

奥林匹克丛书主编 邓继新

初中数学奥林匹克教程

编著 尚 强等

广东经济出版社

奥林匹克丛书主编 邓继新

初中数学奥林匹克基础教程

编著 尚强等

广东经济出版社

策 划：许先俊
责任编辑：赵世平
封面设计：王美蓉
责任技编：梁碧华

初中数学奥林匹克基础教程

编著 尚 强 等

*

广东经济出版社出版发行
广东省新华书店经销
广东科普印刷厂印刷

(厂址：广州市应元路大华街兴平里3号)

787×1092毫米 32开本 15.5印张 335千字

1997年2月第1版 1997年2月第1次印刷

印数1—12,000册

ISBN 7-80632-056-3/G·14

定价：19.00元

如发现印装质量问题，影响阅读，请与承印厂联系调换。

初中数学奥林匹克基础教程

策 划：许先俊

编 著：尚 强 高德铨 黄建忠 许 强 郭胜宏
李德雄 孙群燕 魏显峰 郭惠清 刘秉直
刘克新 柯友生 姜 超 闻厚贵 刘会京

内 容 提 要

本书根据九年制义务教育新大纲和初中数学竞赛大纲撰写，按课本内容顺序编排，分成初一、初二、初三共 24 讲。最后配备了 14 套全国初中联赛模拟试题，供赛前训练之用。每讲重点突出，各讲之间相互渗透，将数学的基础知识、基本理论、基本方法融为一体，使用十分方便。是一本很有价值的教学参考书。

前 言

数学竞赛像其它竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞技。数学竞赛之所以受到各国的普遍重视，正是由于它在选拔和培养人材上是一种有效途径，它活跃了学校的课外活动，提高了学生钻研数学的兴趣，为学生将来成为高科技人才打下了良好的基础。中国数学奥林匹克代表队多次获得国际数学奥林匹克竞赛总分第一，标志着我国数学竞赛水平在国际居领先地位，为各国科学家和教育家所瞩目。

美国早期数学竞赛获奖者米尔诺、罗福德、奎伦等都是菲尔兹奖（国际最高数学奖）获得者；在匈牙利，世界级数学大师费叶、黎茨、舍贵、哈尔、拉多等都曾是数学竞赛获奖者。有理由相信，不久将来，中国一定会出现一批像费叶、华罗庚这样的大数学家。

中国数学会理事长王元教授倡导“在数学竞赛中，应当注意普及与提高相结合，而且要普及为主，使竞赛具有广泛的群众基础。”我们按照这个指导思想编写本书。本书难度适中，与教材大致同步，适宜读者是数学水平中等以上学生，使本书成为对课堂内容的有益补充和引申。编写时，紧扣《中学数学教学大纲》和《数学竞赛大纲》，从学生的知识结构和思维水平出发，由浅入深，由易到难，循序渐进地介绍数学知识，渗透数学思想和方法，扩大学生的视野。本书可供初中各年级学生在各类竞赛前学习之用，又可作为全国各地奥

林匹克辅导班的教材使用。

本书策划：许先俊。

尚强拟定了本书写作提纲和目录，同时承担各讲稿初审、修改工作，最后进行了统稿。

编写分工：尚强编写第四、十二、十三、十七、二十、二十二、二十三、二十四讲；许强编写第五、六讲；孙群燕编写第七、八讲；郭胜宏编写第十讲；李德雄编写第二十一讲；魏显峰编写第一、二、三讲；郭惠清编写第十九讲；刘秉直编写第十四、十五讲，刘克新编写第十六、十八讲；柯友生编写第十一讲；姜超编写第九讲；刘会金参加了第二十四讲编写。

特邀请闻厚贵先生编写部分模拟试题。

由于编者水平有限，本书缺点和疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正。

尚 强

1996年6月于深圳

目 录

初中一年级	(1)
第一讲 有理数	(1)
§ 1.1 整数乘法的简算与速算	(1)
§ 1.2 求若干有理数之和的技巧	(3)
§ 1.3 相反数与绝对值	(10)
第二讲 整数的基本知识	(16)
§ 2.1 数的整除性	(16)
§ 2.2 末位数字	(18)
§ 2.3 完全平方数	(21)
第三讲 一元一次方程	(27)
§ 3.1 含字母系数的方程	(27)
§ 3.2 定义新运算	(31)
§ 3.3 应用题	(33)
第四讲 一次方程(组)与不等式	(39)
§ 4.1 一次方程(组)	(39)
§ 4.2 一次不等式	(42)
§ 4.3 一次不定方程与方程组	(45)
第五讲 整 式	(51)
§ 5.1 运算的基本法则	(51)
§ 5.2 乘法公式应用	(56)
§ 5.3 整式的除法及余式定理	(62)
第六讲 初中一年级竞赛模拟训练	(69)

初中二年级	(81)
第七讲 因式分解	(81)
§ 7.1 公式法及添拆项法	(81)
§ 7.2 求根分解法与换元法	(85)
§ 7.3 待定系数法与主元法	(89)
第八讲 分式运算技巧	(95)
§ 8.1 分式计算	(95)
§ 8.2 分式的求值	(98)
§ 8.3 分式的证明	(105)
第九讲 三角形	(113)
§ 9.1 三角形中有关角度的计算	(113)
§ 9.2 全等三角形	(117)
§ 9.3 三角形中的不等关系	(120)
第十讲 根式与取整	(128)
§ 10.1 实数与算术平方根	(128)
§ 10.2 二次根式的化简、指数运算	(134)
§ 10.3 取整 $[x]$ 运算及其运用	(145)
第十一讲 四边形	(149)
§ 11.1 平行四边形与梯形	(149)
§ 11.2 有关正方形的计算与证明	(155)
§ 11.3 勾股定理与四边形的面积、面积法	(159)
第十二讲 初中二年级竞赛模拟训练	(165)
初中三年级	(191)
第十三讲 相似形	(191)
§ 13.1 比例线段与平行线	(191)
§ 13.2 相似三角形	(194)

§ 13.3	相似形与面积	(199)
第十四讲	一元二次方程	(208)
§ 14.1	可化为一元二次方程的方程	(208)
§ 14.2	根与系数的关系	(213)
§ 14.3	判别式 Δ 的运用	(218)
第十五讲	函数的图象和性质	(223)
§ 15.1	定义域与值域	(223)
§ 15.2	函数的解析式与图象	(229)
§ 15.3	二次函数的最值	(235)
第十六讲	一元二次不等式	(239)
§ 16.1	不等式的解法	(239)
§ 16.2	不等式与函数关系	(243)
§ 16.3	含字母系数与含绝对值的不等式	(247)
第十七讲	圆	(253)
§ 17.1	与圆有关定理	(253)
§ 17.2	定理的融汇贯通与几何量的转换	(257)
§ 17.3	点共圆与几何量的转换	(260)
第十八讲	解三角形	(270)
§ 18.1	三角函数	(270)
§ 18.2	正弦定理和余弦定理	(274)
§ 18.3	有关面积公式	(280)
第十九讲	极端原理初步	(285)
第二十讲	三角形的心	(295)
第二十一讲	数形结合思想及其应用	(310)
第二十二讲	凸图形与覆盖简介	(323)
§ 22.1	凸图形	(323)

§ 22.2	覆盖	(327)
第二十三讲	染色问题	(338)
§ 23.1	点染色	(338)
§ 23.2	线段染色	(342)
§ 23.3	方格染色	(343)
第二十四讲	全国初中数学联赛综合训练	(348)
综合训练之一		(348)
综合训练之二		(351)
综合训练之三		(354)
综合训练之四		(357)
综合训练之五		(360)
综合训练之六		(363)
综合训练之七		(366)
综合训练之八		(369)
综合训练之九		(372)
综合训练之十		(375)
综合训练之十一		(378)
综合训练之十二		(381)
综合训练之十三		(384)
综合训练之十四		(387)
答案与提示		(389)

〔初中一年级〕

第一讲 有理数

有理数的计算是初中数学的一个重要内容，培养以计算速度、计算技巧为主要内容的计算能力和善于观察、发现规律，掌握并运用规律来处理各种复杂的数学问题的能力是重要的。

§ 1.1 整数乘法的简算与速算

整数乘法的简算与速算在进行较大数目运算时是非常重要的，通常是将数分解成较小整数来降低运算复杂程度，然后再逐层“合并”，以达到最终目的。

例 1 计算 $(-625) \times 112 \times (-9)$ 。

分析：我们可以把每个因子分解，然后再“合并”，最后得出结果。

解： $(-625) \times 112 \times (-9)$

$$= (25 \times 25) \times (4 \times 4 \times 7) \times 9$$

$$= (25 \times 4) \times (25 \times 4) \times (7 \times 9)$$

$$= 100 \times 100 \times 63$$

$$= 630000.$$

评注：简算与速算要求迅速而合理地将整数分解，并将其搭配成个位数为零的积的形成，从而减少计算量。

例 1 的方法对于含 2 和 5 的整数比较适用，但对于不含

2 和 5 这两个约数的整数就要采取其它的方法，通常是从整体结构上考虑，寻找可能出现个位是零的情况，应用运算律（分配律较多）简算与速算。

例 2 计算 $1989 \times 19911991 - 1991 \times 19891988$. (第二届希望杯全国初中数学邀请赛试题)

分析：从整体结构上看，两个乘积结构是相同的，先把较大的整数分解。

解：

$$\begin{aligned} & 1989 \times 19911991 - 1991 \times 19891988 \\ &= 1989 \times (1991 \times 10000 + 1991) - 1991 \times (1989 \times \\ & \quad 10000 + 1988) \\ &= 1989 \times 1991 \times 10000 + 1989 \times 1991 - 1991 \times 1989 \\ & \quad \times 10000 - 1991 \times 1988 \\ &= 1989 \times 1991 - 1991 \times 1988 \\ &= 1991 \times (1989 - 1988) \\ &= 1991. \end{aligned}$$

评注：由例 2 我们也可以看到，两种方法并不是独立的，仔细观察，积极思考，将各种方法综合起来运用，从而达到较好的简算、速算的效果，才是我们的最终目的。

例 3 计算 $1991^2 - 1992^2 - 1993^2 + 1994^2$.

分析：这道题如果直接作，就算用计算器也十分麻烦，我们考虑用初中的代数法来解决它。

解：设 $1991 = a$ ，则 $1992 = a + 1$ ， $1993 = a + 2$ ，
 $1994 = a + 3$ 。

原式 $= a^2 - (a + 1)^2 - (a + 2)^2 + (a + 3)^2$
 $= a^2 - (a^2 + 2a + 1) - (a^2 + 4a + 4) + (a^2 + 6a + 9)$

$$\begin{aligned}
 &= a^2 - a^2 - 2a - 1 - a^2 - 4a - 4 + a^2 + 6a + 9 \\
 &= 4.
 \end{aligned}$$

评注：由例3我们可以看到，代数法正是用简单字母来代替复杂数字，帮助我们发现题目中隐含条件，从而解题。这种方法在初中竞赛运用十分广泛。

§ 1.2 求若干有理数之和的技巧

在各类竞赛题中，求若干有理数之和这类题目经常受到命题者的偏爱，这不仅是因为这类题目技巧性强，更主要的是它体现了众多的数学思想，及其在各门学科中广泛的应用。下面介绍几种主要的方法。

求若干有理数之和的技巧与这些有理数的结构特点息息相关。这类有理数可分为三类。

第一类：每相邻两个有理数的差都相等（从第二个有理数起）。

例如： $1+2+3+4+\cdots+100$ ，又如： $83+84+85+86+87+88+\cdots+99$ 等，我们常常是将每个有理数的位置倒过来，然后相加求和。通常称为错项相加。

例4 求 $2+4+\cdots+1994+1996$ 。

分析：这些有理数每相邻两个数的差都是2。

解：设 $S = 2 + 4 + \cdots + 1994 + 1996$ ，

则： $S = 1996 + 1994 + \cdots + 4 + 2$ 。

将上面两式左右两边对应的加数分别相加，于是有：

$$\begin{aligned}
 2S &= (1996+2) + (1994+4) + \cdots + (2+1996) \\
 &= (1996+2) \times 998 \\
 &= 1998 \times 998.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore S &= 999 \times 998 = 999 \times (1000 - 2) = 999000 - 1998 \\ &= 997002. \end{aligned}$$

评注：将加法倒写过来，对应的加数之和相等，共有 998 个数相加，于是加法转化为乘法，我们又用简便算法将积算出来。下面几个常用求和公式需要同学们掌握：

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2;$$

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1).$$

这里 n 是任意自然数。

第二类：特点是后一个加数与前一个加数的比都相等（从第二个加数起）。

例如：

$$2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{1996}.$$

显然 $2^2 \div 2 = 2^3 \div 2^2 = \cdots = 2^{1996} \div 2^{1995} = 2$.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{1996}}.$$

显然 $\frac{1}{2} \div 1 = \frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = \cdots = \frac{1}{2^{1996}} \div \frac{1}{2^{1995}} = \frac{1}{2}$.

这类问题，我们通常是将每个有理数都乘以这个比，然后再将前后两和做差求得。通常称为错项相减。

例 5 求 $3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{1997}$.

显然后一个加数都是前一个加数的 3 倍。

解：设 $S = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{1997}$ ①

两边都乘 3，

$$3S = 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{1997} + 3^{1998}. \quad \text{..... ②}$$

用②式减去①式得：

$$2S = 3^{1998} - 3,$$

$$\therefore S = \frac{3^{1998} - 3}{2}.$$

评注：①、②式只有两项不同，这样做差后，将计算量减小了，从而较快得出结论。

例6 求 $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \dots - \frac{1}{2^{99}} - \frac{1}{2^{100}}.$

仿例5解此题。

解：设 $S = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \dots - \frac{1}{2^{99}} - \frac{1}{2^{100}}. \dots \textcircled{1}$

两边都乘以2，

$$2S = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \dots - \frac{1}{2^{99}}. \dots \textcircled{2}$$

用②式减去①式得：

$$S = -1 + \frac{1}{2^{100}}.$$

$$\therefore S = \frac{1}{2^{100}} - 1.$$

评注：1. 这种错项相减的方法在初中竞赛中运用也比较广泛，需要注意的是有些题目并不明显，要善于观察。

2. 两边都乘以 $\frac{1}{2}$ ，也可以求出 S ，同学们不妨一试。

第三类：用于这样一些有理数，它们之间没有以上两种关系，但却围绕着某个值波动。

例7 计算 $73 + 68 + 69 + 71 + 74 + 72 + 66 + 78 + 62 + 80.$

观察可知这10个数都是70左右的数字，我们如果按顺序加法运算也未常不可，但如果我们把这些数与70作差，求差的代数和就会大大减少计算量。下面我们具体求解这道题：

解：我们将上面10个数与70作差，得到下面10个数：

+3, -2, -1, +1, +4, +2, -4, +8, -8,
+10,

它们的代数和是:

$$+3-2-1+1+4+2-4+8-8+10=13.$$

于是

$$\begin{aligned} &73+68+69+71+74+72+66+78+62+80 \\ &=70 \times 10 + 13 \\ &=713. \end{aligned}$$

第四类:裂项求和.

我们知道:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

如果我们把乘积写成另一种形式,会是怎样:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}.$$

类似的我们有:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1}.$$

例8 求 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$.

有了我们上面的分析,很自然我们把结论再变一下:

$$\frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

这便是我们解此题的思路.