

湖南师范学院数学函授专修科讲义

平面几何学

(上册)

罗 晴 江 編

湖南人民出版社

湖南师范学院数学函授专修科讲义

平面几何学

(上册)

罗晴江编

湖南人民出版社

编号：(湖)4817

湖南师范学院数学函授专修科讲义 平面几何学 (上册)

编者：罗 晴

出版者：湖南人民出版社

(湖南省长沙市新站路)
长沙市新站路

印刷者：湖南省新华印刷厂

(长沙市惠民门内)

发行者：湖南省新华书店

开本：787×1092 1/32

印张：5 7/8

字数：128,000

1959年9月2

1959年9月

印 数：1

第一号至7109-318

定价：(7)五角

这本讲义是为数学函授专修科的学生而编写的，分上下两册。

上册的主要内容是：系统复习初中所学过的平面几何知识；阐述一些有关几何学的构造问题以及作图和证题的方法。通过这些内容的学习，学者就能更好地理解 and 掌握初中几何教材，愉快地胜任这门课程的教学工作。

初等几何所研究的图形是直线图形和圆，因此在第一章里，我们系统阐释了有关直线和圆以及组成几何图形的一些简单基础图形的概念，作为研究几何学的开始。在这一章里，不同于中学教材的是：中学教材里，“相等（即全等）”的概念是由“移动”的概念而产生的（即用“移动”的概念来定义“相等”的概念），但是对于“移动”这个概念既未给以定义，也没有加以解释，而把它看作是显然的事实，这就造成了逻辑推证上不严谨的缺陷；这里我们不提“移动”这个概念，线段和角的“相等”概念是引用“合同”这个名词通过公理的形式来描述的，而其他任意形式图形的“相等”概念则又用这些概念来定义，这是因为以后我们将专门研究图形的移动问题，那时就可以用“相等”的概念来明确定义“移动”的概念，以求得推证时严谨的逻辑系统。此外，在这一章里，我们还设置了“有向线段”、“有向角”和“有向多边形”等概念，它们主要是为研究“图形的移动”而服务的。

基于上述概念，第二、三、四章就展开了直线图形的相等关系、平行线的理论以及圆周的性质的研究。

在第二章里，由于以前没有引用“移动”的概念，所以证明

两三角形相等时，我們也就沒有采用中学教材里所用的叠合法，而是先設置一条两三角形的合同（即相等）公理，然后用反証法来推証。这只是不同系統下所采用的不同方法，并不意味两种方法有什么矛盾的地方，因此在中学教学里，仍可而且也应按中学教材的系統和方法进行教学。

第三章平行綫的理論所含內容虽然不多，但却非常重要，因为几何图形的某些重要性質都是由这种理論推得的，如三角形和多边形的內角和的定理，圓周的确定問題以及圓周角的性質等，而且由它更建立了相似图形的全部理論。

第五章是关于几何作图的研究。在以前的几章里，几何图形的研究是在承認几何图形存在的前提下进行的，这一章則进一步解决几何图形的存在問題，因此把这一章看作是前几章的概括亦无不可。几何作图的方法很多，这里只着重介紹了与所学过的理論有关的三种方法——三角形奠基法，軌跡法和利用平行四边形的性質作图，其余的方法則将在以后学习有关章节时結合介紹。

第六、七两章分別解决几何学的結構和証題方法的問題，它們能帮助学者更好地了解 and 掌握几何学的特点。

在有关章节之末除了附有必要的練習題以外，还附有很多复习題，它們可以帮助学者及时整理所学过的教材，以达到系統消化的目的。

編写本講义的目的和系統已如前述，但由于个人的水平太低，同时缺乏編写函授講义的經驗，誠恐不但不能滿足学者的要求，甚至內容方面还存在不少缺点和錯誤，希望讀者及时予以教正。

这本講义的底稿經盛友成老师核校，并得到他的修正意見，从而减少了缺点和錯誤，深致感謝。

編 者 1959年7月

目 录

第一章	基本概念	(2)
§ 1	几何图形	(2)
§ 2	定义、公理和定理	(3)
§ 3	基本元素	(4)
§ 4	綫段、射綫、折綫和曲綫	(5)
§ 5	角	(6)
§ 6	綫段和角的相等	(8)
§ 7	多边形	(12)
§ 8	圓周、弧	(14)
§ 9	有向綫段和有向角	(15)
	复习題及习题一	(18)
第二章	图形的相等	(20)
§ 10	两三角形相等的特征	(20)
§ 11	补邻角和对頂角	(24)
	复习題及习题二	(30)
§ 12	三角形的边角关系	(31)
§ 13	多边形的周	(34)
	复习題及习题三	(35)
§ 14	垂綫和斜綫	(36)
	复习題及习题四	(41)
§ 15	两直角三角形相等的特征	(42)
§ 16	两直角三角形的边和角的不等关系	(44)
§ 17	軌迹——綫段的中垂綫和角的平分綫	(45)

复习題及习题五	(47)
§18 任意形式图形的相等	(48)
§19 两种相等的图形	(49)
复习題	(52)
第三章 平行綫	(53)
§20 平行綫的概念	(53)
§21 用直尺和三角板作平行綫、平行公理	(55)
§22 对应边互相平行或互相垂直的两个角	(58)
复习題及习题六	(60)
§23 三角形与多边形的內角和	(60)
§24 軌迹	(63)
复习題及习题七	(65)
§25 平行四边形	(66)
复习題及习题八	(71)
§26 三角形的某些性質	(71)
复习題及习题九	(74)
第四章 圓周	(76)
§27 直綫与圓周的位置关系	(76)
复习題及习题一〇	(78)
§28 两圓周的位置关系	(78)
复习題及习题一一	(84)
§29 直徑与弦的关系	(85)
§30 圓心角、弦和弧的关系	(86)
复习題及习题一二	(89)
§31 角的度量	(90)
§32 与圓周有关的角	(93)
§33 軌迹	(95)
复习題及习题一三	(96)

§34	圓的內接和外切四邊形	(97)
	複習題及習題一四	(100)
第五章	利用圓規和直尺作圖	(102)
§35	有關幾何作圖的基本概念	(102)
	複習題	(108)
§36	基本作圖	(108)
§37	較複雜圖形的作圖方法	(122)
	(1) 三角形奠基法	(123)
	複習題及習題十五	(130)
	(2) 軌迹法	(130)
	複習題及習題十六	(135)
	(3) 利用平行四邊形的性質作圖	(136)
	複習題及習題十七	(138)
第六章	幾何命題	(139)
§38	命題的組織	(139)
§39	命題的四種變化	(148)
§40	逆命題的存在問題	(156)
§41	分斷式命題	(160)
	複習題	(162)
第七章	証題方法	(164)
§42	演繹法	(165)
	複習題及習題十八	(178)
§43	歸納法	(179)
	複習題及習題十九	(183)

湖南师范学院数学函授专修科讲义

平面几何学

(上册)

罗晴江编

湖南人民出版社

第一章 基本概念

【本章的主要内容】 本章所阐释的内容主要有如下的几个方面：

1. 几何学所研究的对象及其基本元素。
2. 线段、射线、折线、角、三角形、圆周、弧等简单几何图形的概念。这些简单的几何图形都是组成较复杂的几何图形的基础。
3. 线段和角的定向问题。这是以后研究图形移置时所必须具备的知识。

把以上三个方面作为基本概念提出是因为它们是我们研究几何学所必不可少的预备知识，学者对于这些概念应有明确的認識。

§1 几何图形

把在日常生活中对某些事物观察所得的有关印象加以抽象化就可以得到体、面、线、点的概念。例如，把一个密闭的立方空盒抽象地看作是上下四周都有限界的空間的一部分就得到了体的概念；教室的墙壁与室内空間的分界处给予我们以面的概念；两个相邻墙面的公共部分叫做线；三个相邻墙面的公共部分则可以叫做点。

体、面、线、点的任意集合，一般的叫做几何图形，或者简称之为图形。

集合是近代数学所常用的概念，它表示所研究的各个元素的总体的意思。对于这个概念的意义，我們一般不用数学的语言作概括的敘述，而是用直观形象来进行刻画。例如，一盒粉笔是粉笔的集合；一班学生是学生的集合；教室里所有黑板、講桌、課桌、凳子的总体同样可以看作是一个集合；甚至于一枝粉笔，一个学生，一块黑板，一張課桌或講桌，一条凳子也都可以分別叫做一个集合。

研究几何图形的性質和它們之間的相互关系的科学叫做几何学。

§2 定义、公理和定理

几何学所采取的研究方式一般是在某些条件的限制之下，以图形自身的本質屬性和一些已知的事理为根据通过邏輯論証而推演出所研究的图形的性質和它們之間的相互关系，并且将所得的結果作成簡單扼要的科学断語。因此几何学的全部結構就是建筑在下面三个概念的基础之上的：

(1) 定义 定义是依据特性对事物的直接命名，也就是对事物的本質屬性的一种揭露。例如，命名某种科学为几何学时，我們得先揭露出这种科学最本質的屬性，就是說：“研究几何图形的性質和它們之間的相互关系的科学叫做几何学”。这种先揭露事物的本質屬性然后直接命名的过程叫做給事物的概念下定义。

(2) 公理 对于任何一种断語我們总要求有已知的事理作証明。但是也有一些断語，它們的真实性可以凭經驗来直接檢驗，因而不加証明即被直接采用，这种断語叫做公理。例如，“等于同一个量的两个量是相等的”是一件不加証明而能得到承

認的事理，所以叫它做公理。

(3) 定理 通过邏輯推理而得到承認的断語叫做定理。从一个定理立刻可以推出的另一断語叫做这个定理的系。

上述三种断語統称为命題。断語既是观察、研究事物(图形)的性質和它們之間的相互关系所得的結果，而事物发展的結果必須以一定的条件为依据，如果离开了一定的条件而空談結果，那就没有什么意义了，因此，所作的断語除了說明所得的結果之外，还必须包括产生这个結果的某些条件。这就是說，命題必須包含如下的两个組成部分：条件部分(即假設)——产生結果的全部条件；結論部分(即終結)——根据全部条件所产生的結果。

互换一个命題的条件部分和結論部分所得的另一个命題叫做原命題的逆命題。例如，“中华人民共和国的首都是北京”可以看作是“北京是中华人民共和国的首都”的逆命題，反之，“北京是中华人民共和国的首都”也可以看作是“中华人民共和国的首都是北京”的逆命題，

§3 基本元素

几何学所研究的图形是体、面、綫、点的任意集合，而初等几何学所研究的图形則只是平面、直綫、点的任意集合。平面、直綫、点是几何学里最初的原始概念。对于这些概念，一般不給它們下定义，所以又叫做不定义的概念，認識它們的方法通常是利用直觀模型的演示，或語言的形象描述，而不能强图用任何不适当的定义來說明。例如，我們可以用拉得很紧的細綫，黑板的边以及从細孔中透进来的光綫等实例来描述直綫的概念，但描述完毕后不要再作任何的概括。

基上所述，我們把平面、直綫和点叫做几何学的基本元素，它們具有下面的一些基本性質。

(1) 有一条而且只有一条直綫通过两个已知的定点。

由这个性質，我們立刻可以推得：

两条不同的直綫至多有一个公共点(即交点)。

因为，如果它們有多于一个的公共点的話，为明确起見，設有两个公共点，那末通过这两个点的就只有一条直綫，而不是两条不同的直綫了。

注意，这个性質是根据性質(1)推証而得的，因此它不算是基本性質。

(2) 如果一条直綫上的两个点在一个平面上，那末这条直綫上所有的点都在这个平面上。

(3) 有一个而且只有一个平面通过不在同一直綫上的三个点。

(4) 在同一直綫上的三个点中，必有而且只有一个点介于其他两个点之間。

以上所列举的这些平面、直綫和点的基本性質都是不加証明而被直接承認的事理，所以都是公理。

§4 綫段、射綫、折綫和曲綫

在一直綫上任意取两个点A和B。我們可以想象位于这条直綫上A和B两点之間必还存在着无限多个另外的点，这些点(除了A和B两个点)的全体集合，叫做綫段，記做AB或BA。点A和B叫做綫段的端点。

以A和B为端点的綫段可以說它連結点A和B；又綫段AB

或BA叫做点A和B间的距离。

一直线的任意一点O

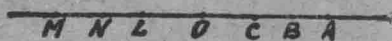


图 1

(图1)将直线上所有的点

分成两组，如果点O是介

于直线上某两个点之间的，那末这两个点是属于不同组的点；如果直线上某两个点之一介于另一个点和点O之间，那末这两个点就是属于同组的点。如，点C和L是不同组的两个点，因为点O是介于它们之间的；而点C和B则是同组的两个点，因为这时点C介于点B和点O之间。余可类推。同组的所有点(除点O外)的全体集合叫做自点O引出的射线(或半直线)，如点C、B、A、……的全体集合和点L、N、M、……的全体集合各叫做自点O引出的射线，当然它们是不相同的。点O叫做射线的原点。自点O引出且通过点A的射线常用“OA”来表示；同样，“OM”表示自点O引出且通过点M的射线。

如果自点O引出的两条射线组成一条直线(包括O点在内)，那末其中的一条射线叫做另一条射线自点O引出的延长线，如射线OA叫做射线OM自点O引出的延长线，而射线OM也叫做射线OA自点O引出的延长线。

顺次连结有限个已知点A、B、C、……K、L的相邻两个点(不连结A、L两点)就得到线段AB、BC、……KL，这些点和线段的全体集合叫做折线，用“ABC……KL”表示。

既不是直线又不是折线的线叫做曲线。

§5 角

自一点引出两条射线，则由该点以及两条射线所成的集合

叫做角；这个点叫做角的顶点，两条射线叫做角的两个边。

如图2，由点O以及自该点引出的两条射线OA和OB所成的角常记作“ $\angle AOB$ ”或“ $\angle BOA$ ”，表示顶点的字母O要写在其他两个字母A和B之

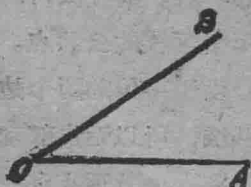


图 2

間。如果被考察的角是唯一的，那末用表示顶点的字母来表示它就行了，如“ $\angle O$ ”就是表示“ $\angle AOB$ ”的。

如果自一点引出的两条射线合成一条直线时（包括原点在內），則所組成的角叫做平角，如图3的 $\angle AOB$ 。

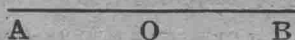


图 3

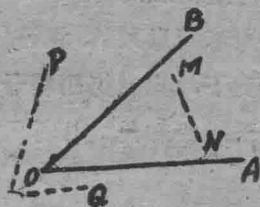


图 4

非平角的角将平面上所有的点分成两组：能用与角的边不相交的线段或折线連結的任意两个点属于同一组，不然，則属于不同的组，如图4中M、N和P、Q都是同组的两个点，而P、M則是不同组的两个点。只能用与角的边不相交的线段連結的任意两点

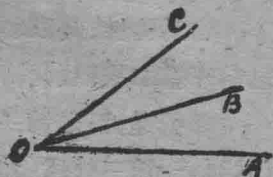


图 5

所在的区域叫做凸域；能用与角的边不相交的线段或折线連結的任意两点所在的区域叫做凹域，在一般情况下前者叫做角的

内部，后者则叫做角的外部。角的顶点以及角的边上所有的点都是两个区域的公共点。

由于平角的两个边合成一条直线，它将平面分成两个相同的凸域，所以无内部和外部之分。

有一公共顶点和一条公共边，并且各在这条公共边的一侧的两个角，叫做邻角，如图5中 $\angle AOB$ 与 $\angle BOC$ 。

§6 线段和角的相等

在数学里，关于不同的对象，“相等”一词具有不同的意义。它使用于几何图形时，则表示两个图形“合同”的意思，也就是中学教材里所说的“全等”，常用符号“ $\cong$ ”或“ $\equiv$ ”来表示，以区别于其他不同意义的“相等（如数的相等）。”今后在没有其他说明的情况下，我们仍用符号“ $=$ ”来表示几何图形的“合同”。

关于线段和角的相等的概念可以用下面一些基本性质来描述它们：

(1) 线段和角的相等具有：

① 反射性：每一线段（角）与其自身合同；

② 对称性：线段（角）的合同是可以互逆的，即第一线段（角）若等于第二线段（角），那末第二线段（角）也等于第一线段（角）；

③ 传递性：若第一线段（角）等于第二线段（角），第二线段（角）等于第三线段（角），那末第一线段（角）也等于第三线段（角）。

这条性质也适用于若干条线段（角）相等的概念。

(2) 在直线 AB 和 $A'B'$ 上分别取点 C 和 C' ，使点 C 介于点 A 、 B 之间，点 C' 介于点 A' 、 B' 之间，这时：如果 $AC \equiv A'C'$ ，

$CB = C'B'$, 則 $AB = A'B'$; 如果 $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, 則 $CB = C'B'$ 。

(3) 在 $\angle AOB$ 和 $\angle A'O'B'$ 的內部分別自頂點 O 和 O' 引射綫 OC 和 $O'C'$, 这时: 如果 $\angle AOC = \angle A'O'C'$, $\angle COB = \angle C'O'B'$, 則 $\angle AOB = \angle A'O'B'$; 如果 $\angle AOB = \angle A'O'B'$, $\angle AOC = \angle A'O'C'$, 則 $\angle COB = \angle C'O'B'$ 。

(4) 在自點 A' 所引出的射綫上有而且只有一點 B' 使得一已知綫段 AB 等于 $A'B'$ 。

(5) 設 $O'A'$ 是某平面上自點 O' 所引出的射綫, 則在同平面內且在射綫 $O'A'$ 的同一側能而且只能自點 O' 引出一條異于 $O'A'$ 的射綫 $O'B'$ 使得一已知 $\angle AOB$ 等于 $\angle A'O'B'$ 。

根据上述綫段和角的相等的性質, 我們有可能使用某些工具: 在以 A' 为原点的射綫上自點 A' 起取等于已知綫段 AB 的綫段; 以 O' 为頂點, 以自點 O' 所引出的射綫 $O'A'$ 为边, 在射綫 $O'A'$ 所在的平面內且在它的一側作一个等于已知 $\angle AOB$ 的角。(这里只提到作图的可能性, 关于具体使用什么工具和采用什么方法来进行作图則在后面另作研究)。

根据上述性質, 我們还可以建立綫段的大小和角的大小的比較概念。

如图 6, AB 和 CD 是两条已知的綫段。在以 O 为原点的射綫 OP 上取

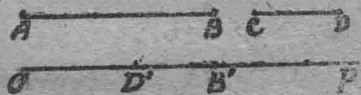


图 6

$OB' = AB$, $OD' = CD$, 这时, 点 D' 介于点 O' 与 B' 之間, 我們就說綫段 AB 大于 CD , 而綫段 CD 小于 AB , 前者用 $AB > CD$ 来表示, 后者用 $CD < AB$ 来表示; 在相同的条件下, 如果点 B' 介