广 东 省 新 华 书 店 经 销
广 东 科 普 印 刷 厂 印 刷
（厂址：广州市应元路大华街兴平里 3 号）
787×1092 毫米　32 开本　15.5 印张　335 千字
1997 年 2 月第 1 版　1997 年 2 月第 1 次印刷
印数 1—12,000 册
ISBN 7－80632－056－3/G・14
定价：19.00 元

初中数学奥林匹克基础教程

策　划：许先俊
编　著：尚　强　高德铨　黄建忠　许　强　郭胜宏
李德雄　孙群燕　魏显峰　郭惠清　刘秉直
刘克新　柯友生　姜　超　闻厚贵　刘会京

内 容 提 要

本书根据九年制义务教育新大纲和初中数学竞赛大纲撰写，按课本内容顺序编排，分成初一、初二、初三共 24 讲．最后配备了 14 套全国初中联赛模拟试题，供赛前训练之用．每讲重点突出，各讲之间相互渗透，将数学的基础知识、基本理论、基本方法融为一体，使用十分方便．是一本很有价值的教学参考书．

前　言

数学竞赛像其它竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞技．数学竞赛之所以受到各国的普遍重视，正是由于它在选拔和培养人材上是一种有效途径，它活跃了学校的课外活动，提高了学生钻研数学的兴趣，为学生将来成为高科技人才打下了良好的基础．中国数学奥林匹克代表队多次获得国际数学奥林匹克竞赛总分第一，标志着我国数学竞赛水平在国际居领先地位，为各国科学家和教育家所瞩目．

美国早期数学竞赛获奖者米尔诺、罗福德、奎伦等都是菲尔兹奖（国际最高数学奖）获得者；在匈牙利，世界级数学大师费叶、黎茨、舍贵、哈尔、拉多等都曾是数学竞赛获奖者．有理由相信，不久将来，中国一定会出现一批像费叶、华罗庚这样的大数学家．

中国数学会理事长王元教授倡导“在数学竞赛中，应当注意普及与提高相结合，而且要普及为主，使竞赛具有广泛的群众基础。”我们按照这个指导思想编写本书。本书难度适中，与教材大致同步，适宜读者是数学水平中等以上学生，使本书成为对课堂内容的有益补充和引申．编写时，紧扣《中学数学教学大纲》和《数学竞赛大纲》，从学生的知识结构和思维水平出发，由浅入深，由易到难，循序渐进地介绍数学知识，渗透数学思想和方法，扩大学生的视野．本书可供初中各年级学生在各类竞赛前学习之用，又可作为全国各地奥

林匹克辅导班的教材使用.

本书策划：许先俊。

尚强拟定了本书写作提纲和目录，同时承担各讲稿初审、修改工作，最后进行了统稿.

编写分工：尚强编写第四、十二、十三、十七、二十、二十二、二十三、二十四讲；许强编写第五、六讲；孙群燕编写第七、八讲；郭胜宏编写第十讲；李德雄编写第二十一讲；魏显峰编写第一、二、三讲；郭惠清编写第十九讲；刘秉直编写第十四、十五讲，刘克新编写第十六、十八讲；柯友生编写第十一讲；姜超编写第九讲；刘会金参加了第二十四讲编写.

特邀请闻厚贵先生编写部分模拟试题.

由于编者水平有限，本书缺点和疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正.

尚　强

1996 年 6 月于深圳

目　录

〔初中一年级〕

第一讲 有理数

有理数的计算是初中数学的一个重要内容，培养以计算速度、计算技巧为主要内容的计算能力和善于观察、发现规律，掌握并运用规律来处理各种复杂的数学问题的能力是重要的.

§1.1 整数乘法的简算与速算

整数乘法的简算与速算在进行较大数目运算时是非常重要的，通常是将数分解成较小整数来降低运算复杂程度，然后再逐层“合并”，以达到最终目的.

例1 计算 $(-625)\times112\times(-9)$.

分析：我们可以把每个因子分解，然后再“合并”，最后得出结果.

解：$(-625)\times112\times(-9)$

$=(25\times25)\times(4\times4\times7)\times9$

$=(25\times4)\times(25\times4)\times(7\times9)$

$=100\times100\times63$

$=630000$.

评注：简算与速算要求迅速而合理地将整数分解，并将其搭配成个位数为零的积的形成，从而减少计算量.

例 1 的方法对于含 2 和 5 的整数比较适用，但对于不含

2 和 5 这两个约数的整数就要采取其它的方法，通常是从整体结构上考虑，寻找可能出现个位是零的情况，应用运算律（分配律较多）简算与速算.

例 2 计算 $1989\times19911991-1991\times19891988$. （第二届希望杯全国初中数学邀请赛试题）

分析：从整体结构上看，两个乘积结构是相同的，先把较大的整数分解.

解：
$$\begin{aligned}&1989\times19911991-1991\times19891988\\&=1989\times(1991\times10000+1991)-1991\times(1989\times10000+1988)\\&=1989\times1991\times10000+1989\times1991-1991\times1989\times10000-1991\times1988\\&=1989\times1991-1991\times1988\\&=1991\times(1989-1988)\\&=1991.\end{aligned}$$

评注：由例 2 我们也可以看到，两种方法并不是独立的，仔细观察，积极思考，将各种方法综合起来运用，从而达到较好的简算、速算的效果，才是我们的最终目的.

例 3 计算 $1991^2-1992^2-1993^2+1994^2$.

分析：这道题如果直接作，就算用计算器也十分麻烦，我们考虑用初中的代数法来解决它.

解：设 $1991=a$，则 $1992=a+1$，$1993=a+2$，$1994=a+3$.

原式 $=a^2-(a+1)^2-(a+2)^2+(a+3)^2$
$=a^2-(a^2+2a+1)-(a^2+4a+4)+(a^2+6a+9)$

$=a^2-a^2-2a-1-a^2-4a-4+a^2+6a+9$

$=4.$

评注：由例3我们可以看到，代数法正是用简单字母来代替复杂数字，帮助我们发现题目中隐含条件，从而解题. 这种方法在初中竞赛运用十分广泛.

§1.2 求若干有理数之和的技巧

在各类竞赛题中，求若干有理数之和这类题目经常受到命题者的偏爱，这不仅仅是因为这类题目技巧性强，更主要的是它体现了众多的数学思想，及其在各门学科中广泛的应用. 下面介绍几种主要的方法.

求若干有理数之和的技巧与这些有理数的结构特点息息相关. 这类有理数可分为三类.

第一类：每相邻两个有理数的差都相等（从第二个有理数起）.

例如：$1+2+3+4+\cdots+100$，又如：$83+84+85+86+87+88+\cdots+99$ 等，我们常常是将每个有理数的位置倒过来，然后相加求和. 通常称为错项相加.

例4 求 $2+4+\cdots+1994+1996$.

分析：这些有理数每相邻两个数的差都是2.

解：设 $S=2+4+\cdots+1994+1996$，

则：$S=1996+1994+\cdots+4+2$.

将上面两式左右两边对应的加数分别相加，于是有：

$$\begin{aligned}2S&=(1996+2)+(1994+4)+\cdots+(2+1996)\\&=(1996+2)\times 998\\&=1998\times 998.\end{aligned}$$

$\therefore \quad S=999\times 998=999\times(1000-2)=999000-1998$
$=997002.$

评注：将加法倒写过来，对应的加数之和相等，共有 998 个数相加，于是加法转化为乘法，我们又用简便算法将积算出来．下面几个常用求和公式需要同学们掌握：

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2};$$

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2;$$

$$2+4+6+\cdots+2n=n(n+1).$$

这里 n 是任意自然数．

第二类：特点是后一个加数与前一个加数的比都相等（从第二个加数起）．

例如：

$$2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{1996}.$$

显然 $2^2\div 2=2^3\div 2^2=\cdots=2^{1996}\div 2^{1995}=2.$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{1996}}.$$

显然$\frac{1}{2}\div 1=\frac{1}{4}\div\frac{1}{2}=\cdots=\frac{1}{2^{1996}}\div\frac{1}{2^{1995}}=\frac{1}{2}.$

这类问题，我们通常是将每个有理数都乘以这个比，然后再将前后两和做差求得．通常称为错项相减．

例 5 求 $3+3^2+3^3+\cdots+3^{1997}$．

显然后一个加数都是前一个加数的 3 倍．

解：设 $S=3+3^2+3^3+\cdots+3^{1997}$． ……………… ①

两边都乘 3，

$$3S=3^2+3^3+\cdots+3^{1997}+3^{1998}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

用②式减去①式得：

$$2S=3^{1998}-3,$$

$$\therefore \quad S=\frac{3^{1998}-3}{2}.$$

评注：①、② 式只有两项不同，这样做差后，将计算量减小了，从而较快得出结论.

例 6 求 $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}-\cdots-\frac{1}{2^{99}}-\frac{1}{2^{100}}$.

仿例 5 解此题.

解：设 $S=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}-\cdots-\frac{1}{2^{99}}-\frac{1}{2^{100}}$. …①

两边都乘以 2，

$$2S=-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}-\cdots-\frac{1}{2^{99}}. \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

用②式减去①式得：

$$S=-1+\frac{1}{2^{100}}.$$

$$\therefore \quad S=\frac{1}{2^{100}}-1.$$

评注：1. 这种错项相减的方法在初中竞赛中运用也比较广泛，需要注意的是有些题目并不明显，要善于观察.

2. 两边都乘以 $\frac{1}{2}$，也可以求出 S，同学们不妨一试.

第三类：用于这样一些有理数，它们之间没有以上两种关系，但却围绕着某个值波动.

例 7 计算 73＋68＋69＋71＋74＋72＋66＋78＋62＋80.

观察可知这 10 个数都是 70 左右的数字，我们如果按顺序加法运算也未常不可，但如果我们把这些数与 70 作差，求差的代数和就会大大减少计算量. 下面我们具体求解这道题：

解：我们将上面 10 个数与 70 作差，得到下面 10 个数：

$+3$，-2，-1，$+1$，$+4$，$+2$，-4，$+8$，-8，$+10$，

它们的代数和是：

$$+3-2-1+1+4+2-4+8-8+10=13.$$

于是

$$\begin{aligned}&73+68+69+71+74+72+66+78+62+80\\&=70\times10+13\\&=713.\end{aligned}$$

第四类：裂项求和.

我们知道：

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6},$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

如果我们把乘积写成另一种形式，会是怎样：

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2\cdot3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{3\cdot4}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}.$$

类似的我们有：

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}.$$

例 8　求$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$.

有了我们上面的分析，很自然我们把结论再变一下：

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

这便是我们解此题的思路.