普通高等教育“十二五”规划教材
公共基础课精品系列

经济数学基础学习辅导之一

总主编 朱弘毅

微积分学习辅导

（第二版）

上海高校《经济数学基础学习辅导》编写组 编

立信会计出版社
LIXIN ACCOUNTING PUBLISHING HOUSE

普通高等教育"十二五"规划教材
公共基础课精品系列

经济数学基础学习辅导之一

总主编 朱弘毅

微积分学习辅导

（第二版）

上海高校《经济数学基础学习辅导》编写组 编

立信会计出版社
LIXIN ACCOUNTING PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习辅导 / 上海高校《经济数学基础学习辅导》编写组编. —2 版. —上海：立信会计出版社，2015.2

普通高等教育"十二五"规划教材. 公共基础课精品系列. 经济数学基础学习辅导之一

ISBN 978-7-5429-4406-1

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①上… Ⅲ. ①微积分—高等职业教育—教学参考资料 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 034067 号

策划编辑　蔡莉萍
责任编辑　蔡莉萍
封面设计　周崇文

微积分学习辅导(第二版)

出版发行	立信会计出版社		
地　　址	上海市中山西路 2230 号	邮政编码	200235
电　　话	(021)64411389	传　　真	(021)64411325
网　　址	www.lixinaph.com	电子邮箱	lxaph@sh163.net
网上书店	www.shlx.net	电　　话	(021)64411071
经　　销	各地新华书店		

印　　刷	常熟市梅李印刷有限公司	
开　　本	710 毫米×960 毫米	1/16
印　　张	20.75	
字　　数	371 千字	
版　　次	2015 年 2 月第 2 版	
印　　次	2015 年 2 月第 1 次	
印　　数	1—3100	
书　　号	ISBN 978-7-5429-4406-1/O	
定　　价	33.00 元	

《经济数学基础学习辅导》编写组

总主编 朱弘毅(上海应用技术学院)

编　委 (按姓氏笔画排列)

王洁明　车荣强　付春红　庄海根

朱弘毅　朱建忠　李婷婷　张　峰

居环龙　赵斯泓　龚秀芳

第一册《微积分学习辅导》(第二版)

主　编 王洁明　朱建忠　付春红

副主编 庄海根　龚秀芳　居环龙

前　言

《经济数学基础学习辅导》丛书，是与上海高校《经济数学基础》编写组编的《经济数学基础》这套教材（立信会计出版社出版）配套的学习辅导书。丛书共三册：《微积分学习辅导》、《线性代数学习辅导》、《概率论与数理统计学习辅导》。

《经济数学基础学习辅导》丛书共分三册，编写体例一致，每册书的最后一章为模拟试题及其解答，其余各章与相应的教材同步。每章由内容提要、例题分析、习题选解、测试题及其解答四节组成。本丛书旨在帮助、指导读者理解重要的概念、掌握运算方法、解答疑难问题。因此，例题、习题、测试题都是精心选编的，题型基本而又典型。测试题及模拟试题均有解答，供读者自查。编者相信，读者认真阅读本辅导书，必有收获。

《经济数学基础学习辅导》丛书由朱弘毅任总主编，参加编写的有（按姓氏笔画排列）王洁明、车荣强、付春红、庄海根、朱弘毅、朱建忠、李婷婷、张峰、居环龙、赵斯泓、龚秀芳。本丛书的出版得到上海市教委高等教育办公室徐国良同志、立信会计出版社领导、蔡莉萍编辑的支持和帮助，在此一并表示衷心感谢。

限于编者的水平，书中不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

朱弘毅于香歌丽园

2015 年春

目　　录

第一章　函数、极限与连续

第一节　内 容 提 要

1. 区间与邻域

设 a、b 为实数，且 $a<b$。开区间 $(a, b)=\{x \mid a<x<b\}$；闭区间 $[a, b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$；半开区间 $(a, b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$，$[a, b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}$。

设 a，δ 是两个实数，且 $\delta>0$，开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 称为点 a 的 δ 邻域，记为 $\bigcup(a, \delta)$，即

$$\bigcup(a, \delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

集合 $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ 称为点 a 的去心 δ 邻域，记为 $\dot{\bigcup}(a, \delta)$，即

$$\dot{\bigcup}(a, \delta)=\{x \mid a-\delta<x<a \text{ 或 } a<x<a+\delta\}=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

2. 函数的概念

设 D 是一个给定的实数集，如果对于 D 中的每一个数 x，按照某种对应法则 f，存在唯一的数 y 与之对应，则称对应法则 f 是定义在数集 D 上的函数，记为 $y=f(x)$。D 被称为函数 f 的定义域。

【注 1】 函数的两个基本要素是：定义域 D；对应法则 f。

【注 2】 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域相同（均为 D），且对应法则也相同，即对任意 $x \in D$，都有 $f(x)=g(x)$，此时才能称函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等，记为 $f(x)=g(x)$。

函数的几种简单性质是：函数的奇偶性、单调性、周期性、有界性。

3. 复合函数、初等函数与分段函数

设函数 $y=f(u)$ 是 u 的函数，而 $u=\varphi(x)$ 是 x 的函数。如果 $u=\varphi(x)$ 的值域与函数 $y=f(u)$ 的定义域的交集为非空集合，y 通过 u 的联系，也是 x 的函数，这个

函数称为由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$，u 称为中间变量。

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数称为基本初等函数。

由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合运算所构成，并能用一个解析式表示的函数称为初等函数。

对于其定义域内自变量 x 不同的值，不能用一个统一的初等函数表达式表示，而要用两个或两个以上的式子表示，这类函数称为分段函数。分段函数不是初等函数。分段函数表示的是一个函数，不能认为是几个函数。

4. 建立函数关系式

建立函数关系式是把实际问题转化为数学问题的首要步骤，然后利用数学工具解决这个实际问题。建立函数关系式的一般步骤是：

(1) 根据实际问题，分清哪些是常量，哪些是变量，并根据问题的条件和要求，找出各变量之间的内在联系，然后利用有关的知识和公式，用数学式子把这些关系表达出来，化简后即得到函数关系式。

(2) 根据问题的条件，确定自变量的变化范围，给出函数定义域。

5. 极限的概念

(1) 数列 $\{f(n)\}$ 的极限。如果存在一个确定的常数 A，当 $n\to\infty$ 时，对应的值 $f(n)$ 无限接近于这个确定的常数 A，则称常数 A 为数列 $\{f(n)\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限。记为

$$\lim_{n\to\infty} f(n)=A \quad 或 \quad f(n)\to A(当\ n\to\infty)$$

极限的定量描述定义：

设数列 $\{f(n)\}$，如果存在一个确定的常数 A，对于任意给定的正数 ε，总存在一个正整数 N，当 $n>N$ 时对应的 $f(n)$ 恒有 $|f_{(n)}-A|<\varepsilon$ 成立，则称常数 A 为数列 $\{f(n)\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限。

(2) $x\to\infty$ 时函数的极限。设函数 $f(x)$ 在 $|x|>a\ (a>0)$ 有定义，如果存在一个确定的常数 A，当 $x\to\infty$ 时对应的函数值 $f(x)$ 无限接近这个确定的常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (当\ x\to\infty)$$

极限的定量描述定义：

设函数 $f(x)$在$|x|$大于某一正数时有定义。如果存在一个确定的常数 A,对于任意给定的正数 ε,总存在一个正数 M,使得当 $|x|>M$ 时一切 x 所对应的函数值 $f(x)$恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立,则称常数 A 为函数 $f(x)$当 $x\to\infty$ 时的极限。

(3) $x\to x_0$ 时函数的极限。设 $f(x)$在 x_0 的某一去心邻域内有定义。如果存在一个确定的常数 A,对于当 $x\to x_0$ 时对应的函数值 $f(x)$无限接近于这个确定常数 A,则称常数 A 为当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$的极限。记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (当\ x\to x_0)$$

极限的定量描述定义

设函数 $f(x)$在 x_0 的某一去心邻域内有定义。如果存在一个确定的常数 A,对于任意给定的正数 ε,总存在一个整数 δ,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时一切 x 所对应的函数值 $f(x)$恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立,则称常数 A 为当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$的极限。

类似地,定义当 $x\to x_0^-$ 或 $x\to x_0^+$ 或 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 或 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限。

这里要掌握两个结论:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$。

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$。

在计算分段函数在分界点处的极限时要应用第(1)个结论。

6. 极限的性质、极限存在准则

极限有如下性质:

(1) 保号性。如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,且 $A>0$(或 $A<0$),则存在一个正数 δ,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时对应的函数值 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$)。

(2) 有界性。如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,则存在正常数 M, δ,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时一切 x 所对应的函数值 $f(x)$有 $|f(x)|<M$。

(3) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,且 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$),则 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$)。

极限存在准则:

(1) 夹逼准则。如果 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$在 x_0 的某一去心邻域内满足

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x),\quad \lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)=A$$

则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

(2) 单调有界准则。如果数列$\{f(n)\}$单调有界，则极限 $\lim\limits_{n \to \infty} f(n)$ 存在。

7. 无穷小量与无穷大量

如果 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = 0$，则称函数 $f(x)$当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时为无穷小量。如果当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时，对于任意给定的正数 E，总有那么一个正数 δ(或正数 M)，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$(或 $|x| > M$) 时一切 x 所对应的函数值 $f(x)$恒有 $|f(x)| > E$，则称函数 $f(x)$当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时为无穷大量，记为 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = \infty$。

无穷小量与无穷大量的关系是:

如果 $f(x)$为无穷大量，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小量。

如果 $f(x)$为无穷小量，$f(x) \neq 0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大量。

8. 无穷小量的性质

(1) 有限个无穷小量的代数和是无穷小量。

(2) 有界函数与无穷小量的乘积是无穷小量。

(3) 有限个无穷小量的乘积是无穷小量。

(4) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 当 $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ 时为无穷小量。

9. 无穷小量的比较

设 $\lim \alpha = 0$，$\lim \beta = 0$，且$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = c$ (c 为常数)。

当 $c = 0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小量，记为 $\beta = 0(\alpha)$。

当 $c \neq 0$，$c \neq 1$ 时，称 β 与 α 是同阶无穷小量。

当 $c = 1$ 时，则 β 与 α 是等价无穷小量，记为 $\alpha \sim \beta$。

10. 极限的计算方法

(1) 应用函数 $f(x)$在点 x_0 处的连续性。对于初等函数 $f(x)$来说，如果 x_0 属于函数 $f(x)$的定义区间，则

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

(2) 应用极限的四则运算法则。如果 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B=\lim f(x)\pm\lim g(x)$$
$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B=[\lim f(x)]\cdot[\lim g(x)]$$
$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}\quad(B\neq 0)$$

【特例】 $\lim[f(x)]^n=A^n=[\lim f(x)]^n$。

$\lim[f(x)]^{\frac{1}{n}}=[\lim f(x)]^{\frac{1}{n}}$。

$\lim\limits_{x\to x_0}P_n(x)=P_n(x_0)$，$P_n(x)$ 为 x 的 n 次多项式。

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\dfrac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)}$，$Q_m(x)$ 为 x 的 m 次多项式，$Q_m(x_0)\neq 0$。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\begin{cases}\dfrac{a}{b} & n=m\\ 0 & n<m\\ \infty & n>m\end{cases}$$

其中，$P_n(x)$、$Q_m(x)$的最高次项的系数分别为 a、b。

(3) 应用两个重要极限。

$$\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$$
$$\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=\mathrm{e}\quad 或\quad \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=\mathrm{e}$$

其中，$u=\varphi(x)$。

【特例】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$。

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$。

(4) 对 $\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的分子、分母，进行因式分解消去零因式(极限为零的因式)，或对分子、分母进行有理化法。

(5) 应用“有界函数与无穷小量乘积为无穷小量”这个结论。

(6) 等价无穷小量代换。

若 $\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，且 $\lim \frac{\alpha'}{\beta'}$ 存在，则 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}$。

常用等价无穷小量有：

当 $x \to 0$ 时，$\sin x \sim x$，$\tan x \sim x$，$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$，$\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{x}{n}$，$e^x - 1 \sim x$，$\ln(1+x) \sim x$，$\arcsin x \sim x$，$\arctan x \sim x$。

11. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的定义

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的某个领域内有定义，当自变量的改变量 Δx 趋近于零时，相应的函数改变量 Δy 也趋近于零，即

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)] = 0$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续。并称点 x_0 是函数 $f(x)$ 的连续点。如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称点 x_0 是函数 $y=f(x)$ 的间断点。

函数连续的另一种定义：如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，且在点 x_0 处的极限值等于其函数值，即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续。

如果 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处左连续；如果 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处右连续。

函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续的充分必要条件是：函数 $f(x)$ 在该点处是左、右连续。

根据函数连续的定义可知，函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，必须同时满足以下三个条件：

(1) 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内(包括点 x_0)有定义。

(2) 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处有极限存在，即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$。

(3) 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的极限值等于函数值，即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$。

如果函数 $f(x)$ 上述三个条件中至少有一个不被满足，则点 x_0 就是函数的间断点。

12. 间断点的类型

(1) 如果 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限存在，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，但是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处没有定义，或函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义，而 $f(x_0) \neq A$，则称点 x_0 为函数

$f(x)$ 的可去间断点。

对于可去间断点，可以补充函数 $f(x)$ 在点 x_0 处定义或修改定义。令 $f(x_0) = A$，于是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续。

(2) 如果 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的左、右极限存在，但不相等，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点。

可去间断点和跳跃间断点统称为第一类间断点。

(3) 如果 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的左、右极限中至少有一个不存在，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点。

13. 闭区间上连续函数的性质

(1) 如果函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有界。

(2) 如果函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上必有最大值与最小值存在。

(3) 设函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，如果 M、m 分别是 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最大值和最小值，则对于任意 $c \in [m, M]$，存在 $x_0 \in [a, b]$，使 $f(x_0) = c$。

(4) 如果函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a) \cdot f(b) < 0$，则在开区间 (a, b) 内至少存在一点 x_0，使 $f(x_0) = 0$ 成立，或方程 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内至少存在一个实根 x_0。

第二节　例 题 分 析

【例 1】 确定下列函数的定义域。

(1) $y = \dfrac{4}{1 - x^2}$　　(2) $y = \sqrt{3x + 2}$

(3) $y = \lg(1 - 5x)$　　(4) $y = \arcsin \dfrac{x - 1}{3}$

(5) $y = 5\sqrt{3x + 2} - 2\arcsin \dfrac{x - 1}{3}$

分析　对于用解析式来表示的函数，其定义域就是指使这个式子有意义的所有实数的集合。对于实际问题，函数定义域还要考虑实际问题的意义。

解 (1) 由于分母不能为零,其定义域为 $1-x^2\neq 0$,即 $x\neq\pm 1$,所以 $y=\dfrac{4}{1-x^2}$ 的定义域为 $(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$。

(2) 由于被开方数不能为负数,其定义域为 $3x+2\geqslant 0$,即 $x\geqslant -\dfrac{2}{3}$,所以 $y=\sqrt{3x+2}$ 的定义域为 $\left[-\dfrac{2}{3},\ +\infty\right)$。

(3) 由于对数函数的真数必须大于零,其定义域为 $1-5x>0$,即 $x<\dfrac{1}{5}$,所以 $y=\lg(1-5x)$ 的定义域为 $\left(-\infty,\ \dfrac{1}{5}\right)$。

(4) 由反正弦函数的定义域知,$-1\leqslant\dfrac{x-1}{3}\leqslant 1$,即 $-2\leqslant x\leqslant 4$,所以 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{3}$ 的定义域为 $[-2,\ 4]$。

(5) $y=5\sqrt{3x+2}-2\arcsin\dfrac{x-1}{3}$ 的定义域为上述第(2)、第(4)题定义域的交集:$\begin{cases}3x+2\geqslant 0\\ -1\leqslant\dfrac{x-1}{3}\leqslant 1\end{cases}$,即 $\left[-\dfrac{2}{3},\ 4\right]$。

【例 2】 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,\ 1]$,试问:(1) $f(x^2)$,(2) $f(\sin x)$ 的定义域各是什么?

分析 当已知 $f(x)$ 的定义域,要求 $f[\varphi(x)]$ 的定义域时,只要将 $\varphi(x)$ 代替 $f(x)$ 表达式中的 x 的变化范围,从中解出 x 的变化范围即可。

解 已知 $f(x)$ 的定义域是 $[0,\ 1]$,即 $0\leqslant x\leqslant 1$,则

(1) 对于 $f(x^2)$,有 $0\leqslant x^2\leqslant 1$,即 $-1\leqslant x\leqslant 1$,所以 $f(x^2)$ 的定义域为 $[-1,\ 1]$。

(2) 对于 $f(\sin x)$,有 $0\leqslant\sin x\leqslant 1$,即 $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$,所以 $f(\sin x)$ 的定义域为 $[2k\pi,\ (2k+1)\pi](k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$。

【例 3】 指出下列各对函数是否相等,并说明理由。

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x},\ g(x)=1$

(2) $f(x)=\lg a^x,\ g(x)=x\lg a,\ a>0$

分析 定义域和对应法则是函数的两个要素，因此，判断两个函数是否相等，只要看它们是否具有相同的定义域和对应法则。

解 (1) 不相等。因为 $f(x)$的定义域为 $x\neq 0$，而 $g(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，所以这两个函数不相等。

(2) 相等。因为 $f(x)$与 $g(x)$的定义域与对应法则均相同，所以它们是相同的函数。

【例 4】 判断 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})(a>0,\ a\neq 1)$ 的奇偶性。

解 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ 的定义域为$(-\infty,\ +\infty)$，对于任意一个 $x\in(-\infty,\ +\infty)$，有

$$\begin{aligned}
f(-x)&=\log_a(-x+\sqrt{(-x)^2+1})\\
&=\log_a(-x+\sqrt{x^2+1})\\
&=\log_a\frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}\\
&=\log_a\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})^{-1}\\
&=-\log_a(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)
\end{aligned}$$

所以 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})(a>0,\ a\neq 1)$ 为奇函数。

用类似的方法可以证明：

(1) 两个偶函数之和(或差)是偶函数，两个奇函数之和(或差)是奇函数。

(2) 两个偶函数或两个奇函数之积或商(分母不为零)是偶函数。

(3) 一个奇函数与一个偶函数之积或商(分母不为零)是奇函数。

【例 5】 判断函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的单调性。

分析 要判断函数 $f(x)$的单调性，我们用函数单调性的定义来判断，即对任意 $x_1,\ x_2$(设 $x_1<x_2$)，确定 $f(x_2)-f(x_1)>0$ 还是 $f(x_2)-f(x_1)<0$；或确定$\frac{f(x_2)}{f(x_1)}>1$ 还是$\frac{f(x_2)}{f(x_1)}<1$，由此确定 $f(x)$在定义域上是单调的，或在定义域的某一部分是单调的。

解 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$。

任取 $x_1, x_2 \in (-\infty,+\infty)$,不妨设 $x_1<x_2$,则

$$f(x_1)-f(x_2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}=\frac{2^{x_2}-2^{x_1}}{2^{x_1}\cdot 2^{x_2}}=\frac{2^{x_2}-2^{x_1}}{2^{x_1+x_2}}$$

因为 $2^{x_1+x_2}>0$, $2^{x_2}>2^{x_1}$,即 $2^{x_2}-2^{x_1}>0$

所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$,即 $f(x_1)>f(x_2)$,故 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是单调减少的。

【例 6】 下列函数能否构成复合函数,为什么?

(1) $y=\arcsin u$, $u=1+2^x$ (2) $y=\lg u$, $u=1-x^2$

解 (1) 不能。因为 $u=1+2^x$ 的值域$(1,+\infty)$与 $y=\arcsin u$ 的定义域$[-1,1]$的交集为 Φ,所以不能构成复合函数。

(2) 能。因为 $u=1-x^2$ 的值域$(-\infty,1]$与 $y=\lg u$ 的定义域$(0,+\infty)$的交集非空,所以能构成复合函数,且该复合函数 $y=\lg(1-x^2)$ 的定义域为$(-1,1)$。

【例 7】 指出下列函数由哪些简单函数复合而成?

(1) $y=\lg\cos x^2$ (2) $y=(\arcsin x)^5$

(3) $y=3^{\sin^2 x}$ (4) $y=\sin^2(\cos 3x)$

分析 在讨论复合函数是由哪些简单函数复合而成的问题中,我们从最后一步的函数出发,一层一层往里分析,不要颠倒秩序。

解 (1) $y=\lg\cos x^2$ 是由 $y=\lg u$, $u=\cos v$, $v=x^2$ 复合而成。

(2) $y=(\arcsin x)^5$ 是由 $y=u^5$, $u=\arcsin x$ 复合而成。

(3) $y=3^{\sin^2 x}$ 是由 $y=3^u$, $u=v^2$, $v=\sin x$ 复合而成。

(4) $y=\sin^2(\cos 3x)$ 是由 $y=u^2$, $u=\sin v$, $v=\cos w$, $w=3x$ 复合而成。

【例 8】 某工厂生产某产品,年产量为 Q 台,每台售价为 100 元,当年产量超过 800 台时,超过的部分若能打 9 折出售,这样又可售出 200 台,如果再多生产,本年内就销售不出去了,试写出本年的收益函数。

解 设收益函数为 $R=R(Q)$,据题意,分三种情况讨论:

(1) 当 $0\leqslant Q\leqslant 800$ 时,有 $R(Q)=100Q$。

(2) 当 $800<Q\leqslant 1\,000$ 时,有 $R(Q)=100\times 800+100\times 0.9(Q-800)=8\,000+90Q$。