10年典藏版 探究应用 新思维系列丛书

十年经典　畅销千万
同类图书市场领袖品牌

探究应用新思维

黄东坡◎著

数学 8年级

蔚蓝的思维　清澈的理性
深邃的探究　旷远的应用

长江出版传媒 | 湖北人民出版社

探究应用新思维

黄东坡◎著

数学 8年级

蔚蓝的思维　清澈的理性
深邃的探究　旷远的应用

长江出版传媒 | 湖北人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学探究应用新思维·八年级/黄东坡著.

武汉：湖北人民出版社,2013.6

ISBN 978－7－216－07700－2

Ⅰ.数… Ⅱ.黄… Ⅲ.中学数学课－初中－教学参考资料

Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第121091号

出 品 人：袁定坤
责任部门：基础教育分社
责任编辑：熊昕绘
封面设计：刘舒扬
责任校对：游润华
责任印制：杜义平
法律顾问：王在刚

出版发行:湖北人民出版社	地址:武汉市雄楚大道268号
印刷:荆州市翔羚印刷有限公司	邮编:430070
开本:880毫米×1230毫米1/16	印张:15.75
版次:2013年6月第2版	印次:2014年11月第24次印刷
字数:436千字	印数:433 001—453 000
书号:ISBN 978－7－216－07700－2	定价:30.00元

本社网址：http://www.hbpp.com.cn
本社旗舰店：http://hbrmcbs.tmall.com.
读者服务部电话：027-87679656
投诉举报电话：027-87679757
(图书如出现印装质量问题，由本社负责调换)

乘着思维的翅膀

(一)

思维之花是世界上最美丽的花朵。

思维也即观察问题的视角、解决问题的策略。

苏格拉底说:“知识即美德。”培根又云:“知识就是力量。”而随着时代的发展、教育的变革,人们已经认识到:只有当知识被应用于解决实际问题时,知识才踏上通向美德的道路;唯有当知识被应用于探索性思维培养时,知识才能转化为开启心智的力量。

为思维而教、为思维而学是教育变革大潮中激荡的最强音。

美国《国家教育战略报告》指出:“强化并贯穿于所有各种教育目的的中心目的——教育的基本思路——就是要培养思维能力。”

探索与应用是新课程理念的两个关键词。

澳大利亚教育学会主席J. Bacr教授说:“教师是一把钥匙,这钥匙应该充满魔力,可以打开许多门,门外的道路至少有三条——实际应用、知识的深入理解和探索性思维的培养。”

(二)

疑是思之始,学之端。

思维由问题产生,从疑问与惊奇开始。

问题是科学研究的出发点,是知识积累、思想方法的逻辑力量。

著名科学思想史专家波普尔曾说:“知识的增长,永远始于问题,终于问题——愈来愈深化的问题,愈来愈能启发大量新问题的问题。”

在《新思维》即将迎来它的十岁生日之际,我们推出修订后的“十年典藏版”。

在保留经典内容、精美问题的基础上，从学科的整体性、问题的交汇性出发，增添新的专题，补充新的问题，特别关注问题的探究性与应用性和引领性与发展性。对“问题解决”中的部分问题，给出详尽的分析或解答，引导读者读题与感悟，旨在激发想象、感悟方法、锤炼思想、启迪心智；感受探究的趣味，体会应用的美妙。

（三）

乘着思维的翅膀，放飞思维，为智慧寻找高处。

高处是思想的深刻，精神的高度。

高处是俯瞰的开阔视野，是瞭望的深度引领；是洞若观火的深邃，是悠然心会的从容。

“不畏浮云遮望眼，只缘身在最高层。”

科学巨匠爱因斯坦曾说：“我们所创造的这个世界，是我们思维的产物，不改变我们的思维，不可能改变我们的世界。”

乘着思维的翅膀，

改变思维

改变你。

黄东坡

2013年5月于湖北省水果湖第二中学

目　录

MU LU

数与代数

空间与图形

数与代数

C. 雅可比，生于1804年12月10日，凭着对数学的极大兴趣和满腔热情，雅可比在年轻时就取得了令人瞩目的成就. 雅可比是把椭圆函数理论应用于数论的第一人，并且用这种方法证明了费马的著名断言：每一个正整数1，2，3，…都是4个整数1，2，3，…的平方和. 此外，在代数、动力学、牛顿—拉普拉斯—拉格朗日的引力理论中都有许多伟大的贡献.

1. 因式分解

解读课标

因式分解是整式乘法的逆向运用，它不仅体现了一种“化归”的思想，而且也是学习后续内容（如分式的化简、解方程）等普遍使用的恒等变形的基础，为数学交流提供有效途径.

提公因式、公式法是因式分解的基本方法. 有公因式先提公因式、分解因式必须进行到每一个多项式因式都不能再分解为止，这是因式分解的基本原则.

一些复杂的因式分解问题，常用到以下知识方法：

1. 若 $q=ab$ 且 $p=a+b$，则形如 x^2+px+q 的多项式可分解为 $(x+a)(x+b)$；

2. 当多项式项数较多（4项或4项以上）时，通过恰当分组分解；

3. 对结构较复杂的多项式，利用换元法分解.

问题解决

例1 分解因式 $(2x-3y)^3+(3x-2y)^3-125(x-y)^3=$______.

（“五羊杯”竞赛题）

试一试 从公式 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ 入手，若能发现前两项与后一项的联系，则能获得简解.

例2 把下列各式分解因式

(1) $(x^2+5x+2)(x^2+5x+3)-12$；

(2) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+6)+x^2$；

视野窗

我想试一试（I'll Try）——英·罗赛蒂

那个说“我想试试”的小孩

他将登上山巅

那个说：“我不成”的小孩

在山下停步不前

“我想试试”

每天办成很多事

“我不成”

就真的一事无成

因此你务必说“我想试试”

将“我不成”弃于埃尘

因式分解与因数分解类似，它与整式乘法的过程恰好相反，我们可以用整式的乘法得到因式分解的方法，也可以用整式乘法来检验因式分解的正确性.

(3)$(x+y)(x+y+2xy)+(xy+1)(xy-1)$.

（“希望杯”邀请赛试题）

试一试 对于(1)，视 x^2+5x 为整体，或用一个新字母代替；(2)是形如 $abcd+e$ 型的多项式，恰当把四个因式两两分组相乘，使得分组相乘后所得的项中有相同的部分；(3)式中 $x+y$、xy 多次出现，引入两个新字母，突出式子特点.

例 3 阅读理解

观察下列因式分解的过程：

(1)$x^2-xy+4x-4y$

原式$=(x^2-xy)+(4x-4y)=x(x-y)+4(x-y)=(x-y)(x+4)$

(2)$a^2-b^2-c^2+2bc$

原式$=a^2-(b^2+c^2-2bc)=a^2-(b-c)^2=(a+b-c)(a-b+c)$

第(1)题分组后能直接提公因式，第(2)题分组后能直接运用公式. 仿照上述分解因式的方法，把下列各式分解因式：

(1)$a^2-ab+ac-bc$； （西宁市中考题）

(2)$x^2-4y^2-z^2+4yz$. （临沂市中考题）

试一试 通过分组，使每一组分解因式后，整体能再分解，恰当分组是关键，经历“试验—失败—再试验—再失败—直至成功”的过程.

例 4 分解因式：$x^3+6x^2+11x+6$.

（“CASIO 杯”河南省竞赛题）

分析 直接用分解因式的基本方法无法解本例，解决本例的突破口是把多项式中的某一项拆成两项或多项，使得便于分组进行分解因式.

解法一 原式$=(x^3+x^2)+(5x^2+5x)+(6x+6)$

$=x^2(x+1)+5x(x+1)+6(x+1)$

$=(x+1)(x^2+5x+6)$

$=(x+1)(x+2)(x+3)$

解法二 原式$=(x^3+2x^2)+(4x^2+8x)+(3x+6)$

$=x^2(x+2)+4x(x+2)+3(x+2)$

$=(x+2)(x^2+4x+3)$

$=(x+1)(x+2)(x+3)$

解法三 原式$=(x^3+1)+(6x^2+11x+5)$

$=(x+1)(x^2-x+1)+(x+1)(6x+5)$

$=(x+1)(x^2+5x+6)$

$=(x+1)(x+2)(x+3)$

视野窗

对结构较复杂的多项式，若把其中某些部分看成一个整体，用新字母代替(即换元)，则能使复杂的问题简单化、明朗化.

从换元的形式看，有常值代换、式的代换；从引元的个数看，有一元代换、二元代换等.

分组是解较复杂因式分解问题的基本手段，体现了化整体为局部、又统揽全局的思想. 恰当分组是解题的关键，基本策略是：

(1)按系数分组；

(2)按次数分组；

(3)按字母分组.

当直接分解因式难以进行时，可适当地拆项(把代数式中的某项拆成两项的和或差)或添项(把代数式添上符号相反的项)，达到分组、提公因式的目的. 拆项与添项是一种技巧性较强的工作，只有认真观察多项式的结构特征和数量关系，才能正确地进行拆、添项，促使问题的解决.

十字相乘法

由$(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)=a_1a_2x^2+(a_1c_2+a_2c_1)x+c_1c_2$ 得 $a_1a_2x^2+(a_1c_2+a_2c_1)x+c_1c_2=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$.

从上式中发现：若一个二次三项式的二次项的系数分解为 a_1a_2，常数项分解为 c_1c_2，把它们按右图排列，且斜线交叉相乘后的和为一次项系数，则原式可分解为两个一次因式的乘积.

$$\begin{matrix} a_1 & & c_1 \\ & \times & \\ a_2 & & c_2 \end{matrix}$$

像这种借助画十字交叉图分解系数，从而帮助我们分解二次三项式的方法，叫十字相乘法.

例 5 把下列各式分解因式：

(1)$6y^2-11y-10$；

(2)$8x^2-2xy-3y^2$.

解 (1)∵ $\begin{matrix} 3 & & 2 \\ & \times & \\ 2 & & -5 \end{matrix}$ $3\times(-5)+2\times2=-11$，

∴原式$=(3y+2)(2y-5)$

(2)∵ $\begin{matrix} 2 & & y \\ & \times & \\ 4 & & -3y \end{matrix}$ $2\times(-3y)+y\times4=-2y$，

∴原式$=(2x+y)(4x-3y)$

视野窗

$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$是应用十字相乘法分解的一个特例.

十字相乘法是分解二次三项式的一种简便方法，因整数分解、组合有多种方式，故一般要经过多次的尝试，才能确定二次三项式能否用十字相乘法分解.

为使下列各式可以在整数范围内因式分解，a、b分别可取哪些整数？

(1)$x^2+ax-18$

(2)x^2+7x+b

数学冲浪

——知识技能广场——

1. 多项式 ax^2-4a 与多项式 x^2-4x+4 的公因式是________.

(常德市中考题)

2. 分解因式：(1)$a^3+ab^2-2a^2b=$________；(成都市中考题)

(2)$(x-1)^2-2(x-1)+1=$________；(2012 年无锡市中考题)

(3)$a^2-2ab+b^2-1=$________；(2012 年南通市中考题)

(4)$x^2-y^2-4x+4=$________.(哈尔滨市中考题)

3. 分解因式：$x^3+3x^2-4x-12=$____________.

4. 分解因式：$(x^2+3x)^2-2(x^2+3x)-8=$____________.

5. 多项式 $ac-bc+a^2-b^2$ 分解因式的结果是( ).

A. $(a-b)(a+b+c)$ B. $(a-b)(a+b-c)$

C. $(a+b)(a+b-c)$ D. $(a+b)(a-b+c)$

(北京市海淀区中考题)

6. 将多项式 x^4+2x^2-3 分解因式的结果是( ).

A. $(x^2+3)(x^2-1)$ B. $(x^2+1)(x^2-3)$

C. $(x^2+3)(x+1)(x-1)$ D. $(x^2+1)(x+3)(x-3)$

7. 把多项式 $x^2-y^2-2x-4y-3$ 因式分解之后，正确的结果是(　　).

A. $(x+y+3)(x-y-1)$　　B. $(x+y-1)(x-y+3)$

C. $(x+y-3)(x-y+1)$　　D. $(x+y+1)(x-y-3)$

（“希望杯”邀请赛试题）

8. 已知 $x^2+ax-12$ 能分解成两个整系数的一次因式的乘积，则符合条件的整数 a 的个数是(　　).

A. 3 个　　B. 4 个　　C. 6 个　　D. 8 个

9. 分解因式

(1) $4a^2-b^2+6a-3b$;

(2) $9a^2-4b^2+4bc-c^2$;

(3) $(a+c)(a-c)+b(b-2a)$;

(4) $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$;

(5) $(2x^2-3x+1)^2-22x^2+33x-1$;

(6) $(x^2-1)(x+3)(x+5)+12$.

10. 分解因式

(1) $12x^2-x-6$;

(2) $4x^2-24xy+11y^2$;

(3) $x^2y^4+7x^2y^2-8x^2$.

——思维方法天地——

11. 分解因式：$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+x(x+5)=$________.

（“五羊杯”竞赛题）

12. 分解因式：$(x-2)^3-(y-2)^3-(x-y)^3=$__________.

（“五羊杯”竞赛题）

13. 分解因式：$9x^2-6x-y^2+4y-3=$__________.

（河南省竞赛题）

14. 已知 $(19x-31)(13x-17)-(13x-17)(11x-23)$ 可因式分解为 $(ax+b)(8x+c)$，其中 a、b、c 均为整数，则 $a+b+c=$________.

（台湾省中考题）

15. a^4+4 分解因式的结果是(　　).

A. $(a^2+2a-2)(a^2-2a+2)$　　B. $(a^2+2a-2)(a^2-2a-2)$

C. $(a^2+2a+2)(a^2-2a-2)$　　D. $(a^2+2a+2)(a^2-2a+2)$

（北京市竞赛题）

16. 实数 $m=2005^3-2005$，下列各数中不能整除 m 的是(　　).

A. 2006　　B. 2005　　C. 2004　　D. 2003

（“希望杯”邀请赛试题）

17. 已知 $a-b=3$，$b+c=-5$，则代数式 $ac-bc+a^2-ab$ 的值为(　　).

A. -15　　B. -2　　C. -6　　D. 6

18. 已知 a、b、c 是△ABC 的三边长，且满足 $a^2+2b^2+c^2-2b(a+c)=0$，则此三角形是(　　).

A. 等腰三角形　B. 等边三角形　C. 直角三角形　D. 不能确定

19. 分解因式：

(1)$4x^2-4x-y^2+4y-3$；（重庆市竞赛题）

(2)$(x+y-2xy)(x+y-2)+(xy-1)^2$；（“希望杯”邀请赛试题）

(3)$4x^3-31x+15$；（重庆市竞赛题）

(4)x^3+5x^2+3x-9.（河南省竞赛题）

——应用探究乐园——

20. 已知在△ABC 中，三边长 a、b、c 满足等式 $a^2-16b^2-c^2+6ab+10bc=0$. 求证：$a+c=2b$.

（天津市竞赛题）

21. **下金蛋的鸡**　法国数学家费马(1601—1665)一生中提出了不少猜想，最著名的是“费马大定理”：关于 x,y,z 的方程 $x^n+y^n=z^n$(n 为大于 2 的整数)没有正整数解. 直到 350 年之后，这个猜想才由英国数学家怀尔斯于 1994 年证明. 德国数学家希尔伯特(1862—1943)将费马大定理称为“一只会下金蛋的鸡”，因为在攻克它的漫漫征程中，不但引出了许多数学概念和方法，而且促进了一些新的分支的创立和发展. 这些远比证明定理本身更重要！

不过费马的猜想并不总是正确的. 他考察了 $2^{2^1}+1=5$，$2^{2^2}+1=17$，$2^{2^3}+1=257$，$2^{2^4}+1=65537$，发现结果都是素数(也称质数)，于是猜想：对任意正整数 n，$2^{2^n}+1$(即 $2^{(2^n)}+1$)都是素数.

瑞士数学家欧拉(1707—1783)指出，$2^{2^5}+1$ 并不是素数. 我国数学家华罗庚(1910—1985)在他的著作《数论导引》中给出一种简明的证法：设 $a=2^7$，$b=5$，可算得 $2^{2^5}+1=(1+ab)a^4+1-a^4b^4$，可见 $2^{2^5}+1$ 必有除 1 和本身以外的约数________(填较简单的一个，用含 a、b 的式子表示)，即 $2^{2^5}+1$ 能被________整除(填入具体数值)，所以不是素数.

（《时代学习报》数学文化节试题）

伯恩哈德·黎曼(1826—1866),德国著名数学家.黎曼创立的以他名字命名的几何学,是爱因斯坦广义相对论的数学基础,没有黎曼几何学之助,广义相对论的理论大厦便无从构建."黎曼猜想"在很多数学家眼里,是比哥德巴赫猜想更有价值的数学猜想.20世纪数学大师希尔伯特说过:"如果我在一千年以后复活,第一个问题就是,黎曼猜想解决了没有."

视野窗

著名数学教育家玻利亚曾说:"对一个数学问题,改变它的形式,换一种叙述方式,变换它的结构,直到发现有价值的东西,这是解题的一个重要原则."

2.因式分解的应用

解读课标

因式分解是代数变形的有力工具,其应用主要体现在以下几个方面:

1.简化复杂的数值计算;

2.把繁杂的式子化简,使运算更加简便;

3.解不定方程;

4.证明代数相关问题等.

有些多项式因式分解后的结果在解决问题过程中常常用到,我们应熟悉这些结果:

1. $a^3 \pm b^3=(a \pm b)(a^2 \mp ab+b^2)$;

2. $mn \pm m \pm n+1=(m \pm 1)(n \pm 1)$;

3. $a^4+4=(a^2+2a+2)(a^2-2a+2)$;

4. $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)=(a+b+c)^2$;

5. $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$.

在一定条件下,把一个代数式变换成另一个与之恒等的代数式称为代数式的恒等变形,它是研究代数式、方程和函数的重要工具,而换元法、配方法、因式分解则是恒等变形的有力工具.

问题解决

例1 方程 $xy-2x-2y+7=0$ 的整数解$(x \leqslant y)$为________.

(江苏省竞赛题)

试一试 把一个未知数用另一个未知数的代数式表示,或利用 $ab-ma-mb+m^2$ 因式分解后的结果.

解不定方程的基本方法有:分离整系数、枚举、配方、因式分解等.

例 2 $2^{16}-1$ 能分解成 n 个质因数的乘积，n 的值是（　　）.

A. 6　　B. 5　　C. 4　　D. 3

（“希望杯”邀请赛试题）

试一试 略.

例 3 计算

(1) $\dfrac{2003^2-4004\times2003+2002\times4008-2003\times2004}{2003^2-3005\times2003-2003\times2005+2005\times3005}$；

（“希望杯”邀请赛试题）

(2) $\dfrac{(7^4+64)(15^4+64)(23^4+64)(31^4+64)(39^4+64)}{(3^4+64)(11^4+64)(19^4+64)(27^4+64)(35^4+64)}$.

（“华杯赛”试题）

试一试 对于(1)，观察分子、分母数字间的特点，把恰当的数用一个字母表示，将复杂的数值计算转化为式的运算；对于(2)，运用 $a^4+64=(a^4+16a^2+64)-16a^2=(a^2+8)^2-(4a)^2=(a^2+4a+8)(a^2-4a+8)$ 的结果.

字母示数，可以把复杂的数值计算转化为式的运算，通过分解相约简化计算，而解题的关键是能发现数字间的关联.

例 4 设 $a=10^9+38^3-2$，证明：a 是 37 的倍数.

（“希望杯”邀请赛试题）

试一试 对 a 作类似因式分解的变形，变形应向含因数 37 的方向发展.

不站在高处，有些风景你永远不能发现它的美丽.

托尔斯泰曾说：“为灵魂建一块高地，才能俯视尘埃，从容自信，不流世俗.”

低处，波诡云谲，变化莫测；高处是明净，是静止的永恒.

为思维构建高地.

例 5 已知 n 是正整数，且 n^4-16n^2+100 是质数，求 n 的值.

分析与解 依据质数定义，质数只能分解成 1 和本身的乘积. 故解本例的最自然的思路是：对原式进行恰当的分解变形.

$n^4-16n^2+100=n^4+20n^2+100-36n^2=(n^2+10)^2-36n^2=(n^2+6n+10)(n^2-6n+10)$，因 $n^2+6n+10\neq1$，而 n^4-16n^2+100 为质数且 n 为正整数，故 $n^2-6n+10=1$，即 $(n-3)^2=0$，得 $n=3$.

质数、合数的概念有不同的描述方式，既可以从整除的角度定义，又可以用分解的方式定义.

配方法

把一个式子或一个式子的部分改写成完全平方式或者几个完全平方式的和的形式,这种解题方法叫配方法.

配方法的作用在于改变式子的原有结构,提示式子的非负性.

例 6 (1)实数 x、y 满足 $x^2+12xy+52y^2-8y+1=0$,则 $x^2-y^2=$________.

(2012 年北京市竞赛题)

(2)在平面直角坐标系中,满足不等式 $x^2+y^2\leqslant 2x+2y$ 的整数点坐标(x,y)的个数为(　　).

A. 10　　B. 9　　C. 7　　D. 5

(2012 年"《数学周报》杯"全国初中数学竞赛题)

分析 由式子的结构特点(平方和或积的 2 倍)试试配方法,常能降低问题的难度.

解 (1)由条件得$(x+6y)^2+(4y-1)^2=0$,

$\therefore x+6y=0, 4y-1=0$,得 $x=-\frac{3}{2}, y=\frac{1}{4}$.

故原式$=\frac{35}{16}$.

(2)由条件得 $0\leqslant(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2$,因 x,y 均为整数,故得

$\begin{cases}(x-1)^2=0\\(y-1)^2=0\end{cases}$; $\begin{cases}(x-1)^2=0\\(y-1)^2=1\end{cases}$; $\begin{cases}(x-1)^2=1\\(y-1)^2=0\end{cases}$; $\begin{cases}(x-1)^2=1\\(y-1)^2=1.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=1\\y=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=1\\y=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=1\\y=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x=0\\y=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=0\\y=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x=0\\y=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\\y=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\\y=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\\y=2.\end{cases}$

故选 B.

视野窗

运用配方法解题的关键在于"配凑"、"拆添",需具有整体把握已知条件的能力,即善于把某项拆开又与其他项重组,得到完全平方式.

配方法在代数式的化简求值、解不定方程、求最值等方面有广泛的应用.

数学冲浪

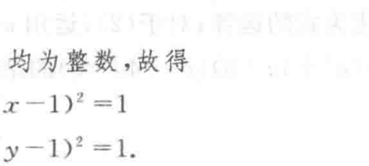
——知识技能广场——

1. 已知 $2x-3=0$,那么代数式 $x(x^2-x)+x^2(5-x)-9$ 的值为________.

(北京市中考题)

2. 如图,有三种卡片,其中边长为 a 的正方形卡片 1 张,边长分别为 a、b 的长方形卡片 6 张,边长为 b 的正方形卡片 9 张,用这 16 张卡片拼成一个正方形,则这个正方形的边长为________.

(烟台市初中考题)



(第 2 题)

3. 已知 $a^5-a^4b-a^4+a-b-1=0$,且 $2a-3b=1$,则 a^3+b^3 的值等于________.

("希望杯"邀请赛试题)

视野窗

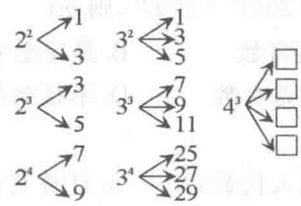
4. 已知 $m\geqslant 2$，$n\geqslant 2$，且 m、n 均为正整数，如果将 m^n 进行如下方式的"分解"，那么下列三个叙述：

(1)在 2^5 的"分解"中最大的数是11；

(2)在 4^3 的"分解"中最小的数是13；

(3)若 m^3 的"分解"中最小的数是23，则 m 等于5.

其中正确的是________.



(第4题)

(太原市中考题)

5. 若实数 x,y,z 满足 $(x-z)^2-4(x-y)(y-z)=0$，则下列式子一定成立的是(　　).

A. $x+y+z=0$　　B. $x+y-2z=0$　　C. $y+z-2x=0$　　D. $z+x-2y=0$

(天津市中考题)

6. 已知 $a>b>c$，$M=a^2b+b^2c+c^2a$，$N=ab^2+bc^2+ca^2$，则 M 与 N 的大小关系是(　　).

A. $M<N$　　B. $M>N$　　C. $M=N$　　D. 不能确定

7. 设 n 为某一自然数，代入代数式 n^3-n 计算其值时，四个学生算出了下列四个结果，其中正确的结果是(　　).

A. 5814　　B. 5841　　C. 8415　　D. 8451

8. a、b、c 是正整数，$a>b$，$a^2-ab-ac+bc=7$，则 $a-c$ 等于(　　).

A. -1　　B. -1 或 -7　　C. 1　　D. 1 或 7

9. 计算

(1)$\dfrac{2004^3-2\times 2004^2-2002}{2004^3+2004^2-2005}$；

(2)$\dfrac{(2^4+\frac{1}{4})(4^4+\frac{1}{4})(6^4+\frac{1}{4})(8^4+\frac{1}{4})(10^4+\frac{1}{4})}{(1^4+\frac{1}{4})(3^4+\frac{1}{4})(5^4+\frac{1}{4})(7^4+\frac{1}{4})(9^4+\frac{1}{4})}$.

10. (1)求证：$81^7-27^9-9^{13}$ 能被45整除；

(2)证明：当 n 为自然数时，$2(2n+1)$ 形式的数不能表示为两个整数的平方差.

——思维方法天地——

11. a、b、c 是正整数，并且满足等式 $abc+ab+ac+bc+a+b+c+1=2004$，那么 $a+b+c$ 的最小值是________.

("华杯赛"试题)

12. 已知 a、b、x、y 满足 $a+b=x+y=2$，$ax+by=5$，则 $(a^2+b^2)xy+ab(x^2+y^2)=$________.

("TRULY®信利杯"全国竞赛题)

13. 整数 x,y 满足方程 $2xy+x+y=83$，则 $x+y=$________.

14. A、n 都是自然数，且 $A=n^2+15n+26$ 是一个完全平方数，则 $n=$________.

("希望杯"邀请赛试题)

15. 若 $m=2006^2+2006^2\times2007^2+2007^2$，则 m(　　).

A. 是完全平方数，还是奇数　　B. 是完全平方数，还是偶数

C. 不是完全平方数，但是奇数　　D. 不是完全平方数，但是偶数

（“希望杯”邀请赛试题）

16. 设 n 为某一正整数，代入代数式 n^5-n 计算其值时，四个学生算出了下列四个结果，其中仅有一个是正确的，则这个正确的结果是(　　).

A. 7770　　B. 7775　　C. 7776　　D. 7779

（四川省竞赛题）

17. 方程 $x^2+2xy+3y^2=34$ 的整数解 (x,y) 的组数为(　　).

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

（2012 年全国初中数学竞赛题）

18. 黑板上写有 $1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{100}$ 共 100 个数字，每次操作先从黑板上的数中选取两个数 a,b，然后删去 a,b，并在黑板上写上数 $a+b+ab$，则经过 99 次操作后黑板上剩下的数是(　　).

A. 2012　　B. 101　　C. 100　　D. 99

（2012 年“《数学周报》杯”全国初中数学竞赛题）

19. 已知 $a^2(b+c)=b^2(a+c)=2012$，且 $a\neq b$，求 $c^2(a+b)$ 的值.

（“我爱数学夏令营”竞赛题）

20. 计算：$\frac{(2^4+2^2+1)(4^4+4^2+1)(6^4+6^2+1)(8^4+8^2+8)(10^4+10^2+1)}{(3^4+3^2+1)(5^4+5^2+1)(7^4+7^2+1)(9^4+9^2+1)(11^4+11^2+1)}$.

（青少年数学国际城市邀请赛试题）

——应用探究乐园——

21. 当我们看到下面这个数学算式 $\frac{37^3+13^3}{37^3+24^3}=\frac{37+13}{37+24}=\frac{50}{61}$ 时，大概会觉得算题的人错用了运算法则吧，因为我们知道 $\frac{a^3+b^3}{c^3+d^3}\neq\frac{a+b}{c+d}$. 但是，如果你动手计算一下，就会发现上式并没有错，不仅如此，我们还可以写出任意多个这种等式：

$\frac{3^3+1^3}{3^3+2^3}=\frac{3+1}{3+2}$，$\frac{5^3+2^3}{5^3+3^3}=\frac{5+2}{5+3}$，$\frac{7^3+3^3}{7^3+4^3}=\frac{7+3}{7+4}$，$\frac{10^3+7^3}{10^3+3^3}=\frac{10+7}{10+3}$，…你能发现以上等式的规律吗？

22. 按下面规则扩充新数：

已有两数 a、b，可按规则 $c=ab+a+b$ 扩充一个新数，在 a、b、c 三个数中任取两数，按规则又可扩充一个新数，……每扩充一个新数叫做一次操作. 现有数 1 和 4.

(1)求按上述规则操作三次得到扩充的最大新数；

(2)能否通过上述规则扩充得到新数 1999，并说明理由.

（重庆市竞赛题）