

变分渐近理论

及在复合材料结构性能分析中的应用

BIANFEN JIANJIN LILUN

JI ZAI FUHE CAILIAO JIEGOU XINGNENG FENXI ZHONG DE YINGYONG

钟铁峰 / 著



科学出版社

变分渐近理论及在复合材料 结构性能分析中的应用

钟轶峰 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书基于变分渐近法提出一种复合材料层合板壳热弹耦合宏-细观统一本构模型,并用其分析非线性后屈曲和模态跃迁现象。细观尺度下基于单胞变分渐近均匀化方法预测材料的均匀化性能参数;宏观上基于变分渐近法,利用板壳固有小参数将热弹耦合问题巧妙地解耦为沿厚度方向的一维分析和二维平板壳分析。在不引入任何假设的前提下实现使役条件下复合响应行为的拟实计算和性能预测。研究成果可促进数学、力学和材料科学的综合交叉和有机融合,揭示层合板壳的多场耦联机理及物理本质,为其损伤分析、优化设计和智能控制打下坚实的基础。

本书既可作为高等工科院校力学专业的教材或教学参考书,也可作为从事复合材料结构性能研究的技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

变分渐近理论在复合材料结构性能分析中的应用 / 钟铁峰著. —北京:科学出版社, 2015.5

ISBN 978-7-03-044444-4

I. ①变… II. ①钟… III. ①复合材料-结构性能-分析方法 IV. ①TB33

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 110225 号

责任编辑:杨 岭 朱小刚 / 责任校对:葛茂香

责任印制:余少力 / 封面设计:墨创文化

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

四川煤田地质制图印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015年5月第 一 版 开本:B5 (720×1000)

2015年5月第一次印刷 印张:10

字数:200千字

定价:59.00元

前 言

复合材料具有质量轻、可设计性强、力学性能和物理性能良好等特点,在航空航天、机械、土木工程领域有广泛的应用。除承受各种复杂载荷外,复合材料结构还受温度等环境因素的影响,这些环境因素通过各种不同的机制对复合材料的力学性能产生影响,对复合材料及其结构在热力耦合条件下的性能表征和损毁机理的研究需求日趋迫切。因此,对复合材料及其结构进行多尺度建模与计算,可以更加准确地表征复合材料的性能及预报材料在一定工况下的响应规律,为依赖于微结构材料性能优化提供有利的支持,使我们可以基于多尺度计算,在材料制备前进行加工工艺和微结构设计。

在众多跨尺度计算机方法中,变分渐近分析方法是一种适用于周期性构造复合材料性能表征与结构分析的通用、高效、精确的方法。其基本思想是,材料性能的计算和预测沿着从细观到宏观这一过程,采用均匀化方法,由细观尺度下的单胞计算出宏观材料的均匀化性能参数;而结构物理、力学行为的计算与预测则是从宏观平均场方程出发,利用变分渐近展开技术,计算出宏观尺度下的物理、力学量。本书基于变分渐近分析方法计算复合材料热力有效性能,以及预测由该材料构成的层状板壳结构在热力载荷下的响应规律。该方法既能够考虑细观结构特征对宏观性能的影响,又能够在结构分析中获得宏观应力、应变场的同时,获得细观应力、应变场,为复合材料层状结构优化设计和损伤分析打下良好的基础,研究成果具有重要的理论意义和工程应用价值。

第一,本书基于变分渐近均匀化方法建立复合材料热弹性细观力学模型。从非均质连续体控制热弹耦合问题的总能量泛函入手,采用场变量波动函数代替能量泛函细观位移函数中的系数作为未知量,将细观和宏观两种尺度之比作为小参数对该未知量进行渐近分析,得到场变量相应的渐近展开式,从而将细观均匀化及局部涨落问题转换为约束条件(位移、温度场在子胞边界上的连续条件)下泛函最小化——取驻值求解波动函数问题;将该方法与有限元方法相结合推导出离散形式泛函的最小化求解过程。应用该模型分析典型复合材料的有效属性和非均质扰动局部场。通过与细观力学有限元法的结果和试验值对比分析表明,在保证计算精度不变的前提下,构建的模型可大大提高计算效率,并可考虑纤维复杂截面形状和排列方式对复合材料热机性能的影响。

第二,基于变分渐近法构建热机载荷下的复合材料层合板热弹性模型。原三

维非线性热弹性问题由一组定义在参考面的固有变量和法线方向的任意变形进行表述；利用变分渐近法将三维热弹耦合问题严格解耦为两个问题：沿参考面的二维板非线性分析（全局响应）和沿厚度方向的一维分析（提供二维广义本构关系和重构关系）；为便于工程实际应用，将渐近修正到二阶的自由能转换为与各向同性、均质板等效的 Reissner-Mindlin 模型形式。通过若干算例表明，重构的三维场分布精度可与精确解相媲美，计算量仅与一阶剪切变形理论相当，验证了三维场分布理论和方法的准确性和有效性。

第三，基于变分渐近法构建机械、热、电载荷下的压电复合材料圆柱壳热压电弹性模型。提出一种新颖的三维非线性热压电弹性单向耦合问题的求解方法，该方法和模型具有数学的严谨性和工程应用的简便性。主要内容包括：利用变分渐近法将原三维热压电弹性耦合问题严格拆分为两个问题：二维壳面非线性分析（全局响应）和沿厚度方向的一维分析（提供广义本构模型和重构关系）；为考虑初始曲率和横向剪切变形，将降维模型的渐近修正电热焓转换为 Reissner-Mindlin 模型形式；建立重构关系得到沿厚度方向的三维场分布。通过若干算例表明，重构三维场分布的精度可与精确热压电弹性解相媲美，所需计算量仅与一阶剪切变形理论相当，在准确性和有效性间取得较好的折中结果。

第四，基于变分渐近法构建层状功能梯度板的高精度力学模型。利用厚度相对基准面变形特征波长很小的几何特征，采用变分渐近法将原三维、各向异性弹性问题严格解耦为沿厚度方向的一维分析和二维板分析。通过厚度方向分析可提供本构关系以及三维场重构关系，将原复杂的三维弹性模型简化为简单的二维板模型，并推导满足层间界面上位移连续性条件及自由边界条件的解析解。整个推导过程无须使用先验性位移基假设。所构建的模型可考虑大位移小应变和全局旋转等几何非线性因素，并通过若干算例进行验证。

第五，基于渐近修正几何非线性理论，采用 Galerkin 法研究均匀升温场下复合材料层合板的热后屈曲、热屈曲前大振幅振动、模态跃迁以及热后屈曲静平衡构形附近的线性振动问题。主要内容包括：基于构建的变分渐近多尺度模型推导出以法向挠度、转角以及 Airy 应力函数表征的智能材料板壳结构在多场耦合下的广义 Kármán 型大挠度方程（双耦合四阶非线性动态控制偏微分方程，PDEs）；通过双 Fourier 级数将双耦合非线性控制方程转换为系列非线性常微分方程组，从而得到相对简洁、明确的模态交互表达式；采用无量纲化方法对各系数存在属性和数量级的差异进行归一化处理；使用广义 Galerkin 方法建立典型面内、面外边界条件下相对简便的临界屈曲载荷求解方法；通过局部线性化非线性动态系统和求解相关的特征值问题得到稳定主后曲和跃迁平衡路径上小幅自由振动的固有频率；给出以中心无量纲挠度和广义载荷表征的后屈曲平衡路径，从而确定模态跃迁前后稳定平衡路径的判定准则；研究多模态交互效应对模态跃迁的影响。

本书的主要内容已对重庆大学土木工程学院等有关专业的研究生讲授过十多

遍，收到良好效果。在编写过程中还得到了教研室教师们的大力支持，在此谨向他们表示衷心的感谢。

本书第 1~8 章由钟轶峰执笔。矫立超、杨文文、秦文正、李潇等研究生参加了审校工作。

限于水平，书中错误与不妥之处在所难免，恳请广大同行和读者指正。

作 者

2014 年 12 月于重庆大学

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 研究背景	1
1.2 复合材料及其结构的力学特点	3
1.3 研究现状	4
1.3.1 细观力学研究现状	5
1.3.2 宏观力学方法研究现状	7
1.4 课题的提出及研究意义	11
1.5 课题研究的特点和创新点	12
1.5.1 项目特色	12
1.5.2 创新之处	12
1.6 主要研究内容	13
第 2 章 理论基础	15
2.1 变分渐近法概述	15
2.1.1 渐近分析基本概念	16
2.1.2 变分渐近法运算规则	17
2.2 旋转张量分解概念	25
2.3 板壳几何非线性剪切变形理论	28
2.3.1 Hamilton 扩展原理	29
2.3.2 板壳运动学	30
2.3.3 协调性方程	31
2.3.4 全局位移和旋转变量	32
2.3.5 二维本构关系	36
2.3.6 虚拟应变一位移关系	36
2.3.7 平衡方程	38
2.4 本章小结	42
第 3 章 复合材料热弹性变分渐近均匀化细观力学模型	43
3.1 理论公式	44
3.2 细观问题的有限元求解	47
3.3 算例	49

3.3.1	局部应力场	49
3.3.2	热膨胀系数	51
3.3.3	有效比热	53
3.3.4	局部热应力场	54
3.4	本章小结	55
第4章	复合材料层合板基于变分渐近法的热弹性分析	57
4.1	三维能量方程	58
4.2	降维分析	62
4.2.1	零阶近似	62
4.2.2	一阶近似	63
4.2.3	Reissner-Mindlin 模型转换	64
4.2.4	重构关系	66
4.3	算例	67
4.3.1	各向同性板的柱形弯曲解析解	67
4.3.2	复合材料板的柱形弯曲问题	69
4.3.3	振动特性分析	75
4.4	本章小结	78
第5章	压电复合材料层合壳基于变分渐近法的热压电弹性分析	79
5.1	三维能量方程	80
5.2	降维分析	85
5.2.1	Reissner-Mindlin 模型转换	88
5.2.2	重构关系	89
5.3	算例	90
5.4	本章小结	94
第6章	功能梯度复合材料层合板基于变分渐近法的广义 Reissner-Mindlin 模型	95
6.1	三维能量方程	96
6.2	降维过程及近似能量推导	101
6.2.1	零阶近似	101
6.2.2	一阶近似	103
6.2.3	Reissner-Mindlin 模型转换	105
6.3	三维场重构关系	106
6.4	算例	109
6.4.1	模型参数	109
6.4.2	数值分析与讨论	110
6.5	本章小结	115

第 7 章 复合材料层合板的热后屈曲和模态跃迁分析	116
7.1 渐近修正几何非线性板理论	118
7.2 解析解	120
7.2.1 复合材料层合板控制微分方程	121
7.2.2 边界条件	122
7.3 转换为非线性常微分方程	123
7.3.1 角铺设层合板	123
7.3.2 正交铺设层合板	125
7.3.3 屈曲和后屈曲分析	127
7.4 算例与讨论	128
7.4.1 模型验证	128
7.4.2 线性屈曲分析	129
7.4.3 准静态非线性分析	130
7.4.4 热屈曲前后线性振动分析	133
7.5 本章小结	135
本章附录	136
第 8 章 结论及建议	140
8.1 结论	140
8.2 建议	142
参考文献	143
致谢	149

第 1 章 绪 论

1.1 研究背景

复合材料是由两种或两种以上不同性质材料用物理或化学方法组成的新性能多相材料,其细观构造和复合机理非常复杂,存在不少力学问题。复合材料不但能保持其组分材料的主要优点,克服或减少其缺点,还可产生组分材料所没有的一些优越性能。复合材料微结构特征使其具有质量轻、可设计性强、力学性能(强度、刚度、热膨胀系数)和物理性能(导电、导热、隔音、耐腐蚀)良好等特性,复合材料在航空航天、机械、土木工程等不同工程技术领域得到广泛应用。复合材料是关系到我国能否顺利实现第三步战略目标的关键新材料集群。在未来的 5~10 年,我国经济、社会及国家安全对复合材料有着巨大的需求。目前,复合材料已成为我国材料科学和工程中最具活力与创新性的热点;有关复合材料的研究项目占整个新材料研究项目的 70%以上。

我国是复合材料的生产和使用大国,但却不是强国,一些高科技产品长期被发达国家所禁运和垄断,因此深入研究复合材料的任务刻不容缓。为获得更高的功能指标以及满足器件微型化的需要,目前国际上的发展趋势是将复合材料制备成层状结构,即由两层或两层以上的单层按某种铺设方式粘合而成的受力结构元件。例如,挑战者号航天飞机 1986 年 1 月失事后,研究人员对助推器连接接头的前、后连接裙采用石墨纤维/环氧树脂复合材料重新进行了设计;我国长征系列运载火箭的整流罩前圆锥段和圆柱段均由按照 $[90^\circ, 0^\circ, \pm 45^\circ]$ 铺层设计的 4 块碳(T300)/玻璃纤维复合材料壁板构成(图 1.1);美国阿里安 4 双星发射外支架(SPELDA)的圆筒段和圆锥段由 3 块 24 层蒙皮的蜂窝壁板拼接而成,每层蒙皮均由 $[0^\circ, +60^\circ, -90^\circ, -60^\circ, 0^\circ]$ 铺层设计的环氧树脂(69 号)预浸的碳(HMS)复合材料铺设而成。因此,复合材料及其技术结构在国防、军事等领域的应用具有十分重要的意义,有专家预测复合材料将成为 21 世纪结构的支柱性材料。

复合材料综合了不同材料的优点和长处,其力学性能的研究必须借助细观力学。复合材料可看做宏观和细观两个层次的材料。在宏观上,有全局应力、应变、弹性模量等;在细观上,有纤维的应力、应变、弹性模量等。对复合材料力学的研究,不仅需要了解复合材料的宏观等效性能,还需要了解其局部性能。由于复合材料是一种典型的多相介质,组分材料的性能、夹杂的形状、几何尺寸、

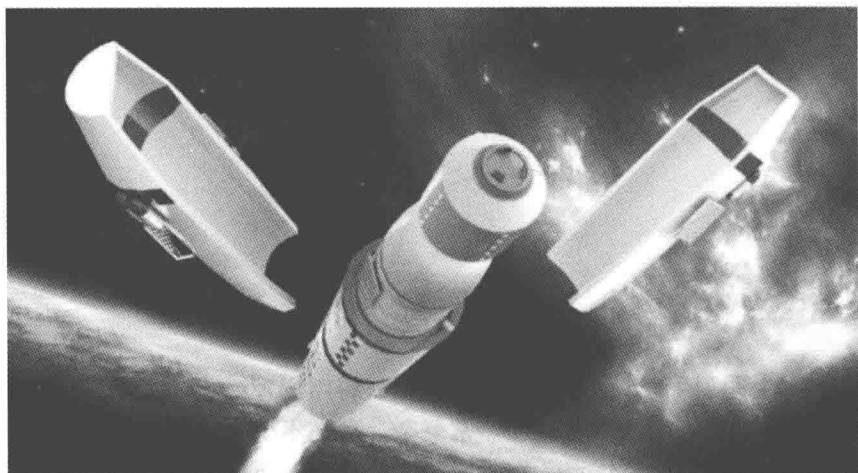


图 1.1 长征系列运载火箭中的整流罩前圆锥段和圆柱段示意图

分布等都会影响其宏观性能。摆在人们面前的问题不仅是准确预测复合材料的宏观力学性能，更重要的是通过细观力学的理论和方法，进一步探求其局部的力学行为。因此，复合材料细观力学的核心任务是建立复合材料结构宏观性能和组分性能及其细观结构的定量关系，并揭示复合材料结构在一定工况下的响应规律及其本质，并回答诸如为什么该种复合材料具有如此高的强度、刚度、断裂韧性等问题。同时，它主要的研究背景还在于：根据工程需要选取合适的组分材料，设计最优的复合材料结构。对于传统金属材料来说，可针对不同的材料测得其宏观材料性能，并列表以供选择；对于复合材料来说，其组分材料、含量、细观结构等参数稍有变化就会产生不同的宏观性能，因此，试图通过实验测得所有材料组合的性能是不现实的。从这一角度看，复合材料细观力学是有工程背景的，是复合材料发展的重要理论基础。

由上述应用实例分析可知，复合材料在工程中的应用大多以层合结构为主，即由两层或两层以上的单层按某铺设方式粘合成受力结构元件，每层的材料、厚度和弹性主方向等可以互不相同(图 1.2)。一般情况下，层合材料的力学性能沿厚度方向按梯度分段不连续变化。一方面，由不同物理性质和几何尺寸的单层组成的层合材料具有最一般的各向异性性质；另一方面，这种层合材料在厚度方向上具有宏观的非均匀性和力学性质的不连续性。

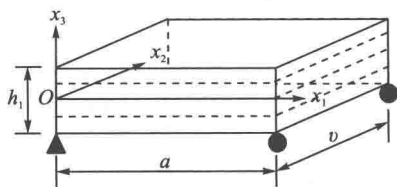


图 1.2 复合材料层合板示意图

除承受各种复杂的载荷外,复合材料层合结构的性能还受各种环境因素(主要包括温度、湿度等)的影响,这些环境因素通过各种不同的机制对复合材料的力学性能产生影响。当其在湿热环境下用作承载构件时,复合材料层合结构的强度预测显得尤为重要,其强度性能的评估是应用复合材料层合板壳时所必须解决的关键性问题之一,是安全可靠、合理经济地使用复合材料层合板壳的基础。尽管这些铺层结构截面几何形状简单,但内部结构非常复杂,可由任意铺层倾角的复合材料构成。复合材料铺层设计的灵活性为结构的应力计算、变形分析以及强度预测带来额外的复杂性,而这些性能对于合理设计层合板、提高层间剪切强度、扩大应用范围和确保使用安全是非常重要的课题。结构设计人员和工艺研究人员迫切需要获得这些铺层结构精确的强度和刚度特性数据,以充分了解并掌握这种新型结构材料。因此,极端环境和热机耦合下复合材料层合板壳结构服役行为的力学建模与数值模拟等具有共性的科学问题是目前亟须解决的问题,而计算力学传统理论和算法难以有效地对这些问题进行处理,必须发展新的结构分析与设计建模理论和数值方法。

本书以由单层复合材料叠合而成的复合材料板壳的热弹耦合性能为研究对象,基于变分渐近法构建一种可靠、高效和应用范围广的复合材料细-宏观统一的本构关系和热弹耦合分析模型,并将其用于后屈曲性能和模态跃迁分析中。为工程设计人员准确掌握这类板壳的结构性能提供理论分析方法和相关的计算程序,研究成果可促进数学、材料和力学的综合交叉及有机融合,并可揭示复合材料层合板壳热弹耦合响应机制,为其优化设计、智能控制和推广应用提供理论依据和技术支撑。

1.2 复合材料及其结构的力学特点

复合材料及其结构具有以下力学特点:

(1)各向异性。纤维增强复合材料在弹性常数、热膨胀系数和材料强度等方面具有明显的各向异性性质。通过铺层设计制成的复合材料层合结构,可能出现各种形式和各种程度的各向异性。这一特性将使复合材料及其结构的力学问题复杂化。对于正交各向异性和横观各向同性的力学问题,相对于各向同性情况比较复杂,但没有太大的困难。复合材料在强度和刚度方面的各向异性将会使断裂、疲劳损伤和强度理论复杂化,也使复合材料的应力分析、变形、稳定和振动等问题复杂化。完全各向异性有 21 个独立的弹性常数;当有一个对称面时,有 13 个独立弹性常数;正交各向异性,即有 3 个相互正交的弹性对称面时,有 9 个常数;对于多层复合材料宏观而言,其横向的弹性性能均相同,这种情况称为横向同性,这时有 5 个独立弹性常数;各向同性时,共有 2 个独立弹性常数。

(2)不均匀性和不连续性。复合材料的单向层片是由纤维和基体组成的,它在细观构造上是不均匀的。复合材料层合结构除层片之间存在这种不均匀性外,沿厚度方向又增加了一重不均匀性。短纤维三向杂乱增强的复合材料即使在宏观上可以近似地被看成是均匀的各向同性材料,但在细观上还是存在明显的不均匀性。而且在不同的细观层次和尺度下,会出现不同程度的不均匀性。材料的不均匀性可使细观的应力和应变不均匀,材料就可能有在应力最大或强度最低或最为薄弱的局部发生破坏。不均匀性尤其是不连续性,再加上各向异性等因素,使得局部应力集中和应变集中问题变得非常复杂,使连续介质力学的原理和方法不能完全适用,使基于连续介质力学的强度和刚度分析产生明显的误差。由于这种不均匀性和不连续性是不规则的和随机分布的,因此它还需用统计理论和概率论的方法进行分析,来发展统计强度理论和概率细观结构力学。不均匀性和不连续性对强度的影响要比对刚度的影响更大,这是因为应力和强度是由局部量决定的,而刚度和弹性模量是纤维和基体的平均表现,是由整体决定的。故刚度可以采用有效刚度和有效模量的概念,而强度问题却因为许多因素还弄不清楚或不确切而显得相当复杂和困难。

(3)几何非线性和物理非线性。由于复合材料具有比强度高、比刚度大和抗疲劳性能好等优点,因此常做成板壳结构形式,在横向载荷作用下允许较大的变形,产生了几何非线性。复合材料在整体应变或局部应变较大时,剪切模量和横向拉、压模量等由基体性能控制的模量会出现比较明显的物理非线性。以聚合物为基体的复合材料,有时还要考虑黏弹性。对于金属基复合材料,也存在着弹塑性变形和蠕变问题。复合材料的物理非线性问题与纤维和基体的种类、性能有关。对于单向复合材料,在纤维方向的拉伸性能主要由纤维控制并接近线弹性,纤维方向的压缩性能和基体的性能有密切的关系,往往不是线弹性的。横向拉、压性能和剪切性能则是由基体控制的,其本构关系一般是非线性的,只有在应变较小时可近似地看做线性的。复合材料的非线性主要是由基体的塑性变形及基体内部和边界上的缺陷损伤等因素造成的,与纤维性能和断裂也有关系,因此是很复杂的。

由上述分析可知,对于复合材料及其结构力学问题的研究,在考虑材料参数、几何参数、时间因素、工艺因素、随机因素和环境因素等的情况下,还要对各向异性、不均匀性、不连续性、沿厚度方向剪切变形和拉压变形的影响、几何非线性和物理非线性等方面加以考虑,求解问题的难度非常大。因此,在求解问题时需做一定的简化。

1.3 研究现状

复合材料既具有宏观特征,又具有细观特征。复合材料力学是一种具有宏

观、细观两个层次的力学理论。常规复合材料力学研究方法有两种：一种是宏观力学方法；另一种是细观力学方法。

1.3.1 细观力学研究现状

作为固体力学与材料力学的交叉学科，细观力学可以协调这两门学科各自建立的方法。除连续介质理论、计算力学和实验力学外，细观力学还汲取了固体物理理论(如位移理论、高分子)、显微测量技术和近代物理量测技术。细观力学本身也不断产生新的研究方法，如缺陷理论、均匀化理论等，并大大促进了数学、物理、力学和材料科学的发展。细观力学的研究方法包括固体力学的基本理论、材料的优化设计、微观界面力学和微电子元件等领域。

为揭示复合材料微细观特性对其宏观性能的影响，许多材料和力学工作者从细观出发，逐渐发展了较为系统的细观力学方法，解决了一些理论和实际问题，但预测材料性能、损伤等的研究理论及方法仍不完善，存在较多的问题尚未解决。近十年来，这一领域十分活跃，特别是随着高性能计算机和先进数值模拟技术的飞速发展，出现了不少新的研究方法和手段，使得预测材料通用性和材料设计成为可能。目前，预测复合材料等效性能方法可分为如下三种。

(1)直接法。直接法是以复合材料有效弹性常数的定义为基础，利用分析手段直接计算复合材料各相内应力和应变场的平均值，由宏观本构关系得到复合材料的有效弹性常数张量。

(2)界限方法。界限方法给出不同体积分数时有效性能的上限和下限，许多界限方法与平均场方法密切相关。界限方法主要有 Voigt 界限^[1]、Reuss 界限^[2]、Hashin-Shtrikman 界限^[3]和 Milton 界限^[4]。根据 Voigt 等应变假设和 Reuss 等应力假设，可推导出有效体积模量和剪切模量，用最小势能原理和最小余能原理可证明其分别对应于真实弹性解的上、下限。

(3)近似法。预测复合材料弹性刚度张量的直接法需要细观应力、应变场的知识，但对于细观结构比较复杂的问题，细观应力、应变场的求解十分困难。因此，需要某种方法来获得细观应力、应变场的近似解，以求得复合材料弹性性能的近似结果。近似方法多种多样，其中具有一定理论基础的方法有随机统计法、自洽法、广义自洽法、Mori-Tanaka 法(有效场方法)以及微分方法等。

自洽理论(self-consistent method)的思想是由 Bruggeman 在研究热传导问题时引入的，当时称为有效介质法。真正将自洽理论用于复合材料等效弹性模量求解的是 Hill^[5,6]和 Budiansky^[7]，Budiansky 推导出含球夹杂多相复合材料的有效体积模量、剪切模量和泊松比三个耦合方程。自洽方法考虑夹杂与有效介质之间的相，所使用的模型是在一个无限大的均质介质中含单一夹杂模型，均质介质的弹性性能与复合材料的有效弹性性能相等，自洽方法的基本思想就是希望在均匀

边界下的自洽模型求得夹杂相内的平均应变,从而求得复合材料的有效刚度张量。由于自洽模型仅考虑单夹杂与周围有效介质的作用,因而当夹杂体积分数过高时,预测的有效弹性模量过高(含硬夹杂)或过低(含软夹杂)。特别是当夹杂与基体的弹性常数相差较大时,这一偏差更加显著。

为了克服自洽方法的弱点, Kerner^[8]提出了广义自洽模型。用广义自洽方法确定复合材料的有效弹性刚度同自洽方法的思想相同,只是广义自洽模型是在自洽模型中的均匀介质与夹杂之间加一层基体材料壳,不让夹杂和均匀介质直接联接,该方法被成功用于复合材料的弹性性能,但这种模型也使解题难度提高。

1973年 Mori 和 Tanaka^[9]、Benveniste^[10]从平均应力的概念出发对非均质材料的等效弹性提出了一个近似计算方法,由于这种方法运算简单,同时在一定程度上计及复合材料中夹杂相之间的相互作用,近年来得到广泛应用。但这一方法中的 Eshelby 张量是基于嵌入无限大基体的单个夹杂建立的,而对于具有有限体积分量的复合材料来说,包围它每一个夹杂的,实际上是基体与其他夹杂的混合体,因此 Mori-Tanka 法计及夹杂相之间的相互作用较弱。

由于复合材料的高度不均质性,分析包括每个微结构问题是非常困难的。为克服这一难题,就必须找出某种无须将每个微结构都表示出来的等效材料模型。这一模型应当表征材料的平均力学性能,同时要表征不均质性。细观力学的研究不仅是材料性能的理论预测,还有一个很重要的内容是确定物理量和力学量由于细观上的不均匀性引起的在细观层次上的分布情况变化,以上所述的方法虽然建立了复合材料细观量与宏观量的关系,但不能给出局部场细节。20世纪70年代出现了均匀化理论^[11],用于分析两个或更多个长度尺寸的物理系统。80年代该理论得到进一步发展,均匀化方法在物理及其工程领域得到广泛应用。事实上,力学和物理的连续介质假设可认为是均匀化理论的一种,把材料看成由原子或分子组成^[12]。均匀化理论是一套严格的数学理论,该方法用均质的宏观结构和非均质的具有周期性分布的细观结构描述原复合材料结构:将力学量表示成关于宏观坐标和细观坐标的函数,并用细观和宏观两种尺度之比为小参数展开,用摄动技术将原问题化为细观均匀化问题和宏观均匀化问题。对这些问题的求解给出具有细观非均质结构复合材料的有效性能,并给出非均质扰动的局部应力场。

上述方法大多基于某些特定的假设,因此都有其特定的适用范围,有待进一步完善,有的模型计算结果有一定的偏差。此外,虽然建立了复合材料细观量与宏观量(如位移、应力、应变、波函数等)的关系,但只能给出这些量变化的大致趋势和均匀化平滑结果,并不能描述这些量因组分变化而产生的局部涨落(图1.3)。要作为复合材料强度理论的判断依据,这显然是不够的。

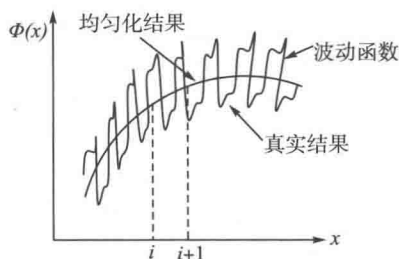


图 1.3 均匀化结果与真实情况比较

1.3.2 宏观力学方法研究现状

复合材料和结构系统具有各向异性、非均质、几何非线性和强热弹耦合等性质,理论求解难度较大,精确求解几乎是不可能的,各国研究人员利用板壳厚度 h 相对参考面上的变形 l 很小的特点,将板的厚度坐标作为独立变量从控制偏微分方程中除去,用各种简化的模型或者近似的数值方法进行分析,取得许多有价值的研究成果。下面分别就理论模型、求解方法以及后屈曲分析等方面进行介绍。

1. 理论分析模型

在理论分析中,研究者习惯将力学中的各种理论模型(如板壳理论以及连续介质理论)做适当修正。依据研究对象不同,所做的假设也有差别,主要是对场变量(热、位移)的选取和近似假设不同,因而都有一定的适用范围。

对温度(热)的处理,一般都不考虑结构变形对温度的影响,这也不是真正意义上的耦合效应。正因为如此,对温度的处理相对简单一些,可以通过直接求解独立的热传导方程得到,而且大多数只考虑一维热传导^[13]。有的学者则干脆认为温度是恒温的^[14]或线性变化的,在整个求解区域上,不考虑热传导。

对位移的处理方式和所采用的理论模型主要有以下几种:

(1)经典层合理理论(CLT)。由三维弹性理论推导出的、基于 Kirchhoff 薄板假设的经典层合理理论是最简单的板壳分析理论。Whitney 基于经典层合理理论研究了湿热效应对复合层合板弯曲、屈曲和振动的影响。沈惠申在宏—细观力学模型框架下,基于经典层合壳理论建立了包括湿热效应的壳体控制方程,讨论了湿热环境对复合材料层合圆柱薄壳在轴向压缩作用下屈曲和后屈曲行为的影响;Shaw^[15]和 Altay^[16]应用经典层合理理论分析了功能梯度材料的热残余应力和自由振动问题。该理论适用于各向同性的薄板分析,但对中厚板而言,由于假定变形前后中面的法线保持直线,且垂直于中面,忽略了横向剪切变形,将会导致较大的误差。其位移模式为

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0(x_1, x_2) - z \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \\ v &= v_0(x_1, x_2) - z \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \\ w &= w_0(x_1, x_2) \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

式中, u_0 、 v_0 、 w_0 分别表示板中面上点沿 x 、 y 、 z 方向的位移分量。

(2)一阶剪切变形理论(FOSDT)。这一理论适用于较厚板壳、可考虑横向剪切的一阶剪切变形, Cho Y B^[17]和 Cho M^[18]等基于一阶剪切变形理论计算了湿热环境下复合层合板的屈曲荷载,但模拟薄板弯曲时数值计算结果严重失真,产生“剪切锁死”或“横剪自锁”现象,其原因在于总应变能中包含横向剪切应变能的项在量级上不正确,沿厚度方向变化的剪切应变线性假设与上下表面剪应力为零自相矛盾,而按三维弹性力学的结果,沿板厚度方向剪应变的变化至少是二次函数,需人为地引入由三维精确解得到的剪切因子来修正这一矛盾。其位移模式为

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0(x_1, x_2) + z\phi_x(x_1, x_2) \\ v &= v_0(x_1, x_2) + z\phi_y(x_1, x_2) \\ w &= w_0(x_1, x_2) \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

为克服一阶剪切变形理论的局限性,各国学者进行了深入研究,提出了几种新的板分析理论。

①高阶理论(HSDT)。高阶剪切变形理论将厚度坐标和面内变量分离,通常在厚度方向取三次多项式,使得板的挠度与厚度坐标无关,其中最具代表性的 Reddy 理论^[19,20]的初始位移模式为

$$u = \sum_{i=0}^3 z^i u_i(x_1, x_2), v = \sum_{i=0}^3 z^i v_i(x_1, x_2), w = w_0(x_1, x_2) \quad (1.3)$$

数值结果表明, Reddy 理论结果精度明显高于一阶剪切变形理论。由于 Reddy 理论为单层理论,未考虑层间应力连续条件,因此不能直接应用本构方程计算层间应力,必须使用三维平衡方程来获得准确的横向剪切应力和法向正应力。

②锯齿理论(ZZT)^[21]。理论上,层间沿厚度方向的面内位移应该是 C_0 连续的,即在层间面内位移应该出现拐点(类似锯齿状)。Murakami 在已知等效单层板理论位移模式中加入锯齿函数巧妙地解决了这个问题,可获得满足层间连续的等效单层板理论,其位移模式为

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{i=0}^m z^i u_i(x_1, x_2) + M(z)u_m(x_1, x_2) \\ v &= \sum_{i=0}^m z^i v_i(x_1, x_2) + M(z)v_m(x_1, x_2) \\ w &= \sum_{i=0}^2 z^i w_i(x_1, x_2) \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

式中, m 取不同值可得到不同的锯齿理论; $M(z)$ 为 Murakami 锯齿函数, $M(z)$