“十二五”职业教育国家规划教材
经全国职业教育教材审定委员会审定

复旦卓越·数学系列

实用数学（工程类）

主 编 张圣勤 孙福兴 叶迎春

复旦大學出版社

“十二五”职业教育国家规划教材
经全国职业教育教材审定委员会审定

复旦卓越 · 数学系列

实用数学（工程类）

编委会主任 刘子馨

编委会成员（按姓氏笔画排列）

王　星　叶迎春　孙福兴　许燕频　应惠芬　张圣勤
沈剑华　金建光　姚光文　诸建平　焦光利

本书编写成员

主　编 张圣勤　孙福兴　叶迎春

副主编 姚光文　王　星

编　著（按姓氏笔画排列）

孙卫平　沈剑华　金建光

复旦大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

实用数学(工程类)/张圣勤,孙福兴,叶迎春主编.—上海:复旦大学出版社,2015.8
ISBN 978-7-309-10768-5

Ⅰ.实… Ⅱ.①张…②孙…③叶… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 132298 号

实用数学(工程类)
张圣勤 孙福兴 叶迎春 主编
责任编辑/梁 玲

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号 邮编:200433
网址:fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65642857 团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143
上海春秋印刷厂

开本 787×960 1/16 印张 24 字数 434 千
2015 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-309-10768-5/O·536
定价:42.00 元

内容提要

复旦大学出版社出版的《实用数学》分为经管类和工程类两种.其中，《实用数学》（工程类）一书共8章，分别介绍了函数与极限、导数与微分、导数的应用、定积分与不定积分及其应用、线性代数初步、微分方程、拉普拉斯变换、无穷级数，以及相关数学实验、数学建模、数学文化等内容.书末所附光盘内含本书数学实验和数学建模的教学辅助软件.同时，本书还有配套练习册可供选用.

本书可作为高职高专或者普通本科院校的高等数学课程教材，也可以作为高等数学学习的参考书.

前　言

随着计算工具和计算技术的飞速发展，数学这门既传统又古老的基础课程也正在发生深刻的变化. 放眼今天世界的科技界，手工设计和计算已经成为历史，取而代之的是计算机设计和计算. 高等数学课程的计算功能正在与计算机技术密切结合形成众多的计算技术和计算软件，而这些计算技术和计算软件正在科学、工程、经济管理等领域发挥着不可替代的作用. 2009 年，美国 Mathworks 公司发布的 Matlab 软件和 Wolfram 公司发布的 Mathematica 软件都增加了云计算模块，标志着工程计算已经迈入云计算的大门. 在这样的大背景下，作为高等教育重要基础课程的高等数学应该学什么和怎么学的问题比任何时候都要突出. 在本教材的编写过程中，作者顺应时代潮流，以构建适合于我国国情的高职教育公共课程体系为己任，以符合大纲要求、优化结构体系、加强实际应用、增加知识容量为原则，以新世纪社会主义市场经济形势下对人才素质的要求为前提，以高职数学在高职教育中的功能定位和作用为基础，努力编写一套思想内涵丰富、实际应用广泛、反映最新计算思想和技术、简单易学的高等数学教材.

《实用数学》的主要特点如下：

1. 在内容选择上，强调针对性和前瞻性，突出“实用”原则.

(1) 基础内容选择了一元函数微积分和线性代数基本知识. 对经管类专业，选择了处理随机现象的基本方法(概率论与数理统计)；对工程类专业，选择了工程中建立函数关系的常用方法(常微分方程)、工程中近似分析的常用方法(无穷级数)和工程中把一个函数化为另一个函数的常用变换方法(拉普拉斯变换).

(2) 为了使实用性与前瞻性相统一，跟上当今计算机应用的发展步伐，提升计算机在数学教学中的作用，本教材引入当今世界应用较广的 3 种数学软件(Matlab，Mathematica 和 Mathcad)来设计“数学实验”的内容，把数学教学中的计算功能与计算机技术密切结合，让计算机去完成大量数学计算. 同时也把正文中的许多数学公式表和附录中的积分表从教材中删去.

(3) 为了加强学生数学应用能力的培养，为了适应全国大学生数学建模竞赛的需要，教材相关部分增加了“数学建模”模块，通过案例介绍了与教学内容相关联的多个数学模型(如初等模型、优化模型、积分模型、线性模型、统计模型等).

(4) 在相关章节增加了“数学历史”和“数学文化”的内容，以简短的文字记述重要数学概念和理论的发展演变过程以及相关著名数学家的贡献，以帮助读者正确地理解数学概念、认识数学本质，更好地掌握所学的数学内容.

2. 在表述方法上,强调简明扼要和通俗易懂,突出“以传授数学思想为主”的理念.

(1) 适当调整教学内容中的概念、理论、方法与应用各部分所占的比重.重视基本概念的引入,强调回到实践中去,增加应用性实例;删去许多定理、公式的证明或推导,强调定理、公式的结论和使用条件;淡化运算技巧,减少符号运算,注意“必需”的基本运算.

(2) 强调数学思维的表达.只有学生真正理解和掌握了数学思想,才能在解决实际问题中融会贯通,才能有所创新.本教材在相关章节中强调了下列数学思维方法:变量间函数关系的对应思想方法;变量无限变化、无限趋近的极限思想方法;函数变化的变化率思想方法;函数局部线性化的微分思想方法和多项式逼近的无穷级数思想方法;函数极值的最优化思想方法;定积分和常微分方程中的微元思想方法;多变量线性变化的矩阵思想方法;矩阵与线性方程组中的初等变换思想方法等.

在每章的小结中,有比较详细的“基本思想”的综述.

(3) 在积分学中,从定积分计算出发,引入不定积分概念,自然而实用.淡化不定积分技巧,减少符号运算.又因计算定积分和求解不定积分都可归结为求原函数问题,其积分方法相似,本教材把定积分和不定积分的计算合在一起分析,使知识结构更具有条理性、系统性.

时代在发展,教育要前进.基于高职高专高等数学的教学时数大量压缩(很多学校只安排一个学期的课时)及教学中尚未广泛有效地安排计算机辅助教学,我们在原来《实用数学(上册)》和《实用数学(下册　工程类)》《实用数学(下册　经管类)》3 本教材的基础上进行修改,形成《实用数学(经管类)》和《实用数学(工程类)》两本教材,供高职高专学校相关专业师生使用.

《实用数学(经管类)》共 7 章,具体包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、定积分与不定积分及其应用、线性代数初步、概率论基础、数理统计初步;《实用数学(工程类)》共 8 章,具体包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、定积分与不定积分及其应用、线性代数初步、微分方程、拉普拉斯变换、无穷级数.教材所附光盘含有数学实验和数学建模等内容.教材另附配套的练习册.出版社备有教师使用的教学辅助光盘,使用本教材的学校可向复旦大学出版社索取或到复旦大学出版社网站下载.

本教材在编写过程中得到了复旦大学出版社领导的支持,责任编辑梁玲博士进行了认真的编校.作者编写时参阅并引用了有关的纸质及网络文献,在此一并表示衷心的感谢.

由于时间仓促,加之水平有限,书中疏漏错误之处在所难免.恳切期望使用本教材的师生多提意见和建议,以便再版时修改.

编者

2015 年 6 月

目　录

第 1 章

函数与极限

函数是现代数学的重要基础，是高等数学的主要研究对象. 极限概念是微积分的理论基础，极限方法是微积分的基本分析方法. 因此掌握、运用好极限方法是学好高等数学的关键. 本章将介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的基本方法.

§1.1 函数——变量相依关系的数学模型

1.1.1 邻域

1. 集合与区间

我们已在高中数学中学过集合的有关知识，它是函数的重要基础，现代数学正是应用了集合的方法使传统数学得到更大的发展.

除了自然数集 **N**、整数集 **Z**、有理数集 **Q** 与实数集 **R** 等常用数集外，区间是高等数学中最常用的数集.

介于某两个实数之间的全体实数称为**有限区间**，这两个实数称为区间的**端点**，两端点间的距离称为区间的**长度**.

设 a,b 为两个实数，且 $a<b$，实数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为**开区间**，记为 (a,b)，即 $(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$. 而实数集 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为**闭区间**，记为 $[a,b]$，即 $[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$. 另外还有**半开区间**. 如 $[a,b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$.

除了上面的有限区间外，还有无限区间，例如：$[a,+\infty)=\{x \mid a \leqslant x\}$，$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$，$(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty<x<\infty\}=R$.

注 以后在不需要辨别区间是否包含端点、是否有限或无限时，常将其简称为“区间”，且常用 I 表示.

2. 邻域

设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为点 a 的 δ **邻域**，记

作 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x \mid |x-a|<\delta\},$$

其中点 a 叫做该**邻域的中心**,δ 叫做该**邻域的半径**,如图 1-1-1 所示.

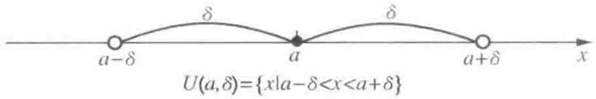

图 1-1-1

若把邻域 $U(a,\delta)$ 的中心 a 去掉,所得到的邻域称为点 a 的**去心邻域**,记为 $\mathring{U}(a,\delta)$,即 $\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$,并且称 $(a-\delta,a)$ 为点 a 的**左邻域**,$(a,a+\delta)$ 为点 a 的**右邻域**. 例如:

$$U(2,1)=\{x \mid |x-2|<1\}=(1,3),$$

$$\mathring{U}(2,1)=\{x \mid 0<|x-2|<1\}=(1,2)\cup(2,3).$$

1.1.2 函数的概念及其表示方法

1. 函数的定义[①]

定义 1 如果变量 x 在其变化范围 D 内任意取一个数值,变量 y 按照一定对应法则总有唯一确定的数值与它对应,则称 y 为 x 的**函数**,记为

$$y=f(x),x\in D,$$

① 首先使用"函数"一词的是德国数学家莱布尼兹(Leibniz,1646—1716 年). 1673 年他在一篇手稿中用"函数"(function)来表示任何一个随着曲线上的点变动而变动的量,还在 1714 年的著作《历史》中用"函数"表示依赖于一个变量的量. 在此以前,人们经常用一些变量和运算符号书写成简单的表达式来表示函数,并认为函数必须有解析表达式. 而牛顿从 1665 年开始研究微积分起,就一直用"流量"来表示函数.

函数记号 $f(x)$ 是瑞士数学家欧拉(Euler,1707—1783 年)1734 年引入的.

法国数学家柯西(Cauchy,1789—1857 年)在 1821 年的《分析教程》中给出了函数的定义:"在某些变数间存在着一定关系,当一经给定其中某一变数的值,其他变数的值可随之确定时,则将最初的变数叫做自变量,其他各变数叫做函数."

德国数学家狄利克莱(Dirichlet,1805—1859 年)在一篇讨论函数的文章中,称"如果对于 x 的每一个值,y 有一个完全确定的值与其对应,则 y 是 x 的函数". 该定义抓住了函数的实质:x 与 y 之间存在一个确定的数值对应关系(法则). x 与 y 间只需有一个确定的数值对应关系(法则)存在,不论这个关系(法则)是公式、图像、表格或其他形式,y 就是 x 的函数,从而使函数概念从解析式的束缚中挣脱出来,扩大了函数概念的内涵.

后来,德国数学家戴德金(Dedekind,1831—1916 年)和德国数学家韦伯(Weber,1842—1913 年)把集合论引入函数定义,分别用"集合"与"映射"和"集合"与"对应"来定义函数,从而构成了近代函数的概念.

中国数学史中的"函数"一词,是我国清代数学家李善兰引入的. 他在 1859 年翻译《代数学》一书时,把 function 译成了"函数",并给出定义:"凡式中含天,为天之函数."

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，D 为函数的**定义域**.

对于 $x_0 \in D$，按照对应法则 f，总有确定的值 y_0 与之对应，称 $f(x_0)$ 为函数在点 x_0 处的**函数值**，记为

$$y_0 = f(x_0) \text{ 或 } y\big|_{x=x_0}.$$

当自变量 x 取遍定义域 D 内的各个数值时，对应的变量 y 全体组成的数集称为这个函数的**值域**.

函数的定义域 D 与对应法则 f 称为函数的两个要素，两个函数相等的充分必要条件是定义域和对应法则均相同.

函数的定义域在实际问题中应根据实际意义具体确定，如果讨论的是纯数学问题，则使函数的表达式有意义的实数集合称为它的定义域，即自然定义域.

2. 函数的表示方法

函数的表示方法有 3 种：

(1) 解析法(或公式法)：将 x 与 y 的函数关系用它们的代数等式表示.

(2) 图像法：将 x 与 y 的函数关系用直角坐标系中的曲线(直线)表示.

(3) 表格法：将 x 与 y 的函数关系用一个二维表格的数据表示.

例 1　设 $y = f(x)$ 的定义域为 $[0,3a]$ $(a > 0)$，求 $g(x) = f(x+a) + f(2x-3a)$ 的定义域.

解　设 $u = x + a$, $v = 2x - 3a$，有

$$f(x+a) = f(u),\ f(2x-3a) = f(v).$$

因为 $f(x)$ 的定义域 $= [0,\ 3a]$，所以有下面的求解.

(1) $0 \leqslant u \leqslant 3a$，即 $0 \leqslant x + a \leqslant 3a$，有 $-a \leqslant x \leqslant 2a$，即 $f(x+a)$ 定义域 $D_1 = [-a,\ 2a]$；

(2) $0 \leqslant v \leqslant 3a$，即 $0 \leqslant 2x - 3a \leqslant 3a$，有 $\frac{3}{2}a \leqslant x \leqslant 3a$，即 $f(2x-3a)$ 定义域 $D_2 = \left[\frac{3}{2}a,\ 3a\right]$. 于是 $g(x)$ 的定义域为

$$D = D_1 \cap D_2 = [-a,\ 2a] \cap \left[\frac{3}{2}a,\ 3a\right] = \left[\frac{3}{2}a,\ 2a\right].$$

1.1.3　函数的性质

1. 函数的奇偶性

定义 3　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，对于任意 $x \in D$，

(1) 恒有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；

(2) 恒有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

几何上,偶函数的图形关于 y 轴对称(如图 1-1-2(a) 所示),奇函数的图形关于原点对称(如图 1-1-2(b) 所示).

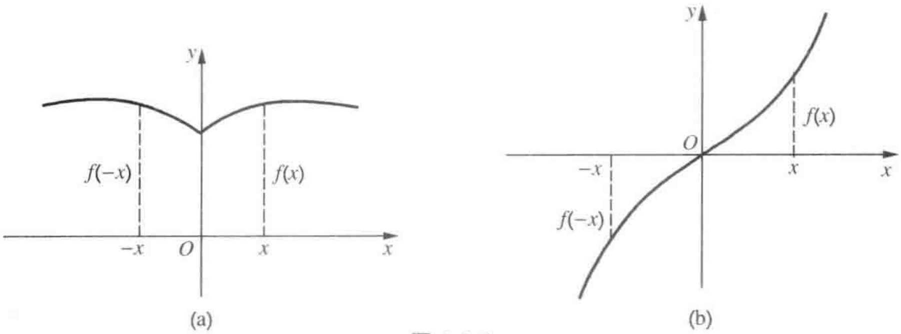

图 1-1-2

例 2 判断函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性.

解 因为函数定义域为$(-\infty,+\infty)$(即关于原点对称),且

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1}) = \ln(-x+\sqrt{x^2+1}) \\ &= \ln\frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}} = \ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \\ &= -\ln(x+\sqrt{x^2+1}) = -f(x). \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

2. 函数的单调性

定义 4 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$,对于任意 $x_1,x_2\in I$,

当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 上是**单调增加函数**(如图 1-1-3(a) 所示);

当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 上是**单调减少函数**(如图 1-1-3(b) 所示).

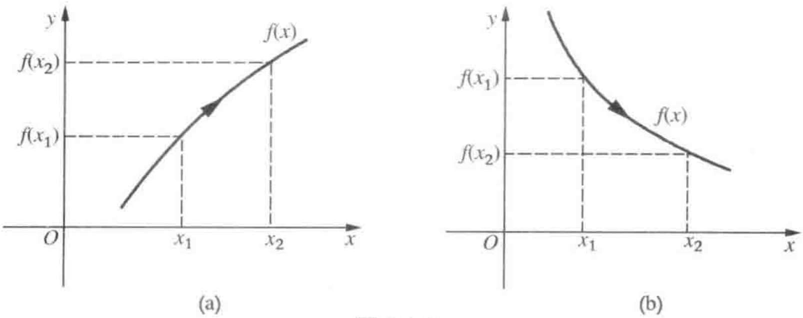

图 1-1-3