[张宇带你学系列丛书]

张宇带你学

线性代数·同济六版

张宇◎主编

http://www.yuntubook.com

刮涂层 查真伪

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

张宇带你学

线性代数·同济六版

张宇◎主编 | 朱杰　高昆轮◎副主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

张宇带你学线性代数：同济6版／张宇主编. —北京：北京理工大学出版社，2015.8

ISBN 978－7－5682－0952－6

Ⅰ. ①张… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①线性代数—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第170792号

出版发行／北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址／北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编／100081
电　　话／(010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址／http://www.bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／北京长阳汇文印刷厂
开　　本／787毫米×1092毫米　1/16
印　　张／11.75
字　　数／293千字
版　　次／2015年8月第1版　2015年8月第1次印刷
定　　价／29.80元

责任编辑／王玲玲
文案编辑／王玲玲
责任校对／孟祥敬
责任印制／边心超

前言
PREFACE

刚开始准备考研数学复习的同学通常都会面对两个重要问题，基础复习阶段看什么教材？怎么看？

先说第一个问题——看什么教材？虽然考研数学没有指定教材，全国各高校的大学教材又是五花八门，百家争鸣，但特别值得关注的一套教材是：同济大学数学系编写的《高等数学(第七版)》《线性代数(第六版)》、浙江大学编写的《概率论与数理统计(第四版)》. 这套教材是全国首批示范性教材，是众多高校教学专家集体智慧的结晶，我建议同学们把这套教材作为考研基础复习阶段的资料.

再说第二个问题——怎么看这套教材？看什么，一句话就能说清楚；怎么看，才是学问. 这里有两个关键.

第一，这套教材是按照教育部的《本科教学大纲》编写的，而考研试题是按照教育部的《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》命制的，这两个大纲不完全一样. 比如说高等数学第一章用极限的定义求函数极限可能在本科阶段就是同学们首先遇到的一个难以理解的问题，甚至很多人看到那里就已经在心里深深地埋下了一种可怕的恐惧感，但事实上，这个问题于考研是基本不作要求的；再如斜渐近线的问题在本科阶段基本不作为重点内容考查，但在考研大纲里却是命题人手里的香饽饽，类似问题还有很多；第二，针对考研，这套教材里的例题与习题有重点、非重点，也有难点、非难点；有些知识点配备的例题与习题重复了，有些知识点配备的例题与习题还不够.

这套“张宇带你学系列丛书”就是为了让同学们读好这套教材而编写的. 细致说来，本书有如下四个特点：

第一，章节同步导学. 本书在每一章开篇给同学们列出了此章每一节的教材内容与相应的考研要求，用以体现本科教学要求与考研要求的差异，同时精要地指出每一节及章末必做的例题和习题，可针对性地增强重点内容的复习.

第二，知识结构网图. 本部分列出了本章学习的知识体系，宏观上把握各知识点的内容与联系，同时简明扼要地指出了本章学习的重点与难点等.

第三，课后习题全解. 这一部分主要是为同学们做习题提供一个参照与提示，本部分给出了课后习题的全面解析，其中有的解答方法是我们众多老师在辅导过程中自己总结归纳的灵活与新颖性解法. 但我还是建议同学们先自己认真独立思考习题再去翻看解答以作对比或提示之用.

第四，经典例题选讲. 每一章最后部分都配有不同数量的经典例题，这部分例题较之书后习题不

论综合性还是灵活性都有所提高，目的也正如上面所谈让同学们慢慢接触考研类试题的特点与深度，逐步走向考研的要求，本部分例题及部分理论的说明等内容希望同学们认真体会并化为己有.

需要指出的是，考研大纲和本科教学大纲均不作要求的章节，本书也未收录.

总之，本书作为“张宇考研数学系列丛书”的基础篇，既可作为大学本科学习的一个重要参考，也是架起教材与《张宇高等数学 18 讲》《张宇线性代数 9 讲》《张宇概率论与数理统计 9 讲》及后续书籍的一座重要桥梁. 我深信，认真研读学习本书的同学在基础阶段的复习必会事半功倍.

张宇

2015 年 8 月于北京

目录
CONTENTS

第五章　相似矩阵及二次型

第六章　线性空间与线性变换(仅数学一要求)

第一章 行列式

章节同步导学

章节	教材内容	考纲要求	必做例题	必做习题
§1.1 二阶与三阶行列式	行列式的概念	了解	例 1～3	P21 习题一：1
	二、三阶行列式计算的对角线法则	会		
§1.2 全排列和对换	排列及其逆序数的概念	考研不作要求		
	对换			
§1.3 n 阶行列式的定义	n 阶行列式的定义	了解	例 5	P21 习题一：3
	对角行列式、上(下)三角形行列式	掌握【重点】(结论需要记住,以后直接使用)		
§1.4 行列式的性质	性质 1～性质 6 及各个推论	掌握	例 6～9 例 10(证明不要求,结论记住,以后直接使用)	P21 习题一：4(1)(2)(3)(5),5,6(2)(3)
	自己证明性质 3～性质 6			
	利用行列式的性质计算行列式	会		
§1.5 行列式按行(列)展开	余子式、代数余子式的概念	理解	例 12(证明不要求,结论记住,以后直接使用),13	P22 习题一：8(1)(2)(3)(5)(6)(7),9
	定理 2(行列式按行(列)展开法则)及其推论	会(证明不要求,掌握定理 2 推论的证明)		
	范德蒙德行列式的定义与结论	理解(熟记范德蒙德行列式的特点与计算公式)		

知识结构网图

- 行列式
  - 概念
    - 全排列及其逆序
    - 对换改变排列的奇偶性
    - 二阶、三阶、n 阶行列式定义
  - 性质
    - $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$
    - 两行(列)互换,行列式变号
    - 一行(列)为零,或两行(列)成比例$\Rightarrow|\boldsymbol{A}|=0$
    - 拆项
    - 提公因子 $k(k\neq0)$
    - 某行(列)的 k 倍加到另一行(列),其值不变
  - 展开式
    - 余子式 M_{ij},代数余子式 A_{ij},$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$
    - $|\boldsymbol{A}|=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{kj}A_{kj}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}$
    - $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=0(i\neq k)$;$\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ik}A_{ij}=0(k\neq j)$
  - 行列式计算——利用性质及展开定理

课后习题全解

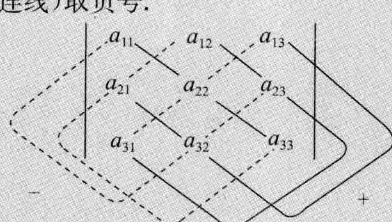
习题一 行列式

1. 利用对角线法则计算下列三阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix}2&0&1\\1&-4&-1\\-1&8&3\end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix}x&y&x+y\\y&x+y&x\\x+y&x&y\end{vmatrix}$.

【分析】计算三阶行列式的对角线法则(又称“沙路法”)是指:三阶行列式共 6 项,每项均为不同行、不同列的三个元素的乘积再冠以正负号.其规律如图所示:实线(主对角线及其平行连线)取正号;虚线(副对角线及其平行连线)取负号.



【解析】(1)原式$=2\times(-4)\times3+0\times(-1)\times(-1)+1\times1\times8-1\times(-4)\times(-1)-0\times1\times3-2\times$

$$(-1)\times 8=-24+0+8-4-0+16=-4.$$

(2)原式$=acb+bac+cba-c^3-b^3-a^3=3abc-(a^3+b^3+c^3)$.

(3)原式$=1\times b\times c^2+1\times c\times a^2+1\times a\times b^2-1\times b\times a^2-1\times a\times c^2-1\times c\times b^2$

$$\begin{aligned}&=bc^2+ca^2+ab^2-ba^2-ac^2-cb^2=bc^2-cb^2+ab^2-ac^2+a^2c-ba^2\\&=b(c^2-cb+ab)-a(c^2-ac+ab)\\&=b(c^2-cb+ab-ac)-a(c^2-ac+ab-bc)\\&=(b-a)(c^2-cb+ab-ac)=(b-a)[c(c-b)+a(b-c)]\\&=(b-a)(c-a)(c-b).\end{aligned}$$

(4)原式$=x\times(x+y)\times y+y\times x\times(x+y)+(x+y)\times y\times x-(x+y)^3-y^3-x^3$

$$\begin{aligned}&=3xy(x+y)-(x+y)^3-y^3-x^3\\&=3x^2y+3xy^2-(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)-x^3-y^3\\&=-2(x^3+y^3).\end{aligned}$$

【注】(1)对角线法则只适用于三阶行列式,其他各阶行列式均不适用.

(2)在计算三阶行列式的其他方法都无效时,对角线法则是最基本的方法,应想到它,虽然它的计算量可能较大.

2. 按自然数从小到大为标准次序,求下列各排列的逆序数:

(1)1 2 3 4; (2)4 1 3 2;

(3)3 4 2 1; (4)2 4 1 3;

(5)1 3 … $(2n-1)$ 2 4 … $(2n)$;

(6)1 3 … $(2n-1)$ $(2n)$ $(2n-2)$ … 2.

【分析】不妨设 n 个元素是 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个自然数,并规定由小到大为标准次序(顺排).设

$$p_1p_2\cdots p_n$$

为这 n 个自然数的一个排列.考虑 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$,如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的元素有 t_i 个,就说 p_i 这个元素的逆序数为 t_i(个).全体元素的逆序数的总和记成 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$,则

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n.$$

【解析】(1)排列 1234,全部是标准次序(全部顺排).故逆序数总和为

$$\tau(1234)=0.$$

(2)在排列 4132 中,

4 排在首位,前面没有其他的数,逆序数为 0;

1 的前面有一个数 4 比 1 大,故逆序数为 1;

3 的前面有一个数 4 比 3 大,故逆序数为 1;

2 的前面有两个数 3,4 比 2 大,故逆序数为 2.

故总逆序数为

$$\tau(4132)=0+1+1+2=4.$$

【注】下面用横线画出排列中逆序的两个数.则题(2)可表示成

$$4\quad 1\quad 3\quad 2$$

则横线的根数即是总逆序数,即

$$\tau(4132)=4.$$

(3)排列 3421 的逆序有

$$3\quad 4\quad 2\quad 1$$

故 $\tau(3421)=5$.

(4)排列 2413 的逆序有

$$2\quad 4\quad 1\quad 3$$

故 $\tau(2413)=3$.

(5)在排列 $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$ 中 $13\cdots(2n-1)$ 全部顺排;

2 的前面有 $3,5,\cdots,(2n-1)$ 共 $n-1$ 个数比 2 大,逆序数为 $n-1$;

4 的前面有 $5,\cdots,(2n-1)$ 共 $n-2$ 个数比 4 大,逆序数为 $n-2$;

……

$(2n-2)$ 的前面有 $(2n-1)$ 共 1 个数比 $(2n-2)$ 大,逆序数为 1;

$2n$ 最大,前面没有比 $2n$ 大的数,逆序数为 0.

故排列 $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$ 的逆序数为

$$\tau(13\cdots(2n-1)24\cdots(2n))=1+2+\cdots+n-1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

(6)在排列 $13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots2$ 中 $13\cdots(2n-1)(2n)$ 全部顺排,逆序数为 0;

$(2n-2)$ 的前面有数 $(2n-1),(2n)$ 共 2 个数比 $(2n-2)$ 大,逆序数为 2;

$(2n-4)$ 的前面有数 $(2n-3),(2n-1),(2n),(2n-2)$ 共 4 个数比 $(2n-4)$ 大,逆序数为 4;

……

2 的前面有数 $3,\cdots,(2n-1),(2n),\cdots,4$ 共 $2n-2$ 个数比 2 大,逆序数为 $2n-2$;

故排列 $13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots2$ 的逆序数为

$$\begin{aligned}\tau(13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots2)&=2+4+\cdots+(2n-2)\\&=\frac{(2n-2+2)(n-1)}{2}\\&=n(n-1).\end{aligned}$$

【注】上述计算逆序数的方法是"向前看"法,即看每个数的前面有几个数比它大,则该数的逆序数就是几.同样也可以采取"向后看"的方法,看每个数的后面有几个数比它小,则该数的逆序数就是几.

3. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

【解析】设四阶行列式为

$$\begin{vmatrix} \underline{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & \underline{a_{23}} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \boxed{a_{34}} \\ a_{41} & \boxed{a_{42}} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

由定义:该行列式全部展开共有 $4!=24$ 项,每项由不同行、不同列的四个元素相乘,且冠以符号,其中含有因子 a_{11}(在第 1 行)a_{23}(在第 2 行)的项,另两个元素应取自第 3 行、第 4 行及第 2 列、第 4 列,故为

$$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} \text{ 及 } a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}.$$

正负号：因其行下标已经是标准次序，故正负号取决于列下标的逆序数. 故四阶行列式中含有 $a_{11}a_{23}$ 的项为

$$(-1)^{\tau(1324)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}=(-1)^{1}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}=-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44};$$

$$(-1)^{\tau(1342)}a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}=(-1)^{2}a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}=a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}.$$

4. 计算下列各行列式：

(1) $\begin{vmatrix}4&1&2&4\\1&2&0&2\\10&5&2&0\\0&1&1&7\end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix}2&1&4&1\\3&-1&2&1\\1&2&3&2\\5&0&6&2\end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix}-ab&ac&ae\\bd&-cd&de\\bf&cf&-ef\end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\b+c&c+a&a+b\end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix}a&1&0&0\\-1&b&1&0\\0&-1&c&1\\0&0&-1&d\end{vmatrix}$； (6) $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&1\\1&4&1&2\\1&1&2&3\end{vmatrix}$.

【分析】 为了表明行列式(矩阵)的变换过程，本书中约定：

$r_i\leftrightarrow r_j$　行列式(矩阵)第 i 行与第 j 行互换；

$c_i\leftrightarrow c_j$　行列式(矩阵)第 i 列与第 j 列互换；

$k\times r_i$　行列式(矩阵)第 i 行乘 k；

$k\times c_i$　行列式(矩阵)第 i 列乘 k；

$r_i\pm kr_j$　行列式(矩阵)第 i 行加(减)第 j 行的 k 倍；

$c_i\pm kc_j$　行列式(矩阵)第 i 列加(减)第 j 列的 k 倍.

【解析】 (1) $$\begin{vmatrix}4&1&2&4\\1&2&0&2\\10&5&2&0\\0&1&1&7\end{vmatrix}\xlongequal[c_4-2c_1]{c_2-2c_1}\begin{vmatrix}4&-7&2&-4\\1&0&0&0\\10&-15&2&-20\\0&1&1&7\end{vmatrix}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-7&2&-4\\-15&2&-20\\1&1&7\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2-2r_3]{r_1-2r_3}-\begin{vmatrix}-9&0&-18\\-17&0&-34\\1&1&7\end{vmatrix}^{(*)}=-(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-9&-18\\-17&-34\end{vmatrix}=0.$$

【注】 观察行列式中元素的规律性，选择合适的性质及展开定理，是计算行列式的基本思路. 本题中利用 $a_{21}=1$ 消 a_{22}，a_{24} 为零，再展开较方便. (*)处该行列式，前两行成比例，故该行列式为零.

(2) $$\begin{vmatrix}2&1&4&1\\3&-1&2&1\\1&2&3&2\\5&0&6&2\end{vmatrix}\xlongequal{r_2+r_1}\begin{vmatrix}2&1&4&1\\5&0&6&2\\1&2&3&2\\5&0&6&2\end{vmatrix}\xlongequal{r_2-r_4}0.$$

(3) $$\begin{vmatrix}-ab&ac&ae\\bd&-cd&de\\bf&cf&-ef\end{vmatrix}=adf\begin{vmatrix}-b&c&e\\b&-c&e\\b&c&-e\end{vmatrix}=abcdef\begin{vmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1} abcdef\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4abcdef.$$

(4)$D \xlongequal{r_2+r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = 0.$

(5)$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b & 1 & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix}$

$$= a\left(b\begin{vmatrix} c & 1 \\ -1 & d \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & d \end{vmatrix}\right) + cd + 1$$

$$= a[b(cd+1)+d] + cd + 1$$

$$= abcd + ab + ad + cd + 1.$$

(6)$D \xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3\times(-1)]{\text{按 } c_1 \text{ 展开}} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2-c_1} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$= 4\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 16.$$

5. 求解下列方程：

(1)$\begin{vmatrix} x+1 & 2 & -1 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$；

(2)$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & c \\ x^2 & a^2 & b^2 & c^2 \\ x^3 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 0$，其中 a,b,c 互不相等.

【解析】(1)$\begin{vmatrix} x+1 & 2 & -1 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2} \begin{vmatrix} x+3 & 2 & -1 \\ x+3 & x+1 & 1 \\ 0 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = (x+3)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & x+1 & 1 \\ 0 & 1 & x+1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_2-r_1} (x+3)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & x-1 & 2 \\ 0 & 1 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$= (x+3)[(x-1)(x+1)-2] = (x+3)(x^2-3) = 0.$$

故方程的解(根)为：$x_1 = -3, x_2 = \sqrt{3}, x_3 = -\sqrt{3}$.

(2)将第 1 列中元素 x, x^2, x^3 消为零.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & c \\ x^2 & a^2 & b^2 & c^2 \\ x^3 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \xlongequal[i=4,3,2]{r_i - xr_{i-1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-x & b-x & c-x \\ 0 & a(a-x) & b(b-x) & c(c-x) \\ 0 & a^2(a-x) & b^2(b-x) & c^2(c-x) \end{vmatrix}$$

$$=(a-x)(b-x)(c-x)\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}=0.$$

因为 a,b,c 互不相等,故

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}=(c-a)(c-b)(b-a)\neq 0\text{(见本章习题第 1 题第(3)小题)}.$$

故方程的解(根)为:$x_1=a,x_2=b,x_3=c$.

【注】(1)方程左端是范德蒙德行列式,可直接得出结果

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\x&a&b&c\\x^2&a^2&b^2&c^2\\x^3&a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}=(c-x)(c-a)(c-b)(b-x)(b-a)(a-x)=0.$$

因 a,b,c 互不相等,则方程的解为 $x_1=a,x_2=b,x_3=c$.

(2)由观察,当 $x=a,b,c$ 时,分别有第 1,2 列,第 1,3 列,第 1,4 列相等,行列式为 0,且按第 1 列展开,方程是关于 x 的一元三次方程.故方程有三个根,且根为 $x_1=a,x_2=b,x_3=c$.

6. 证明:

(1) $\begin{vmatrix}a^2&ab&b^2\\2a&a+b&2b\\1&1&1\end{vmatrix}=(a-b)^3$;

(2) $\begin{vmatrix}ax+by&ay+bz&az+bx\\ay+bz&az+bx&ax+by\\az+bx&ax+by&ay+bz\end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix}x&y&z\\y&z&x\\z&x&y\end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix}a^2&(a+1)^2&(a+2)^2&(a+3)^2\\b^2&(b+1)^2&(b+2)^2&(b+3)^2\\c^2&(c+1)^2&(c+2)^2&(c+3)^2\\d^2&(d+1)^2&(d+2)^2&(d+3)^2\end{vmatrix}=0$;

(4) $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^4&b^4&c^4&d^4\end{vmatrix}=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$;

(5) $\begin{vmatrix}x&-1&0&0\\0&x&-1&0\\0&0&x&-1\\a_0&a_1&a_2&a_3\end{vmatrix}=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$.

【证明】(1) $\begin{vmatrix}a^2&ab&b^2\\2a&a+b&2b\\1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal{c_1-2c_2+c_3}\begin{vmatrix}a^2-2ab+b^2&ab&b^2\\0&a+b&2b\\0&1&1\end{vmatrix}=(a-b)^2(a+b-2b)$

$=(a-b)^3$.

(2) $\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax & ay+bz & az+bx \\ ay & az+bx & ax+by \\ az & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & ay+bz & az+bx \\ bz & az+bx & ax+by \\ bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$

$$= a\begin{vmatrix} x & ay+bz & az \\ y & az+bx & ax \\ z & ax+by & ay \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} y & bz & az+bx \\ z & bx & ax+by \\ x & by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$= a^2\begin{vmatrix} x & ay & z \\ y & az & x \\ z & ax & y \end{vmatrix} + b^2\begin{vmatrix} y & z & bx \\ z & x & by \\ x & y & bz \end{vmatrix}$$

$$= a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$$= (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}.$$

(3) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-c_1}]{c_2-c_1} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[c_4-3c_2]{c_3-2c_2} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2a+1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

(4)**证法一** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-ar_2 \\ r_2-ar_1}]{r_4-a^2r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ 0 & b^2(b^2-a^2) & c^2(c^2-a^2) & d^2(d^2-a^2) \end{vmatrix}$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2(b+a) & c^2(c+a) & d^2(d+a) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2-br_1]{r_3-b(b+a)r_2} (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c^2(c+a)-bc(b+a) & d^2(d+a)-bd(b+a) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} c-b & d-b \\ c(c-b)(a+b+c) & d(d-b)(a+b+d) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c(a+b+c) & d(a+b+d) \end{vmatrix}$$

$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)[ad+bd+d^2-(ac+bc+c^2)]$

$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)$

$=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d).$

证法二 由范德蒙德行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix}$$

$=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a)$

$=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$

题目所求行列式是 D 的 M_{45}，D 按第 5 列展开，x^3 的系数为 $A_{45}=(-1)^{4+5}M_{45}=-M_{45}$.
由上式知 x^3 的系数是

$$-(a+b+c+d)(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d),$$

故
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}=(a+b+c+d)(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

(5)**证法一** 按第 1 列展开得

$$D=x\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}-a_0\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$=x\left(x\begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}+a_1\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ x & -1 \end{vmatrix}\right)+a_0 \text{（对上式第 1 个行列式继续按第 1 列展开）}$$

$$=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0.$$

证法二 按最后一行展开得

$$D=-a_0\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{vmatrix}+a_1\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0.$

7. 设 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$，把 D 上下翻转、或逆时针旋转 90°、或依副对角线翻转，依次得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix},D_3=\begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix},$$

证明：$D_1=D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$，$D_3=D$.

【证明】
$$D_1=\begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_{i+1}\leftrightarrow r_i(i=n-1,\cdots,2)\\ \cdots\cdots \\ r_n\leftrightarrow r_{n-1}}]{r_{i+1}\leftrightarrow r_i(i=n-1,\cdots,1)}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D;$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \\ a_{1(n-1)} & a_{2(n-1)} & \cdots & a_{n(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_{i+1}\leftrightarrow r_i(i=n-1,\cdots,2)\\ \cdots\cdots \\ r_n\leftrightarrow r_{n-1}}]{r_{i+1}\leftrightarrow r_i(i=n-1,\cdots,1)}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{行列互换}}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D=D_1.$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{nn} & a_{(n-1)n} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n(n-1)} & a_{(n-1)(n-1)} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{(n-1)1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_{i+1}\leftrightarrow r_i(i=n-1,\cdots,2)\\ \cdots\cdots \\ r_n\leftrightarrow r_{n-1}}]{r_{i+1}\leftrightarrow r_i(i=n-1,\cdots,1)}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{n1} & a_{(n-1)1} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n(n-1)} & a_{(n-1)(n-1)} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ a_{nn} & a_{(n-1)n} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{行列互换}}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \\ a_{(n-1)1} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_{i+1}\leftrightarrow r_i(i=n-1,\cdots,2)\\ \cdots\cdots \\ r_n\leftrightarrow r_{n-1}}]{r_{i+1}\leftrightarrow r_i(i=n-1,\cdots,1)}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D.$$

8. 计算下列各行列式(D_k 为 k 阶行列式)：

(1) $D_n=\begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix}$，其中对角线上元素都是 a，未写出的元素都是 0；

(2) $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$；