微积分

殷建连　主编

科学出版社

微 积 分

殷建连 主 编

程希旺
徐淮涓 副主编
夏海峰

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书根据普通高等院校理工科数学课程的教学要求和当前高等院校高等数学教育教学改革的形势，由长期从事高等数学教学的一线教师执笔编写。全书包括微积分学、向量代数与空间解析几何、无穷级数、常微分方程等内容。另外，选择具有代表性的例题，并作了详尽、透彻的剖析和演绎。希望能启发学生掌握解题方法，改善思维方式，培养分析问题和解决问题的能力。同时，我们在书后配备适量的习题，教师可选择其中一部分习题布置给学生作为作业来完成，对于有一定难度和技巧的习题，建议教师有选择地进行讲解。另外，书后的答案仅作参考。

本书可作为普通高等院校理工科非数学专业微积分的教学用书，也可供任课教师和相关专业人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

微积分/殷建连主编．—北京：科学出版社，2015
ISBN 978-7-03-044190-4

Ⅰ.①微… Ⅱ.①殷… Ⅲ.①微积分 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 089159 号

责任编辑：相 凌 李淑丽 / 责任校对：郭瑞芝
责任印制：赵 博 / 封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
文林印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015 年 8 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2015 年 8 月第一次印刷 印张：22 1/2
字数：576 000

定价：47.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

本书根据普通高等院校理工科数学课程教学要求和当前高等院校高等数学教育教学改革的形势，由长期从事高等数学教学的一线教师执笔编写。本书编写时，在保持传统高等数学教材的结构严谨、逻辑性强等风格的基础上，积极吸收近年来同类教材改革的成功经验，结合作者在教学实践中的切身体会，加强章节内容间的联系和融合，对传统高等数学教材的内容进行适当地调整，并力求做到描述准确、结构合理、例证恰当、通俗易懂、有利教学。

本书共 8 章内容，包括函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学，向量代数和空间解析几何，无穷级数，多元函数微分学，多元函数积分学以及常微分方程。每章均配备了适量的例题和一定数量的习题。

本书可作为普通高等院校理工科非数学专业微积分的教学用书，也可供任课教师和相关专业人员参考。

本书的分工如下：第 1，2 章由程希旺执笔；第 3，4 章由殷建连执笔；第 5，6 章由徐淮涓执笔；第 7，8 章由夏海峰执笔。全书最后由殷建连统稿。

由于编者水平有限，书中的不足之处在所难免，恳请各位专家、同行和广大读者批评指正。

编　者

2015 年 1 月

目　　录

第 1 章　函数、极限与连续

函数是微积分的主要研究对象，而极限思想则是微积分的主要思想，微积分的许多概念和理论都建立在极限理论基础之上. 连续性是函数的一个重要性态，连续函数是微积分中首先要研究的一类重要函数. 本章将讨论函数、极限与连续等基本概念及它们的一些基本性质.

1.1　函　　数

1.1.1　区间和邻域

首先定义两类常用的实数集——区间和邻域.

设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$. 数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为**开区间**，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\},$$

a 和 b 称为开区间 (a,b) 的**端点**. 数集 $\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**，记作 $[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\},$$

a 和 b 称为闭区间 $[a,b]$ 的**端点**.

类似地，可定义

$$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\},$$
$$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}.$$

$[a,b)$ 和 $(a,b]$ 都称为**半开半闭区间**.

以上这几类区间都称为**有限区间**. $b-a$ 称为这些区间的**长度**.

满足关系式 $x\geqslant a$ 的全体实数 x 的集合记作 $[a,+\infty)$，即

$$[a,+\infty)=\{x \mid x\geqslant a\},$$

这里符号 ∞ 读作“无穷大”，$+\infty$ 读作“正无穷大”. 类似地，记

$$(-\infty,a]=\{x \mid x\leqslant a\},$$
$$(a,+\infty)=\{x \mid x>a\},$$
$$(-\infty,a)=\{x \mid x<a\},$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R},$$

其中，$-\infty$ 读作“负无穷大”. 以上这几类数集都称为**无限区间**. 有限区间和无限区间统称为**区间**.

设 $a\in\mathbf{R}$，$\delta>0$. 开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为**点 a 的 δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$，或者简单地写作 $U(a)$，即有

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

点 a 称为邻域的**中心**，δ 称为邻域的**半径**.

由于不等式 $a-\delta<x<a+\delta$ 等价于 $|x-a|<\delta$，所以

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

于是在数轴上 $U(a,\delta)$ 表示与点 a 的距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后的所有点组成的集合，称为**点 a 的去(空)心 δ 邻域**，记作

$\mathring{U}(a,\delta)$，或简单地写作 $\mathring{U}(a)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

此外，还常把区间 $[a,a+\delta)$ 称为**点 a 的右 δ 邻域**，记作 $U_+(a,\delta)$，或简单地写作 $U_+(a)$；区间 $(a-\delta,a]$ 称为**点 a 的左 δ 邻域**，记作 $U_-(a,\delta)$，或简单地写作 $U_-(a)$，即

$$U_+(a,\delta)=[a,a+\delta),$$
$$U_-(a,\delta)=(a-\delta,a].$$

$U_+(a,\delta)$ 与 $U_-(a,\delta)$ 去除点 a 后，分别称为**点 a 的去(空)心左、右 δ 邻域**，简记为 $\mathring{U}_+(a)$ 与 $\mathring{U}_-(a)$，即

$$\mathring{U}_+(a,\delta)=(a,a+\delta),$$
$$\mathring{U}_-(a,\delta)=(a-\delta,a).$$

1.1.2 函数的概念

在对某个自然过程或社会过程进行定量描述和研究时，总要涉及两类基本的量：常量和变量. 在所考察的过程或问题中，有些量的大小不发生变化，这种量称为**常量**. 还有些量的大小是变化的，这种量称为**变量**.

例 1.1.1 在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，下落的距离为 s，开始下落的时刻 $t=0$，落地的时刻 $t=T$，则 s 与 t 有下列关系

$$s=\frac{1}{2}gt^2,\quad t\in[0,T],$$

其中，g 是重力加速度.

显然，在这个下落过程中，$\frac{1}{2}$ 和 g 是常量，时间 t 和距离 s 是变量，而且 s 随 t 的变化而变化，对于任意的 $t\in[0,T]$，总有唯一确定的 s 与之对应. 变量 s 与变量 t 的这种依存关系在数学上称为函数关系. 下面给出函数的确切定义.

定义 1.1.1 设 D 是一个非空数集，若有对应法则 f，使得对于 D 中的每一个数 x，都有唯一的一个实数 $y\in\mathbf{R}$ 与之对应，则称 f 是定义在数集 D 上的**函数**，记作

$$\begin{aligned} f:D&\to\mathbf{R},\\ x&\mapsto y. \end{aligned}\tag{1.1.1}$$

其中，数集 D 称为函数 f 的**定义域**，x 所对应的数 y 称为 f 在点 x 的**函数值**，记为 $f(x)$. 全体函数值的集合称为函数 f 的**值域**，记作 $f(D)$ 或 R_f，即

$$f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}.$$

(1.1.1)式中"$D\to\mathbf{R}$"表示按法则 f 建立数集 D 到 $\mathbf{R}$ 的函数关系；"$x\mapsto y$"表示这两个数集中元素之间的对应关系，也可记为"$x\mapsto f(x)$". 习惯上，称此函数关系中的 x 为**自变量**，y 为**因变量**.

由函数的定义可知，定义域 D 与对应法则 f 是确定函数的两个主要要素. 如果两个函数定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的. 因此，为了简便，也常用"$y=f(x),x\in D$"或"$f(x),x\in D$"来表示上述函数.

表示函数的记号是可以任意选取的，除了常用 f 外，还可用其他的英文字母或希腊字母，如"g""F""G""φ" 等. 相应地，函数可记作 $y=g(x)$，$y=F(x)$，$y=G(x)$，$y=\varphi(x)$等. 有时还直接用因变量的记号来表示函数，即把函数表示为 $y=y(x)$等.

函数的定义域通常按以下两种情形来确定. 一种是有实际背景的函数，根据实际背景中变量的实际意义确定. 例如，例 1.1.1 中 s 与 t 之间的函数关系是

$$s=\frac{1}{2}gt^2,\quad t\in[0,T],$$

这个函数的定义域就是区间$[0,T]$. 另一种是抽象地用算式表达的函数，通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合，这种定义域称为函数的**自然定义域(或存在域)**. 在这种情况下，一般用算式表达的函数可用"$y=f(x)$"表达，而不必再表示出定义域 D. 例如，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间$[-1,1]$，函数 $y=\ln(x-1)$ 的定义域是区间$(1,+\infty)$.

表示函数的方法通常有以下三种：解析法(又称公式法)；图像法；表格法.

解析法是用数学式子表示函数的方法. 例如，$y=\ln(3x-1)+\sin x$，$y=\sqrt{x^2-1}$等. 解析法的优点是便于数学上的分析和计算，在数学上应用最为广泛. 图像法就是用坐标平面上的函数图形来表示函数的方法，所谓函数图形就是指坐标平面上的点集$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$. 图像法的优点是直观性强，能清楚地反映出函数的性质. 表格法就是用表格表示函数的方法. 例如，通常使用的三角函数表、对数表等都是这样的例子. 表格法的优点是可以免去许多复杂的计算而直接查表得到函数值.

下面举几个函数的例子.

例 1.1.2　常数函数

$$y=C.$$

这个函数的定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $f(D)=\{C\}$，它的图形是一条平行于 x 轴的直线，如图 1-1 所示.

例 1.1.3　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

这个函数的定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $f(D)=[0,+\infty)$，它的图形如图 1-2 所示.

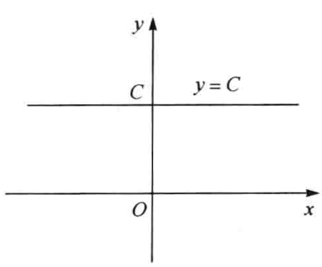

图 1-1

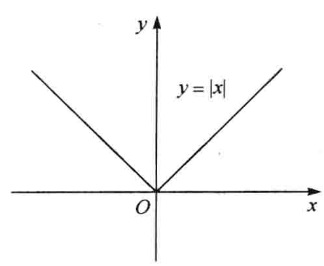

图 1-2

例 1.1.4　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

这个函数的定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $f(D)=\{-1,0,1\}$，它的图形如图 1-3 所示. 对于任何实数 x，有下列关系成立：

$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|.$$

在例 1.1.3 和例 1.1.4 中发现,有时一个函数要用几个式子表示.这种在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同式子来表示的函数,通常称为分段函数.

值得注意的是,分段函数是用几个式子来表示一个函数,而不是几个函数,这与函数的定义并不矛盾.

例 1.1.5 取整函数

$$y=[x],$$

其中,$[x]$表示不超过 x 的最大整数(有时称为 x 的整数部分).例如,$[\pi]=3$,$\left[\frac{2}{3}\right]=0$,$[6]=6$,$[-3.7]=-4$,$[-0.8]=-1$,$[-3]=-3$.取整函数的定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $f(D)=\mathbf{Z}$.它的图形如图 1-4 所示,称为阶梯曲线.在 x 为整数值处,图形发生跳跃,跃度为 1.

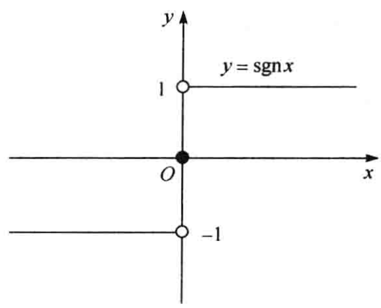

图 1-3

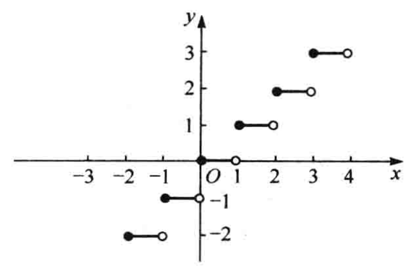

图 1-4

事实上,取整函数还可以表示为

$$y=\begin{cases} \cdots, & \cdots, \\ 2, & 2\leqslant x<3, \\ 1, & 1\leqslant x<2, \\ 0, & 0\leqslant x<1, \\ -1, & -1\leqslant x<0, \\ -2, & -2\leqslant x<-1, \\ \cdots, & \cdots. \end{cases}$$

可见,取整函数也是一个分段函数.

例 1.1.6 狄利克雷(Dirichlet)函数

$$y=D(x)=\begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时}, \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}. \end{cases}$$

它是一个分段函数,其定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $f(D)=\{0,1\}$.无法画出狄利克雷函数的图形.

1.1.3 函数的几种特性

1. 函数的有界性

定义 1.1.2 设函数 f 在数集 D 上有定义.若存在数 $K_1(K_2)$,使得对每一个 $x\in D$,有

$$f(x)\leqslant K_1 \quad (f(x)\geqslant K_2),$$

则称函数 f 在 D 上**有上界(下界)**,而 $K_1(K_2)$称为 f 在 D 上的一个**上界(下界)**.

根据定义 1.1.2,若 $K_1(K_2)$为 f 在 D 上的一个上界(下界),则任何大于(小于)$K_1(K_2)$的数都是 f 在 D 上的上界(下界).

定义 1.1.3　设函数 f 在数集 D 上有定义.若存在正数 M,使得对每一个 $x\in D$,有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 f 在 D 上**有界**.若这样的 M 不存在,就称函数 f 在 D 上**无界**.

例 1.1.7　因为对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$,有

$$-1\leqslant \sin x\leqslant 1$$

成立,故 1 是正弦函数 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上的一个上界,-1 是正弦函数 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上的一个下界.又由于

$$|\sin x|\leqslant 1$$

对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$成立,故正弦函数 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上有界.

例 1.1.8　函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在开区间$(0,1)$内有下界.例如,1 就是它的一个下界.但由于不存在正数 M,使得$|f(x)|\leqslant M$ 对一切 $x\in(0,1)$成立,也不存在数 K_1,使得 $f(x)\leqslant K_1$ 对一切 $x\in(0,1)$成立,故 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在开区间$(0,1)$内无界,而且是没有上界.

根据定义不难证明,函数 f 在 D 上有界的充分必要条件是 f 在 D 上既有上界又有下界.

由于不等式$|f(x)|\leqslant M$ 等价于$-M\leqslant f(x)\leqslant M$,所以,从几何上看,有界函数的图形介于两条平行直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间(图 1-5).

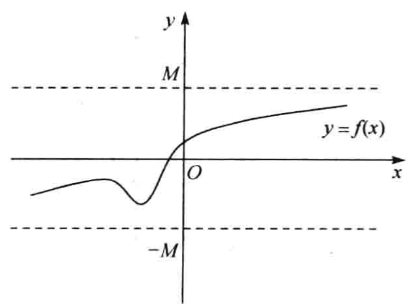

图 1-5

2. 函数的单调性

定义 1.1.4　设函数 f 在数集 D 上有定义.若对任何 $x_1,x_2\in D$,当 $x_1<x_2$ 时,总有

(1) $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称函数 f 在 D 上是**单调增加**的.特别地,当成立严格不等式 $f(x_1)<f(x_2)$时,称函数 f 在 D 上是**严格单调增加**的(图 1-6);

(2) $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,则称函数 f 在 D 上是**单调减少**的.特别地,当成立严格不等式 $f(x_1)>f(x_2)$时,称函数 f 在 D 上是**严格单调减少**的(图 1-7).

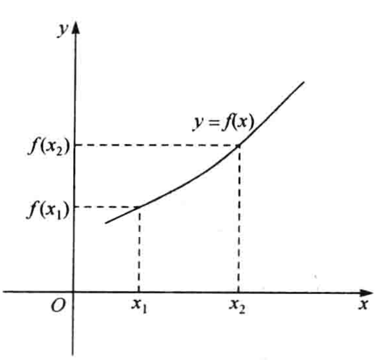

图 1-6

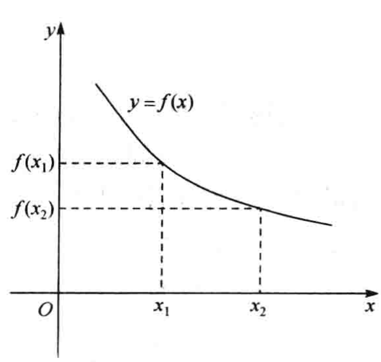

图 1-7

单调增加的和单调减少的函数统称为**单调函数**，严格单调增加和严格单调减少的函数统称为**严格单调函数**.

例如，函数 $f(x)=x^3$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是严格单调增加的. 函数 $f(x)=x^2$ 在区间$[0,+\infty)$内是严格单调增加的，在区间$(-\infty,0]$内是严格单调减少的，而在区间$(-\infty,+\infty)$内不是单调的.

3. 函数的奇偶性

定义 1.1.5 设函数 f 的定义域D 关于原点对称. 若对任一 $x\in D$，总有

$$f(-x)=-f(x)\quad (f(-x)=f(x)),$$

则称函数 f 为**奇(偶)函数**.

例如，函数 $f(x)=x^3$ 为奇函数，因为 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$. 函数 $f(x)=x^2$ 为偶函数，因为 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$. 而函数 $f(x)=\sin x+\cos x$ 既不是奇函数，也不是偶函数，因为若取 $x_0=\dfrac{\pi}{4}$，则 $f(x_0)=\sqrt{2}$，$f(-x_0)=0$，显然既不成立 $f(-x_0)=-f(x_0)$，也不成立 $f(-x_0)=f(x_0)$.

从函数图形上看，奇函数的图形关于原点对称(图 1-8)，偶函数的图形关于 y 轴对称(图 1-9).

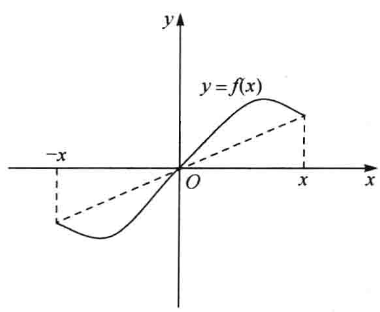

图 1-8

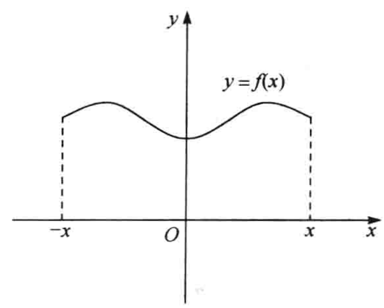

图 1-9

4. 函数的周期性

定义 1.1.6 设函数 f 的定义域为D. 若存在一个正数 T，使得对于任一 $x\in D$，总有 $x\pm T\in D$，且

$$f(x\pm T)=f(x)$$

恒成立，则称 f 为**周期函数**，称 T 为函数 f 的**周期**.

显然，若 T 为函数 f 的周期，则 nT(n 为正整数)也是 f 的周期.

若周期函数 f 的所有周期中有一个最小的周期，则称此最小的周期为 f 的**基本周期**，通常说周期函数的周期是指基本周期.

例如，函数 $\sin x$，$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $\tan x$，$\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数.

需要指出的是并非每个周期函数都有基本周期. 例如，常数函数 $f(x)=C$ 是以任何正数为周期的周期函数，但不存在基本周期.

从图形上看，周期为 T 的周期函数在每个长度为 T 的区间上图形的形状是相同的(图 1-10).

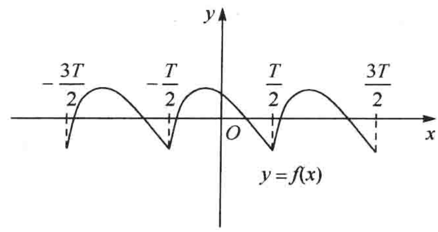

图 1-10

1.1.4　反函数与复合函数

1. 反函数

函数 $y=f(x)$的自变量 x 与因变量 y 的关系往往是相对的. 例如，棱长为 x 的正方体的体积 $V=x^3$，这里 x 是自变量，V 是因变量. 如果要从体积 V 确定正方体的棱长 x，则有

$$x=\sqrt[3]{V},$$

这里 V 是自变量，x 是因变量.

一般地，设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，值域为 $f(D)$. 如果对于值域 $f(D)$中的每一个值 y，D 中总有唯一的 x 满足 $f(x)=y$，则按此对应法则得到一个定义在 $f(D)$上的函数，称这个函数为 f 的**反函数**，记为

$$f^{-1}:f(D)\to D,$$
$$y\mapsto x$$

或简记为

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in f(D). \tag{1.1.2}$$

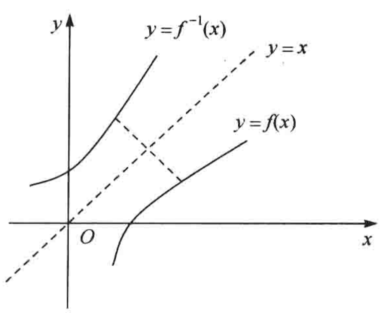

图 1-11

确定函数的两个要素是定义域与对应法则，函数的实质就是定义域到值域的对应，用什么字母来表示函数中的自变量与因变量是无关紧要的，而习惯上用 x 表示自变量，y 表示因变量，故通常将 $y=f(x)$，$x\in D$ 的反函数$x=f^{-1}(y)$，$y\in f(D)$改记为 $y=f^{-1}(x)$，$x\in f(D)$.

相对反函数 $y=f^{-1}(x)$来说，原来的函数 $y=f(x)$称为**直接函数**. 在同一直角坐标系中，直接函数 $y=f(x)$与其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称(图 1-11).

由反函数的定义容易看出，当且仅当函数 $y=f(x)$是定义域到值域的一一对应时，函数 $y=f(x)$才具有反函数. 而严格单调函数一定是定义域到值域的一一对应，故严格单调函数一定具有反函数. 而且可以证明反函数与直接函数具有相同的单调性. 于是有下面定理.

定理 1.1.1　设函数 $y=f(x)$为定义在 D 上的严格单调增加(减少)函数，则必存在反函数 $x=f^{-1}(y)$，且 $x=f^{-1}(y)$在其定义域 $f(D)$上也是严格单调增加(减少)函数.

2. 复合函数

设函数 $y=f(u)$的定义域为 E，函数 $u=g(x)$的定义域为 D，且其值域 $g(D)\subset E$. 对于每一个 $x\in D$，可通过函数 g 对应 E 内唯一的一个值 u，而 u 又通过函数 f 对应唯一的一个值 y，这就确定了一个定义在 D 上的函数

$$y=f[g(x)],\quad x\in D,$$

称为由函数 $u=g(x)$和函数 $y=f(u)$构成的**复合函数**，并称 f 为**外函数**，g 为**内函数**.

复合函数 $y=f[g(x)]$的定义域是 D，它以 x 为自变量，y 为因变量，而 u 则称为**中间变量**.

函数 g 与函数 f 按"先 g 后 f"次序构成的复合函数通常记为 $f\circ g$，即

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)].$$

由复合函数的定义可知，函数 g 与函数 f 能构成复合函数的条件是函数 g 的值域 $g(D)$ 必须包含在函数 f 的定义域 E 内，即 $g(D)\subset E$. 否则，不能构成复合函数.

例如，函数 $y=f(u)=\lg u$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，函数 $u=g(x)=1+x^2$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $g(\mathbf{R})\subset(0,+\infty)$，故函数 g 与 f 可构成复合函数

$$y=\lg(1+x^2),\quad x\in\mathbf{R};$$

又如，函数 $y=f(u)=\arcsin u$ 的定义域是 $[-1,1]$，$u=g(x)=x^2+2$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，但 $g(\mathbf{R})=[2,+\infty)\not\subset[-1,1]$，故函数 g 与 f 不能构成复合函数.

再如，函数 $y=f(u)=\sqrt{u}$ 的定义域是 $[0,+\infty)$，$u=g(x)=\sin x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，显然 $g(\mathbf{R})=[-1,1]\not\subset[0,+\infty)$，故函数 g 与 f 不能构成复合函数. 但是如果将函数 g 限制在其定义域的一个子集 $D^*=\{x\mid 2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}\}$ 上，令 $g^*(x)=\sin x,x\in D^*$，那么 $g^*(D^*)=[0,1]\subset[0,+\infty)$，函数 g^* 与 f 就可以构成复合函数

$$y=f[g^*(x)]=\sqrt{\sin x},\quad x\in D^*.$$

为了简便，习惯上仍称函数 $y=\sqrt{\sin x}$ 是由函数 $u=\sin x$ 与 $y=\sqrt{u}$ 构成的复合函数. 这里 $u=\sin x$ 应理解为 $u=\sin x,x\in D^*$.

复合函数也可由多个函数相继复合而成，只要它们顺次满足构成复合函数的条件. 例如，函数 $y=\sin\sqrt{1-x^2}$ 可以看成由函数 $y=\sin u,u=\sqrt{v},v=1-x^2$ 相继复合而得，其中 u,v 是中间变量，复合函数的定义域是 $[-1,1]$，而不是 $v=1-x^2$ 的自然定义域 $\mathbf{R}$.

1.1.5 初等函数

1. 基本初等函数

在初等数学中已经介绍过下列六类函数：

(1) **常数函数** $y=C$（C 是常数）；

(2) **幂函数** $y=x^{\mu}$（μ 是实常数）；

(3) **指数函数** $y=a^x(a>0,a\neq1)$；

(4) **对数函数** $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$；

(5) **三角函数** $y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\sec x,y=\csc x$；

(6) **反三角函数** $y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\operatorname{arccot} x$.

以上六类函数统称为**基本初等函数**.

2. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所得到的并可用一个式子表示的函数，称为**初等函数**. 例如

$$y=\cos(3x-1),\quad y=\sqrt{1+\sin x},\quad y=1+\tan^2\frac{x}{2},\quad y=|x|\ (|x|=\sqrt{x^2})$$

等都是初等函数. 本书中所讨论的函数绝大多数都是初等函数.

在工程技术等应用问题中，常常遇到下列几种函数，统称为**双曲函数**. 虽然这些函数是由 e^x,e^{-x} 构成的，但由于在应用中常会出现，所以单独提出来讨论.

双曲正弦　$\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$；

双曲余弦　$\operatorname{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；

双曲正切　$\operatorname{th}x=\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$；

双曲余切　$\operatorname{cth}x=\dfrac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

除了 $\operatorname{cth}x$ 在 $x=0$ 处无意义外，它们对于一切实数 x 都有意义. 根据定义容易验证这些函数有与三角函数非常相似的公式. 例如，

$$\begin{aligned}&\operatorname{sh}(x\pm y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y\pm\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y,\\&\operatorname{ch}(x\pm y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y\pm\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y,\\&\operatorname{sh}2x=2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x,\\&\operatorname{ch}2x=\operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x,\\&\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1.\end{aligned}$$

1.2　极　　限

1.2.1　数列极限

1. 数列极限概念

首先给出数列的相关概念.

按一定次序排列的一列数

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$$

称为**数列**，简记为 $\{x_n\}$. 数列中的每一个数称为数列的**项**，第 n 项 x_n 称为数列的**一般项**或**通项**. 例如，

$$\begin{aligned}&\{2^n\}:2,4,8,\cdots,2^n,\cdots;\\&\left\{\frac{1}{2^n}\right\}:\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots;\\&\{(-1)^{n+1}\}:1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots;\\&\left\{\frac{n+1}{n}\right\}:2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+1}{n},\cdots\end{aligned}$$

都是数列的例子.

数列 $\{x_n\}$ 可视为自变量为正整数 n 的函数

$$x_n=f(n),\quad n\in\mathbf{N}^+$$

当自变量 n 依次取 $1,2,3,\cdots$ 时的一列函数值.

对于数列 $\{x_n\}$，如果存在正数 M，使得对于一切正整数 n，有

$$|x_n|\leqslant M,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 是**有界**的. 如果这样的正数 M 不存在，就说数列 $\{x_n\}$ 是**无界**的.

例如，数列 $\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$ 是有界的，因为可取 $M=2$，对于一切正整数 n，不等式

$$\left|\frac{n+1}{n}\right| \leqslant M$$

恒成立. 而数列$\{2^n\}$是无界的,因为当 n 无限增加时,2^n 可超过任何正数,即不存在正数 M,使得对于一切正整数 n,不等式$|2^n| \leqslant M$ 恒成立.

对于一个给定的数列$\{x_n\}$,重要的是去研究当 n 无限增大时(记作 $n \to \infty$),它的通项 $x_n = f(n)$的变化趋势,即 $x_n = f(n)$是否能够无限趋近于某个确定的数值? 如果能够的话,这个数值等于多少?

例如,数列

$$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}: 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+1}{n}, \cdots$$

的通项为

$$x_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}.$$

显然,随着 n 的无限增大,x_n 无限地趋近于 1,即$|x_n - 1| = \frac{1}{n}$可以小于任意给定的正数. 例如,给定$\frac{1}{100}$,只要 $n > 100$,即从第 101 项起,不等式$|x_n - 1| < \frac{1}{100}$都成立;同样地,如果给定$\frac{1}{1000}$,只要 $n > 1000$,即从第 1001 项起,不等式$|x_n - 1| < \frac{1}{1000}$都成立. 一般地,任意给定正数 ε,无论它多么小,总存在一个正整数 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$,使得当 $n > N$ 时,不等式

$$|x_n - 1| < \varepsilon$$

都成立. 这就是 x_n 当 $n \to \infty$时无限地趋近于 1 的实质. 一般地,有如下定义.

定义 1.2.1 设$\{x_n\}$为一数列,a 为常数. 如果对于任意给定的正数 ε(无论它多么小),总存在正整数 N,使得当 $n > N$ 时,不等式

$$|x_n - 1| < \varepsilon$$

都成立,那么就称**数列**$\{x_n\}$**收敛于** a,常数 a 称为数列$\{x_n\}$的**极限**,记为

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$

或

$$x_n \to a \quad (n \to \infty).$$

如果不不存在这样的数 a,就说数列$\{x_n\}$没有极限,或称数列$\{x_n\}$是**发散**的.

定义 1.2.1 称为数列极限的 ε-N 定义. 下面举例说明如何根据 ε-N 定义来验证数列极限.

例 1.2.1 证明$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

证 由于

$$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| = \frac{1}{n^2},$$

故对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,只要$\frac{1}{n^2} < \varepsilon$,即 $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$,不等式$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$ 必定成立. 所以可取 $N = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$,则当 $n > N$ 时,就有

$$\left|\frac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0.$$

一般地，用同样的方法可以证明，对于任意正数 α，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0.$$

例 1.2.2　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}C=C$.

证　数列通项为 $x_n=C$. 由于对于任意给定的 $\varepsilon>0$，可取 $N=1$，则当 $n>N$ 时，都有

$$|x_n-C|=|C-C|=0<\varepsilon$$

成立，故

$$\lim_{n\to\infty}C=C.$$

例 1.2.3　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0(|q|<1)$.

证　当 $q=0$ 时，由例 1.2.2 立得.

当 $0<|q|<1$ 时，由于

$$|q^n-0|=|q|^n,$$

故对于任意给定的 $\varepsilon>0$（不妨设 $\varepsilon<1$），要使 $|q^n-0|<\varepsilon$，只要 $|q|^n<\varepsilon$，取自然对数，得

$$n\ln|q|<\ln\varepsilon.$$

因 $0<|q|<1$，从而 $\ln|q|<0$，故上式等价于 $n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$. 取 $N=\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$，则当 $n>N$ 时，就有

$$|q^n-0|<\varepsilon.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0.$$

例 1.2.4　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{3n+1}=\dfrac{2}{3}$.

证　由于

$$\left|\frac{2n-1}{3n+1}-\frac{2}{3}\right|=\frac{5}{3(3n+1)}<\frac{2}{3n+1}<\frac{2}{n},$$

故对于任意给定的 $\varepsilon>0$，只要 $\dfrac{2}{n}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{2}{\varepsilon}$，不等式 $\left|\dfrac{2n-1}{3n+1}-\dfrac{2}{3}\right|<\varepsilon$ 必定成立. 所以可取 $N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，就有

$$\left|\frac{2n-1}{3n+1}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+1}=\frac{2}{3}.$$

在利用数列极限的 ε-N 定义来证明某数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限时，关键是对于任意给定的正数 ε，论证定义中所说的正整数 N 确实存在，但没有必要去找出最小的 N. 若知道 $|x_n-a|$ 小